

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AFİN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Hülya GÜN BOZOK

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

KASIM-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AFİN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Hülya GÜN BOZOK
(111121206)

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

KASIM-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AFİN ÖTELEME YÜZEYLERİ

DOKTORA TEZİ

Hülya GÜN BOZOK

(111121206)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14.10.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 06.11.2015

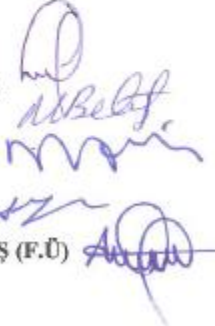
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (N.K.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Prof. Dr. Bayram ŞAHİN (İ.Ü)

Prof. Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü)

Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)



KASIM-2015

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkânlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olup her vesilede birikimini aktararak sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e ve değerli bilgilerini ve birikimlerini esirgemeyen Arş. Gör. Dr. M. Evren AYDIN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca yanımda olan ve bana her zaman destek olan başta babam Yusuf GÜN ve annem Enise GÜN olmak üzere doktora süreci boyunca bana her konuda yardımcı olan eşim Fuat BOZOK ve varlığı ile beni güçlendiren, mutlu eden oğlum Bahri Kaan BOZOK'a teşekkür ederim.

Hülya GÜN BOZOK
ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Öklid Uzayı.....	3
2.2. Hiperbolik Uzay	9
2.3. Galilean ve Pseudo-Galilean Uzayı	11
3. 3 VE 4 BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARIYLA, 3-BOYUTLU PSEUDO-GALİLEAN UZAYINDA AFİN ÖTELEME YÜZEYLERİ.....	17
3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Afın Öteleme Yüzeyleri	17
3.1.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Polinomial Afın Öteleme Yüzeyleri.....	20
3.1.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Afın Öteleme Yüzeyinin Paralel Yüzeyleri.....	26
3.2. 3-Boyutlu Hiperbolik Uzayda Afın Öteleme Yüzeyleri	33
3.3. 3- Kürede Afın Öteleme Yüzeyleri	37
3.4. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Afın Öteleme Yüzeyleri	41
3.5. Pseudo-Galilean Uzayında Afın Öteleme Yüzeyleri	49
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ.....	55

ÖZET

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlendi.

Birinci bölümde; çalışmanın tarihsel gelişimi ve öteleme yüzeyleriyle ilgili yapılan çalışmalara yer verildi.

İkinci bölümde; Öklid, Hiperbolik, Galilean ve pseudo-Galilean uzaylarında sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler ifade edildi.

Üçüncü bölümde ise; 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de, sabit eğrilikli afin öteleme yüzeyleri incelendi ve bu yüzeylerle ilgili bazı yokluk teoremleri elde edildi. E^3 de afin öteleme yüzeylerinin paralel yüzeyleri incelendi. 3-boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$ de ele alınan bir afin öteleme yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edildi ve bu yüzeyin minimal olma durumu incelendi. 3-küre S^3 de afin öteleme yüzeyleri için ortalama eğrilik incelendi. 4-boyutlu Öklid uzayı E^4 de afin öteleme yüzeyleri tanımlandı ve tanımlanan bu afin öteleme yüzeyleri için eğrilikler hesaplandı. Ayrıca 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı G_3^1 de afin öteleme yüzeyleri ele alınarak bu yüzeyler için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Öteleme yüzeyi, afin öteleme yüzeyi, Öklid uzay, Hiperbolik uzay, Galilean ve pseudo-Galilean uzay.

SUMMARY

AFFINE TRANSLATION SURFACES

This thesis has been edited in three chapters.

In the first chapter; previous studies about translation surfaces and their background were given.

In the second chapter; some fundamental definitions and theorems which often used in Euclidean, Hyperbolic, Galilean and pseudo-Galilean spaces were expressed.

In the third chapter; affine translation surfaces with constant curvature in 3-dimensional Euclidean space E^3 were investigated and some non-existence theorems for such surfaces were obtained. Parallel surfaces of affine translation surfaces in E^3 were investigated. Gaussian and mean curvatures of affine translation surfaces in 3-dimensional Hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ were obtained and the condition of these surfaces to be minimal were examined. The mean curvatures of affine translation surfaces in 3-sphere $\mathbb{S}^3$ were investigated. Affine translation surfaces defined in 4-dimensional Euclidean space E^4 and the curvatures were calculated for these surfaces. Also, Gaussian and mean curvatures of affine translation surfaces in 3-dimensional pseudo-Galilean space were calculated.

Key Words: Translation surfaces, affine translation surfaces, Euclidean space, Hyperbolic space, Galilean and pseudo-Galilean space.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1.1.....	19
Şekil 3.1.2.....	20
Şekil 3.1.3.....	25

SEMBOLLER LİSTESİ

$\langle , \rangle$	: Öklid iç çarpım
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzay
E^4	: 4-boyutlu Öklid uzay
G_3	: 3-boyutlu Galilean uzay
G_3^1	: 3-boyutlu pseudo-Galilean uzay
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu standart vektör uzay
$\mathbb{H}^3$	: Hiperbolik uzay
S^3	: 3-küre
$g(,)$	: Galilean iç çarpım
$\wedge_G$	: Galilean uzayında vektörel çarpım
t	: Birim tanjant vektör
n	: Birim normal vektör
b	: Birim binormal vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğrilik
I	: Birinci temel form
II	: İkinci temel form

1. GİRİŞ

Yüzey nedir diye sorulduğunda manifold tanımı yapılmadan bu soruya doğru bir cevap verilemez. Ancak topolojik olarak bir yüzey iki boyutlu bir topolojik manifolddur, şeklinde ifade edilebilir. İki boyutlu ile kastedilen her bir noktanın iki boyutlu kartezyen sisteminde tanımlanan bir koordinat parçasına sahip olmasıdır. Bir yüzey incelendiğinde bu yüzey için iki özellik göze çarpar; bunlar yüzeyin iç ve dış olarak ifade edilen özellikleridir. Örneğin, Gauss eğriliği iç özellik olarak değerlendirilirken, yüzeye bir noktada normal olma, bir dış özelliktir. Yüzeyin iç özellikleri ele alınarak sabit eğrilikli yüzeyler, minimal yüzeyler gibi bazı özel yüzeyler elde edilebilir.

Minimal yüzeyler, ilk olarak Lagrange'ın 1762 yılında minimum alan problemini ele almasıyla ortaya çıktı. Aynı zamanda Lagrange bu yüzeylerin diferensiyel denklemini elde etti. Daha sonra 1776 da J. B. Meusnier minimal yüzeylere bir geometrik yorum kattı ve bu yüzeylerin ortalama eğriliğinin sıfıra eşit olduğunu gösterdi. Günümüzde de hala önemini koruyan bu yüzeylere klasik diferensiyel geometri çalışmalarında fazlaca yer verilmektedir [14,17,19]. Ayrıca bu yüzeyler sadece diferensiyel geometride değil; mimari, malzeme bilimi, gemi üretimi, havacılık, biyoloji gibi birçok alanda da kullanılmaktadır. Örneğin modern mimaride kullanılan zar yapısı şekli minimal yüzeylere dayanmaktadır [4].

Yüzeyler teorisi Öklid ve Öklid dışı birçok uzayda çalışılmaktadır[1,3,16,24,]. Sadece yüzeyin eğriliğine göre yüzeyin durumu değil, farklı yüzeyler de ele alındı. Örneğin, Öklid uzayında düzlemsel eğrilerin toplamı olarak ifade edilen öteleme yüzeyleri bunlardan sadece bir tanesidir.

Öteleme yüzeyleri, sıfır eğrilikli bir uzay form olan Öklid uzayında, birçok geometrici tarafından incelendi. İlk olarak L. Verstraelen, J. Walrave ve S. Yaprak, n-boyutlu Öklid uzayında minimal öteleme yüzeylerini çalıştılar [29]. H. Liu, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında sabit eğrilikli öteleme yüzeylerini ele alıp, bu yüzeyler için bazı sınıflandırmalar yaptı [18]. D. W. Yoon, 3-boyutlu Minkowski uzayında öteleme yüzeylerinin Gauss dönüşümünü inceledi [30]. Ayrıca, M. Munteanu ve N. I. Nistor, 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin ikinci temel formunu çalışarak bu yüzeyler için bazı yokluk teoremlerini ifade ettiler [27].

Öteleme yüzeyleri negatif eğriliğe sahip Öklid dışı bir geometri olan Hiperbolik uzayda da ele alındı. R. Lopez, hiperbolik uzayda $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$ tanım cümlesi ile verilen yarı uzay modelini göz önüne aldı ve bu model için minimal öteleme yüzeylerini araştırdı [17]. Ayrıca ele alınan bu model için tek minimal öteleme yüzeyinin total geodezik düzlemler olduğunu ispatladı.

Son zamanlarda H. Liu ve Y. Yu, 3-boyutlu Öklid uzayında yeni bir öteleme yüzeyi tanımladılar [19]. Bu yüzey afin öteleme yüzeyi olarak adlandırılır ve öteleme yüzeyinin genel bir hali olarak düşünülebilir. Ayrıca, H. Liu ve Y. Yu, 3-boyutlu Öklid uzayında minimal afin öteleme yüzeylerini çalıştılar [19]. M. Magid ve L. Vrancken 4-boyutlu afin uzayında sabit kesit eğrilikli afin öteleme yüzeyini incelediler ve bu yüzeylerin flat veya tanımlanan eğrilerin düzlemsel olması gerektiğini ispatladılar [20]. Y. Fu ve Z. Hou ise 3-boyutlu afin uzayında sabit Gauss eğrilikli afin öteleme yüzeylerini ele alarak bu yüzeyler için tam bir sınıflandırma ifade ettiler [10]. Ek olarak Y. Yuan and H. Liu, 3-boyutlu Minkowski uzayında afin öteleme yüzeylerini incelediler [32].

Bu çalışmada, uzay formlarında afin öteleme yüzeyleri ele alındı. 3-boyutlu Öklid uzayında afin öteleme yüzeylerinin sabit eğrilikli olma durumları göz önüne alınarak bazı yokluk teoremleri verildi. Yine bu uzayda ele alınan bir afin ötelenme yüzeyinin paralel yüzeyleri araştırıldı. 3-boyutlu Hiperbolik uzayda afin öteleme yüzeylerinin minimal ve flat olma durumları incelendi. Stereografik dönüşüm kullanılarak bir afin öteleme yüzeyi 3-küre üzerine resmedildi ve bu yeni yüzeyin minimal olma durumu araştırıldı. 4-boyutlu Öklid uzayı için afin öteleme yüzeyleri tanımlandı ve yüzeylerin flat ve minimal olma durumları incelendi. Ayrıca 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında tanımlanan afin öteleme yüzeyleri için sabit ortalama eğrilikli olma durumları araştırıldı.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$i) \quad \forall P, Q, R \in A \quad \text{için} \quad f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R).$$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [11].

Tanım 2.1.2. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki aksiyomlar ile tanımlanan dönüşüme iç çarpım denir [12].

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ olmak üzere}$$

(i) Simetri aksiyomu

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$$

(ii) Bilineerlik aksiyomu

$$\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle = \langle u, cv \rangle \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$$

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle \quad \forall u_1, u_2, v \in V$$

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$$

(iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$$

Tanım 2.1.3 3-boyutlu reel standart afin uzay, 3-boyutlu standart vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile eşlensin. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında bir,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\langle , \rangle (X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı adı verilir. $\{\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standart afin uzay, 3-boyutlu Öklid uzay adını alır ve E^3 ile gösterilir [11].

Tanım 2.1.4.

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \vec{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [11].

Tanım 2.1.5.

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \vec{xy} \right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [11].

Tanım 2.1.6. 3-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X ve bir afin koordinat sistemine göre X in koordinatları (x_1, x_2, x_3) olsun.

$$x_i : A \subseteq E^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları adı verilir [11].

Tanım 2.1.7. V bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olsun. x vektörünün normu $\|x\|$

olmak üzere x vektörünün $\frac{1}{\|x\|}$ skaları ile çarpılmışına x in normlanmışı denir ve

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|} \text{ ile gösterilir [12].}$$

Tanım 2.1.8. E^n , n - boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ - boyutlu bir yüzey, veya $(n-1)$ - yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, f(x) = c, \nabla f|_p \neq 0, \forall P \in M \right\} \quad (2.1.2)$$

biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n de bir $(n-1)$ - yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.1.9. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ in bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir [13].

Tanım 2.1.10. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

olarak tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [13].

Tanım 2.1.11. E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde q -yuncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [13].

Tanım 2.1.12. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği (total eğrilik) denir [13].

Tanım 2.1.13. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = Iz(S(P))$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir [13].

M , E^n uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyinin tanjant uzayı, M üzerindeki keyfi bir $p = X(u, v)$ noktasında $\{X_u, X_v\}$ tarafından gerilir. Böylece M yüzeyinin birinci temel formu, $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ eşitliği ile hesaplanır. Burada birinci temel formun katsayıları

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle \quad (2.1.3)$$

eşitlikleriyle verilir. Eğer $W^2 = EG - F^2 \neq 0$ ise $X(u, v)$ yüzeyi regülerdir denir.

Her bir $p \in M$ için $T_p E^n = T_p M \oplus T_p^\perp M$ olsun. Burada $T_p^\perp M$, E^n uzayında $T_p M$ nin ortogonal bileşenidir.

$\chi(M)$ ve $\chi^\perp(M)$, M yüzeyine, sırasıyla, teğet ve dik olan düzgün vektör alanlarının uzayı, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ise, sırasıyla, M ve E^n in konneksiyonları olsun. $X_1, X_2 \in \chi(M)$ ve $N_\alpha \in \chi^\perp(M)$ için

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

$$h(X_1, X_2) = \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} X_2$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme M nin ikinci temel formu denir. M yüzeyinin şekil operatörü

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) ;$$

$$A_{N_k} X_j = -(\nabla_{X_j} N_k)^T, \quad X_j \in \chi(M)$$

şeklindedir. Ayrıca bu operatör

$$\langle A_{N_k} X_j, X_i \rangle = \langle h(X_i, X_j), N_k \rangle = c_{ij}^k, \quad 1 \leq i, j \leq 2; 1 \leq k \leq n-2$$

denklemini sağlar. Burada c_{ij}^k , M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayılarıdır. Buna göre

$$h(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n-2} c_{ij}^k N_k, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

yazılır.

Tanım 2.1.14. $X(u, v)$ yüzeyinin ikinci mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} olmak üzere M nin ikinci temel form katsayıları

$$c_{11}^k = \langle X_{uu}, N_k \rangle, \quad (2.1.4)$$

$$c_{12}^k = \langle X_{uv}, N_k \rangle, \quad (2.1.5)$$

$$c_{22}^k = \langle X_{vv}, N_k \rangle, \quad (2.1.6)$$

$1 \leq k \leq n-2$, şeklinde tanımlanır [21].

Tanım 2.1.15. E^n de verilen $X(u, v)$ yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \quad (2.1.7)$$

dir [22].

Tanım 2.1.16. E^n de verilen $X(u, v)$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) N_k \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanır [21].

Tanım 2.1.17. M yüzeyinin, Gauss eğriliği sıfırsa M ye flat yüzey, ortalama eğrilik vektörü sıfırsa M ye minimal yüzey denir [6].

Tanım 2.1.18. $\Phi: E^2 \rightarrow E^3$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$$

şeklinde tanımlanan yüzey Monge yüzeyi adını alır (Burada, $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.) [13].

Tanım 2.1.19. Monge yüzeyinde $f(u, v) = h(u) + g(v)$ biçiminde ise bu yüzey,

$$\Phi(u, v) = (u, v, h(u) + g(v))$$

$$\Phi(u, v) = (u, 0, h(u)) + (0, v, g(v))$$

veya

$$\Phi(u, v) = \alpha(u) + \gamma(v)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda yüzey öteleme yüzeyi adını alır [13].

Teorem 2.1.1. Eğer, Monge yüzeyi $x: U \rightarrow M$ ve $h(u, v) = f(u) + g(v)$ minimal öteleme yüzeyi ise M , ya bir düzlem parçasıdır ya da $a \neq 0$ olmak üzere;

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log(\cos(au)) \quad \text{ve} \quad g(v) = \frac{1}{a} \log(\cos(av))$$

iken

$$h(u, v) = \frac{1}{a} \log\left(\frac{\cos(av)}{\cos(au)}\right)$$

dir [18].

Tanım 2.1.20. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında

$$S_r^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2, \left| \vec{\nabla} f \right| \neq 0, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit} \right\} \quad (2.1.9)$$

nokta cümlesine bir $(n-1)$ -boyutlu hiperküre veya kısaca $(n-1)$ -küre denir. Burada r hiperkürenin yarıçapını göstermektedir [13].

Tanım 2.1.21. M_1 ve M_2 , E^n in iki hiperyüzeyi ve M_1 in birim normal vektör alanı

$$\vec{N}_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve her $P \in M_1$ için

$$f(p) = (p_1 + ra_1(p), p_2 + ra_2(p), \dots, p_n + ra_n(p)) \quad (2.1.10)$$

olacak şekilde bir

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa, M_1 , M_2 nin bir paralel hiperyüzeyi adını alır [13].

2.2. Hiperbolik Uzay

Hiperbolik uzayların analitik modellerinden en bilinen 5 tanesi şunlardır:

$\mathbb{H}$, Yarı-Uzay Modeli ,

D , Disk Modeli ,

J , Yarı-Küre Modeli ,

K , Klein Modeli ,

L , Hiperboloid Modeli .

Bu modellere ait tanım kümeleri ise sırasıyla,

$$\mathbb{H} = \{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\} ,$$

$$D = \{(x_1, \dots, x_n, 0) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\} ,$$

$$J = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} > 0\} ,$$

$$K = \{(x_1, \dots, x_n, 1) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\} ,$$

$$L = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\} ,$$

dir. Bu beş modelin ds^2 Riemann metrikleri, sırasıyla, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$ds_H^2 = \frac{dx_2^2 + dx_3^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \quad (2.2.1)$$

$$ds_D^2 = 4 \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)^2} \quad (2.2.2)$$

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \quad (2.2.3)$$

$$ds_K^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)} + \frac{x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)^2} \quad (2.2.4)$$

$$ds_L^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots - dx_{n+1}^2 \quad (2.2.5)$$

Yukarıda verilen Riemann metrikleri uzayın her noktasında tanımlanabilen simetrik, lineer ve pozitif tanımlı yay elemanlarıdır. Bu metriklerle verilen beş model birbirine izometrik olarak eşdeğerdir [5].

Tanım 2.2.1. $\mathbb{H}^3$ hiperbolik uzayının yarı-uzay modeli $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$ şeklinde olup metriği

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} \quad (2.2.6)$$

dir [16] .

$X : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, $\mathbb{R}_+^3$ de bir immersiyon olsun. $\mathbb{R}_+^3$ hem hiperbolik metriği hem de Öklid metriğini kapsadığından M yüzeyi iki indirgenmiş metriği de kullanır. Öklid metriğine göre M nin birim normal vektör alanı n ve hiperbolik metriğe göre M nin birim normal vektör alanı N olsun. Bu birim normaller arasındaki bağıntı $n = N/z$ ile verilir. M nin hiperbolik ortalama eğriliği H_h olsun. κ_i^h hiperbolik asli eğrilikler olmak üzere $H_h = (\kappa_1^h + \kappa_2^h)/2$ ile verilir. Yarı-uzay modelindeki hiperbolik metrik $1/z^2$ katsayısı ele alındığında Öklid metriği ile konformal olarak denk olduğundan κ_i^h asli eğrilikleri ile κ_i Öklid asli eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\kappa_i^h = z\kappa_i + n_3 \quad (2.2.7)$$

şeklindedir. Burada n_3 , $n = (n_1, n_2, n_3)$ birim normal vektörünün üçüncü bileşenidir. M nin hiperbolik Gauss eğriliği K_h ile verilsin. Bu durumda $K_h = \kappa_1^h \kappa_2^h - 1$ şeklinde hesaplanır. Ayrıca eğer H ile Öklid ortalama eğriliği ve H_h ile de hiperbolik ortalama eğriliği ifade edilecek olursa

$$H_h(x, y, z) = zH(x, y, z) + n_3(x, y, z) \quad (2.2.8)$$

bağıntısı mevcuttur [17].

Tanım 2.2.2. Yarı-uzay modelinde total geodezik yüzeyler veya düzlemler xy -düzlemi ile dik olarak kesişen dikey Öklid düzlemleri ve Öklid hemiküreleri olarak tanımlanır. Yarı-uzay modelinde total geodezik yüzeyler veya düzlemler için ortalama

eğrilik sıfırdır. $\mathbb{H}^3$ de bir izometrinin ardından herhangi bir geodezik düzlem $P(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, $a > 0$ şeklinde düşünülebilir [16].

Tanım 2.2.3. Merkez doğrusu sınırdaki olan geodezik kürelere horoküre denir. Yarı-uzay modelinde her bir $a > 0$ için horoküreler $L(a) = (z = a)$ yatay düzlemleridir ve $\mathbb{R}_+^3$ ün Öklid küreleri xy -düzlemine teğettir. Ayrıca H ortalama eğriliği $|H| = 1$ dir [16].

2.3. Galilean ve Pseudo-Galilean Uzayı

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayı, 3-boyutlu P_3 kompleks projektif uzayının w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini, $f \subset w$ ideal doğruların bir reel doğrusunu ve $I_1, I_2 \in f$ gibi ideal noktalardan iki tanesini içeren $\{w, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahip olan bir uzaydır. Galilean geometri, projektif olarak işareti $(0, 0, +, +)$ olan reel Cayley-Klein geometrilerinden bir tanesidir.

Burada C^k ($k \geq 3$) sınıfından bir $r: I \rightarrow G_3$ eğrisi (I, r) koordinat komşuluğu ile

$$r(x) = (x, y(x), z(x)) \quad (2.3.1)$$

şeklinde verilir [28].

Tanım 2.3.1. 3-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ olsun.

$\forall X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in G_3$ vektörü için Galilean iç çarpımı;

$$g: G_3 \times G_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & , x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 + z_1 z_2 & , x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.3.2. $X(x, y, z), G_3$ 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer

$X(x, y, z)$ vektörü için $x = 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörüne izotropik vektör denir [9].

Tanım 2.3.3. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ izotropik vektörünü göz önüne alalım. Eğer $y^2 + z^2 = 1$ ise bu $X(x, y, z)$ izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır [9].

Tanım 2.3.4. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörünün normu;

$$\|X\| = \begin{cases} x & , \quad x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2} & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

dir [28].

Tanım 2.3.5. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında $X(x_1, x_2, x_3)$ ve $Y(y_1, y_2, y_3)$ vektörlerini göz önüne alalım. X ve Y vektörleri için Galilean uzayında vektörel çarpım;

$$X \wedge_G Y = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.3.4)$$

şeklinde tanımlanır [23].

(2.3.1) denklemi ile verilen eğrinin $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu ,

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)} \quad ,$$

$$\tau(x) = \frac{\det(r'(x), r''(x), r'''(x))}{\kappa^2(x)} \quad ,$$

şeklinde tanımlanır. Böylece G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında ortonormal üçyüzlü,

$$t(x) = r'(x) \quad ,$$

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x)) \quad ,$$

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x)) \quad ,$$

şeklinde dir. Burada t, n, b vektörleri, sırasıyla, teğet, aslinormal ve binormal vektörler olarak adlandırılır.

Bu vektörlere ait Frenet formülleri;

$$t'(x) = \kappa(x)n(x) ,$$

$$n'(x) = \tau(x)b(x) ,$$

$$b'(x) = -\tau(x)n(x) ,$$

dir [15].

G_3 de $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ile parametrelendirilen yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N(u, v) = \frac{1}{W(u, v)}(0, x_1z_2 - x_2z_1, x_2y_1 - x_1y_2) \quad (2.3.5)$$

olur. Burada $W^2 = (x_2x_1 - x_1x_2)^2$ dir. G_3 de yüzeyin birinci temel formu

$$\delta = \begin{cases} 0 & , du : dv \text{ non-izotropik doğrultu} \\ 1 & , du : dv \text{ izotropik doğrultu} \end{cases}$$

iken

$$I = (g_1du + g_2dv)^2 + \delta(h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2) \quad (2.3.6)$$

şeklindedir. $\sim$ bir vektörün yz-düzlemine olan izdüşümünü göstermek üzere birinci temel form katsayıları

$$g_i = x_i , h_{ij} = \tilde{x}_i \cdot \tilde{x}_j , i, j = 1, 2$$

ile ifade edilir. Ayrıca ikinci temel form katsayıları $L_{ij} = \frac{1}{g_1}(g_1\tilde{x}_{ij} - g_{ij}\tilde{x}_1) \cdot N$ olmak üzere

yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2} \quad (2.3.7)$$

şeklindedir. Yüzeyin ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{(g_2^2L_{11} - 2g_1g_2L_{12} + g_1^2L_{22})}{2W^2} \quad (2.3.8)$$

olarak elde edilir [24]

Pseudo-Galilean geometri, projektif işareti $(0, 0, +, -)$ olan reel Cayley-Klein geometrilerinden biri olarak ifade edilir. Pseudo-Galilean geometrinin temeli $\{w, f, I\}$ sıralı üçlüleridir. Burada w ideal düzlem, f ideal düzlemde bir doğru ve I da f in noktalarının sabit hiperbolik involusyonudur.

Tanım 2.3.6. 3-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall X_1(x_1, y_1, z_1)$, $X_2(x_2, y_2, z_2) \in G_3^1$ vektörü için pseudo-Galilean iç çarpımı

$$g : G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & , x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 - z_1 z_2 & , x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 2.3.7. $P_1, P_2 \in G_3^1$, $P_1 \neq P_2$ iki reel nokta olmak üzere $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ için

$$d : G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(P_1, P_2) \rightarrow d(P_1, P_2) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & , x_1 \neq x_2 \\ \sqrt{|(y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2|} & , x_1 = x_2 \end{cases}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna G_3^1 pseudo Galilean uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(P_1, P_2)$ reel sayısına da $P_1, P_2 \in G_3^1$ noktaları arasındaki uzaklık denir [8].

Tanım 2.3.8. G_3^1 , 3- boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ izotropik vektörü verildiğinde

$y^2 - z^2 > 0$ ise X izotropik vektörüne space-like vektör,

$y^2 - z^2 < 0$ ise X izotropik vektörüne time-like vektör,

$y = \mp z$ ise X izotropik vektörüne light-like vektör denir [8].

Tanım 2.3.9. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir light-like olmayan $X(x, y, z)$ izotropik vektör göz önüne alınsın. Eğer $y^2 - z^2 = \mp 1$ ise bu X izotropik vektör birim vektör olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.3.10. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörünün normu

$$\|X\| = \begin{cases} x & , x \neq 0 \\ \sqrt{|y^2 - z^2|} & , x = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

şeklindedir [8].

Tanım 2.3.11. G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında iki non-izotropik vektör $a(1, a_2, a_3)$ ve $b(1, b_2, b_3)$ olsun. Bu iki non-izotropik vektör arasındaki açının ölçüsü, onların fark vektörlerinin uzunluğu olarak tanımlanır ve

$$m(a, b) = \sqrt{|(b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2|}$$

şeklindedir [8].

G_3^1 de yüzey $x = x(u_1, u_2), y = y(u_1, u_2), z = z(u_1, u_2)$ ile parametrelendirilsin. Burada $x_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}$, $y_i = \frac{\partial y}{\partial u_i}$, $z_i = \frac{\partial z}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$ ile ifade edilir. Böylece bir yüzeyin admissible olması için gerek ve yeter şart $i = 1, 2$ için $x_i \neq 0$ olmasıdır.

$\Phi \subset G_3^1$ regüler admissible yüzey olsun. Böylece $x(u, v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N(u, v) = \frac{1}{W(u, v)} (0, x_1 z_2 - x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (2.3.11)$$

şeklinde olup, burada

$$W(u, v) = \sqrt{|(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2|} \quad (2.3.12)$$

şeklindedir. Normal vektör alanı $N \cdot N = \varepsilon = \pm 1$ ifadesini sağladığından, admissible eğri ya timelike yüzey normaline sahip spacelike eğri ($\varepsilon = -1$), ya da spacelike normale sahip timelike eğridir ($\varepsilon = 1$). Ayrıca, $(x_1 x_2 - x_2 x_1) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 > 0$ ise yüzey spacelike aksi taktirde timelike olarak adlandırılır.

G_3^1 de yüzeyin birinci temel formu

$$\delta = \begin{cases} 0 & , du_1 : du_2 \text{ non-izotropik doğrultu} \\ 1 & , du_1 : du_2 \text{ izotropik doğrultu} \end{cases}$$

iken

$$I = (x_1 du_1 - x_2 du_2)^2 + \delta (\tilde{x}_1 du_1 + \tilde{x}_2 du_2)^2 ,$$

şeklindedir. Birinci temel form katsayıları ise

$$g_i = x_i , \quad h_{ij} = \tilde{x}_i \cdot \tilde{x}_j , \quad i, j = 1, 2$$

şeklinde olup birinci temel form

$$ds^2 = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2 + \delta (h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2) = ds_1^2 + ds_2^2 \quad (2.3.13)$$

olarak yazılabilir. $g_1^2 h_{22} - 2g_1 g_2 h_{12} + g_2^2 h_{11} > 0$ ise yüzey spacelike aksi taktirde timelike olur. Regüler admissible yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = -\varepsilon \frac{L_{11} L_{22} - L_{12}^2}{W^2} \quad (2.3.14)$$

dir. Bu yüzey $z = z(x, y)$ şeklinde yazılırsa

$$K = -\varepsilon \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{W^4} \quad (2.3.15)$$

şeklinde yazılabilir. $L_{ij}, i, j = 1, 2$, ikinci temel form katsayıları olmak üzere

$$L_{ij} = \varepsilon \frac{1}{g_1} (g_1 \tilde{x}_{ij} - g_{ij} \tilde{x}_1) \cdot \mathbf{N} = \varepsilon \frac{1}{g_2} (g_2 \tilde{x}_{ij} - g_{ij} \tilde{x}_2) \cdot \mathbf{N}$$

dir.

Yüzeyin ortalama eğriliği ise

$$H = -\frac{\varepsilon}{2W^2} (g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}) \quad (2.3.16)$$

olarak elde edilir. Bu yüzey $z = z(x, y)$ şeklinde yazılırsa

$$H = \frac{\varepsilon}{2W^3} z_{yy} \quad (2.3.17)$$

olur [25,26].

3. 3 VE 4 BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARIYLA, 3-BOYUTLU PSEUDO-GALİLEAN UZAYINDA AFİN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de, sabit eğrilikli afın öteleme yüzeyleriyle afın öteleme yüzeylerinin paralel yüzeyleri incelendi. 3-boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$ de ele alınan bir afın öteleme yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edildi ve yüzeyin minimal olma şartı araştırıldı. 3-küre $\mathbb{S}^3$ de afın öteleme yüzeyleri için ortalama eğrilik ve yüzeyin minimal olma şartı incelendi. 4-boyutlu Öklid uzayı E^4 de afın öteleme yüzeyleri tanımlandı ve tanımlanan bu afın öteleme yüzeyleri için eğrilikler hesaplandı. E^4 de tanımlanan bu yüzeyin minimal olma şartı incelendi. Ayrıca 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı G_3^1 de afın öteleme yüzeyleri ele alınarak bu yüzeyler için Gauss eğriligi ve ortalama eğrilik hesaplandı.

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Afın Öteleme Yüzeyleri

M , E^3 de bir afın öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda M ,

$$r:U \subseteq E^2 \rightarrow E^3, (x,y) \mapsto r(x,y) = (x,y, f(x) + g(y+ax)) \quad (3.1.1)$$

şeklinde parametrize edilir [19].

Böylece M nin birinci temel formunun katsayıları;

$$E = \langle r_x, r_x \rangle = 1 + (f' + ag')^2,$$

$$F = \langle r_x, r_y \rangle = g'(f' + ag'),$$

$$G = \langle r_y, r_y \rangle = 1 + g'^2,$$

bulunur. Burada $v = y + ax$ için $f' = \frac{df(x)}{dx}$ ve $g' = \frac{dg(v)}{dv} = \frac{dg(y+ax)}{d(y+ax)}$ dir. Ayrıca,

$$I = Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2$$

olmak üzere, birinci temel form;

$$I = \left[1 + (f' + ag')^2 \right] dx^2 + 2 \left[g'(f' + ag') \right] dx dy + \left[1 + g'^2 \right] dy^2$$

şeklinde elde edilir. M nin Gauss dönüşümü olarak adlandırılan birim normal vektör alanı,

$$n = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|} = \frac{(- (f' + ag'), -g', 1)}{\sqrt{1 + (f' + ag')^2 + g'^2}}$$

dir. Buna göre ikinci temel formun katsayıları, sırasıyla,

$$L = \langle r_{xx}, n \rangle = (f'' + a^2 g'') D^{-1} ,$$

$$M = \langle r_{xy}, n \rangle = ag'' D^{-1} ,$$

$$N = \langle r_{yy}, n \rangle = g'' D^{-1} ,$$

şeklinde olup ikinci temel form;

$$II = \left[(f'' + a^2 g'') D^{-1} \right] dx^2 + 2 \left[ag'' D^{-1} \right] dx dy + \left[g'' D^{-1} \right] dy^2$$

olarak hesaplanır. Burada $D^2 = EG - F^2 = 1 + (f' + ag')^2 + g'^2$ dir.

M nin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = f'' g'' D^{-4}, \quad (3.1.2)$$

ve

$$H = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \left[f'' (1 + g'^2) + g'' (1 + a^2 + f'^2) \right] D^{-3} , \quad (3.1.3)$$

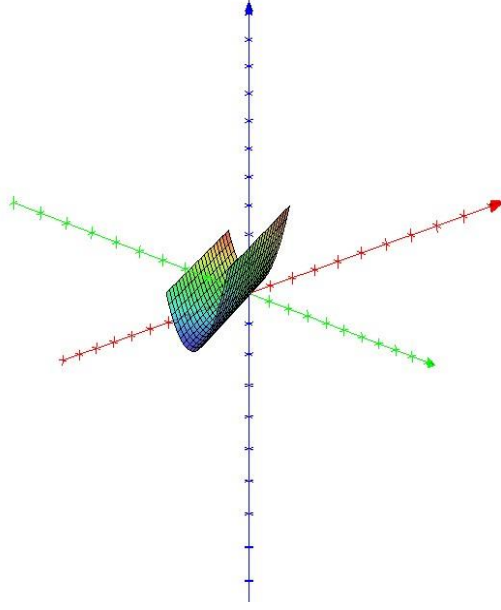
şeklinde bulunur.

NOT: (3.1.1) denklemi ile verilen afin öteleme yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart f veya g fonksiyonlarından en az birinin lineer bir fonksiyon olmasıdır.

Örnek 3.1.1. M , E^3 de aşağıdaki şekilde parametrize edilen bir afin öteleme yüzeyi olsun.

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + x + y) , \quad (x \in (-2, 1), y \in (-2, 1))$$

Burada M parabolik silindir ve flattir, (Şekil 3.1.1).



Şekil 3.1.1

Minimal afin öteleme yüzeyleri için H. Liu ve Y. Yu aşağıdaki teoremi verdiler [19].

Teorem 3.1.1. $r(x, y) = (x, y, z(x, y))$, E^3 de bir afin öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda ya $z(x, y)$ lineerdir ya da

$$z(x, y) = \frac{1}{c} \log \frac{\cos(c\sqrt{1+a^2}x)}{\sin[c(y+ax)]} \quad (3.1.4)$$

şeklinde yazılır [19].

Tanım 3.1.1. E^3 de (3.1.4) denklemi ile verilen minimal afin öteleme yüzeyi genelleştirilmiş Scherk yüzeyi veya afin Scherk yüzeyi olarak adlandırılır [19].

NOT. Eğer $a = 0$ ise (3.1.4) denklemi ile verilen minimal afin öteleme yüzeyi veya genelleştirilmiş Scherk yüzeyi,

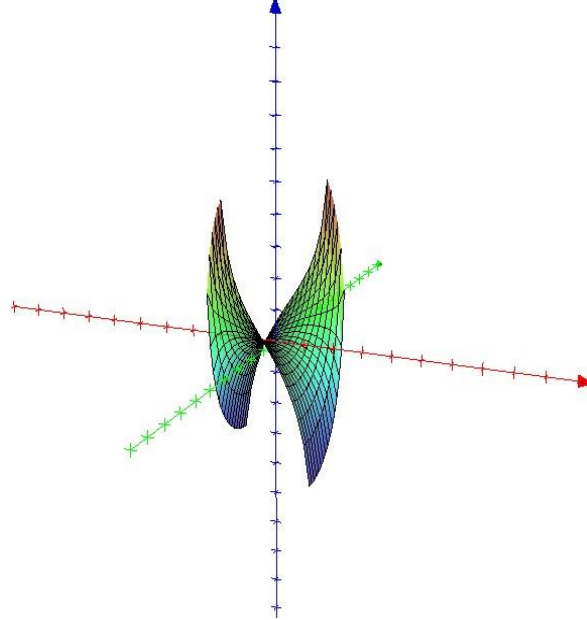
$$z(x, y) = \frac{1}{c} \log \frac{\cos cx}{\sin cy} \quad (3.1.5)$$

denkleminde ifade edilen klasik Scherk yüzeyidir.

Örnek 3.1.2. M , E^3 uzayında

$$r(x, y) = \left(x, y, 2\ln \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - 2\ln \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\right) \right), \quad (x \in (-2, 2), y \in (-2, 2)).$$

ile verilen bir afin Scherk yüzeyi olsun. Bu yüzey aşağıdaki şekilde resmedilir.



Şekil 3.1.2

3.1.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Polinomial Afin Öteleme Yüzeyleri

Tanım 3.1.2. f ve g , U da polinom şeklinde verilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$r: U \subseteq \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y + ax))$$

şeklinde parametrize edilen afin öteleme yüzeyine polinomial afin öteleme yüzeyi denir [31].

Bu kısımda, E^3 de polinomial olarak verilen sabit eğrilikli afin öteleme yüzeyleri ile ilgili bazı yokluk teoremleri ve bunlara dayalı sonuçlar verildi.

Teorem 3.1.2. E^3 de sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli polinomial afin öteleme yüzeyi yoktur.

İspat. M sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli polinomial afin öteleme yüzeyi olsun. (3.1.2) denkleminde $f''g'' \neq 0$ şeklindedir. (3.1.2) denklemi y ye göre diferensiyellenirse,

$$g'''(1+(f'+ag')^2+g'^2)-4g''^2(a(f'+ag')+g')=0 \quad (3.1.6)$$

denklemi elde edilir. f' ve g' yerine, sırasıyla, α ve β alınırsa denklem,

$$\beta''(1+(\alpha+a\beta)^2+\beta^2)-4\beta'^2(a(\alpha+a\beta)+\beta)=0 \quad (3.1.7)$$

halini alır. Kabul edelim ki α ve β polinom şeklinde verilen fonksiyonlar olsun. Yani, b_m ve c_n sıfırdan farklı sabitler iken

$$\alpha = b_m u^m + b_{m-1} u^{m-1} + \dots + b_1 u + b_0 \quad \text{ve} \quad \beta = c_n v^n + c_{n-1} v^{n-1} + \dots + c_1 v + c_0$$

şeklinde verilsin. α ve β , (3.1.7) denkleminde yerine yazıldığında, u ve v ye göre sıfıra eşit olan polinomial bir ifade elde edilir. Şimdi (3.1.7) denklemi için aşağıdaki durumları ele alalım:

Durum 1. Kabul edelim ki $m, n \geq 2$ olsun.

i. $m > n (\geq 2)$ olsun. (3.1.7) denklemi açık olarak yazılırsa,

$$\beta'' + \alpha^2 \beta'' + 2a\alpha\beta\beta'' + (1+a^2)\beta^2\beta'' - 4a\alpha(\beta')^2 + (-4-4a^2)\beta(\beta')^2 = 0 \quad (3.1.8)$$

denklemi bulunur. (3.1.8) denkleminin u ya göre en yüksek derecesi $u^{2m}v^{n-2}$ olur ki bu da (3.1.8) in $\beta'' + \alpha^2 \beta'' + 2a\alpha\beta\beta''$ kısmından elde edilir. En yüksek derecenin katsayısı $b_m^2 c_n n(n-1)$ olup b_m ve c_n sıfırdan farklı sabitler ve $m > n \geq 2$ olduğundan bu hal için (3.1.8) denklemi sıfır olamaz.

ii. Kabul edelim ki $n > m (\geq 2)$ olsun.

Yukarıda verilen 1. hal için uygulanan yöntem izlenerek (3.1.8) denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin v ye göre en yüksek derecesi v^{3n-2} olur ki bu da (3.1.8) in $2a\beta''\beta\alpha + a^2\beta''\beta^2 + \beta''\beta^2$ kısmından elde edilir. En yüksek derecenin katsayısı $(1+a^2)c_n^3 n(n-1)$ olup $c_n \neq 0$ olduğundan bu hal için de (3.1.8) denklemi sıfır olamaz.

iii. Kabul edelim ki $m = n (\geq 2)$ olsun.

Benzer yöntemle bu hal için de (3.1.8) denkleminin sıfır olmadığı gösterilebilir.

Durum 2.

i. $m > n = 1$ olsun.

Bu halde bazı c, d sabitleri ve $c \neq 0$ için $\beta = cv + d$ yazılabilir. β , (3.1.8) denkleminde yerine yazılırsa denklemde $-4a\alpha(\beta')^2 + (-4 - 4a^2)\beta(\beta')^2$ ifadesinden gelen en yüksek derece u^m olup bu da $-4ab_m c^2$ katsayısına sahiptir. Burada $b_m, c \neq 0$ olduğundan (3.1.8) denklemi sıfıra eşit olamaz.

ii. $n > m = 1$ olsun.

Benzer yöntemle bu hal için de (3.1.8) denkleminin sıfırdan farklı olduğu gösterilebilir.

Durum 3.

i. $m \geq n = 0$ (veya $n \geq m = 0$) olsun.

$f''g'' \neq 0$ olduğundan bu durum mümkün değildir.

Böylece her durumda sabit ve sıfırdan farklı Gauss eğriliğine sahip bir polinomial afin öteleme yüzeyinin mevcut olmadığı gösterilmiş olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.2 göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.1. E^3 de polinomial afin öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği sabite eşit ise bu sabit sıfırdır.

Teorem 3.1.3. E^3 de sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli polinomial bir afin öteleme yüzeyi yoktur.

İspat. Kabul edelim ki M sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli polinomial bir afin öteleme yüzeyi olsun. Böylece λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere (3.1.3) denklemini

$$\frac{\left[f''(1 + g'^2) + g''(1 + a^2 + f'^2) \right]}{\left[1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right]^{3/2}} = 2\lambda$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem y ye göre diferensiyellenirse ve $(1 + (f' + ag')^2 + g'^2) = A$ denirse, bölümün türevi kullanılarak

$$\left[2f''g'g'' + g'''(1 + a^2 + f'^2) \right] A^{3/2} - \frac{3}{2} \left[f''(1 + g'^2) + g''(1 + a^2 + f'^2) \right] A^{1/2} A' = 0$$

bulunur. Bu denklem

$$\left[2f''g'g'' + g'''(1+a^2+f'^2) \right] A - \frac{3}{2} \left[f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right] A' = 0$$

olur. $(1+(f'+ag')^2+g'^2) = A$ değeri yerine yazılırsa denklem

$$\begin{aligned} & \left[2f''g'g'' + g'''(1+a^2+f'^2) \right] \left[(1+(f'+ag')^2+g'^2) \right] \\ & - \frac{3}{2} \left[\left(f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right) \right] \left[(2(f'+ag')ag'' + 2g'g'') \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

halini alır. f' ve g' yerine, sırasıyla, α ve β alınırsa denklem

$$\begin{aligned} & \left[2\alpha'\beta\beta' + \beta''(1+a^2+\alpha^2) \right] \left[1+(\alpha+a\beta)^2 + \beta^2 \right] \\ & - 3 \left(\alpha'(1+\beta^2) + \beta'(1+a^2+\alpha^2) \right) \left((\alpha+a\beta)a\beta' + \beta\beta' \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem açık bir şekilde yazılacak olursa

$$\begin{aligned} & (-1-3a^2)\alpha'\beta\beta' + 2\alpha^2\alpha'\beta\beta' + a\alpha\alpha'\beta^2\beta' + (1-3a^2)\alpha'\beta^3\beta' \\ & + (1+a^2)\beta'' + (2+a^2)\alpha^2\beta'' + \alpha^4\beta'' + (2a+2a^3)\alpha\beta\beta'' + 2a\alpha^3\beta\beta'' \\ & + (2+2a^2)\beta^2\beta'' + 2\alpha^2\beta^2\beta'' - 3a\alpha\alpha'\beta' + (-3a-3a^3)\alpha\beta'^2 - 3a\alpha^3\beta'^2 \\ & + (-3-6a^2-3a^4)\beta\beta'^2 + (-3-3a^2)\alpha^2\beta\beta'^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

ifadesi elde edilir. α ve β polinom şeklinde verilen fonksiyonlar olsun. Yani, b_m ve c_n sıfırdan farklı sabitler iken

$$\alpha = b_mu^m + b_{m-1}u^{m-1} + \dots + b_1u + b_0 \quad \text{ve} \quad \beta = c_nv^n + c_{n-1}v^{n-1} + \dots + c_1v + c_0$$

şeklinde verilsinler. α ve β , (3.1.11) denkleminde yerine yazılırsa u ve v ye göre sıfıra eşit olan polinomial bir ifade elde edilir.

(3.1.11) denklemi için aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 1. $m, n \geq 2$

i. $m > n (\geq 2)$ olsun.

Böylece u ya göre denklemin en yüksek derecesi $u^{4m}v^{n-2}$ dir. Bu ifade denklemin $a^2\alpha^2\beta'' + \alpha^4\beta'' + 2a\alpha\beta\beta''$ kısmından elde edilir ve $b_m^4c_nn(n-1)$ katsayısına sahiptir. Bu durumda $b_m, c_n \neq 0$ olduğundan (3.1.11) denklemi sıfıra eşit olamaz.

ii. $n > m (\geq 2)$ ve $m = n (\geq 2)$ durumlarında da benzer yöntemle (3.1.11) denkleminin sıfıra eşit olmadığı gösterilir.

Durum 2.

i. $n > m = 1$ olsun.

Bu durumda b, d reel sabitler ve $b \neq 0$ olmak üzere $\alpha = bu + d$ yazılabilir. Eğer bu şekilde ifade edilen α fonksiyonu (3.1.11) denkleminde yerine yazılırsa denklemin en yüksek derecesi v^{4n-1} olur ki bu da denklemde $4\alpha'\beta^3\beta' - 3a^2\alpha'\beta^3\beta' - 3\alpha'\beta^3\beta'$ ifadesinden elde edilir ve en yüksek bu derecenin katsayısı $(1-3a^2)nb c_n^4$ şeklindedir. $b, c_n \neq 0$ olduğundan (3.1.11) denklemini sıfırdan farklıdır.

ii. $m > n = 1$ olsun.

Bu durum için yukarıdakine benzer bir yöntem kullanılarak (3.1.11) denkleminin sıfırdan farklı olduğu elde edilir.

Durum 3.

i. $m \geq n = 0$ olsun.

Bu durumda β bir sabit olur ve (3.1.11) denklemini sağlar. Fakat (3.1.3) denkleminde β sabit olarak ele alınırsa o zaman α bir polinom olmaz. Dolayısıyla bu baştaki kabulümüz ile çelişir. Yani, bu durum için de (3.1.11) denklemini sağlanmaz.

ii. $n \geq m = 0$ olsun.

Bu durumda α ($\alpha = b$) bir sabit olarak ele alınıp (3.1.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (1 + a^2 + 2b^2 + a^2b^2 + b^4)\beta'' + (2ab + 2a^3b + 2ab^3)\beta\beta'' \\ & + (2 + 2a^2 + 2b^2)\beta^2\beta'' + (-3ab - 3a^3b - 3ab^3)\beta'^2 \\ & + (-3 - 6a^2 - 3a^4 - 3b^2 - 3a^2b^2)\beta\beta'^2 = 0 \end{aligned}$$

denklemini bulunur. 1. ve 2. durumda izlenen yöntem burada göz önüne alınırsa bu durum için de (3.1.11) denklemini sıfıra eşit olmaz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

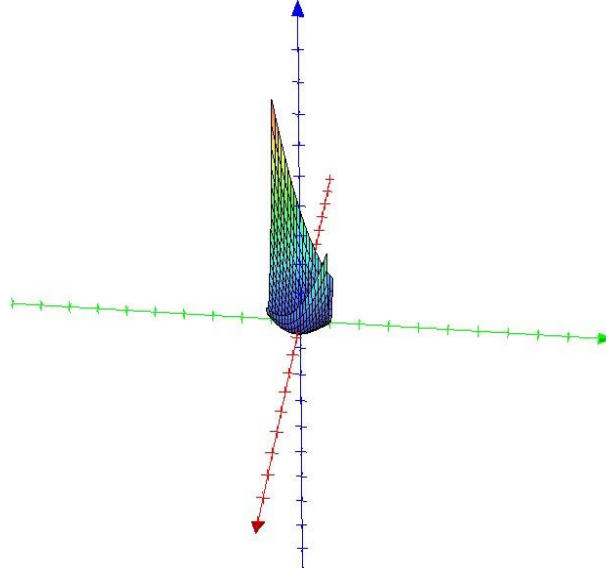
Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.2. E^3 de polinomial afin öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği sabite eşit ise bu sabit sıfırdır.

Örnek 3.1.3. M, E^3 de

$$r(x, y, x^4 + (x+y)^2 - x - y), (x \in (-1, 1), y \in (-1, 1)).$$

şeklinde parametrelendirilen bir polinomial afin öteleme yüzeyi olsun. Bu yüzey şekil 3.1.3 deki gibidir.



Şekil 3.1.3

Ek bir uygulama olarak α ve β fonksiyonlarını üstel formda verilen fonksiyonlar olarak ele alalım. Yani c_1 ve c_2 reel sayılar ve $c_1, c_2 \neq 0$ iken

$$\alpha = c_1 e^u \text{ ve } \beta = c_2 e^v$$

şeklinde verilsin. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.1.3. E^3 de sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli üstel formda bir afin öteleme yüzeyi yoktur.

İspat. α ve β değerleri (3.1.8) de yerine yazılırsa

$$c_2 e^v + c_1^2 c_2 e^v e^{2u} + 2ac_1 c_2^2 e^{2v} e^u + (-2 - 3a^2) c_2^3 e^{3v} = 0$$

bulunur. Elde edilen bu ifadenin sıfıra eşit olması için c_1 ve c_2 sabitlerinin sıfır olması gerektiği gösterilebilir. Bu ise baştaki kabulümüz ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.4. E^3 de sabit ortalama eğrilikli üstel formda bir afin öteleme yüzeyi yoktur.

İspat. α ve β üstel formda verilen fonksiyonlar olsun. Bu durum (3.1.11) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \left[2c_1c_2^2e^ue^{2v} + c_2e^v(1+a^2+c_1^2e^{2u}) \right] \left[1 + (c_1e^u + ac_2e^v)^2 + c_2^2e^{2v} \right] \\ & - 3(c_1e^u(1+c_2^2e^{2v}) + c_2e^v(1+a^2+c_1^2e^{2u}))((c_1e^u + ac_2e^v)ac_2e^v + c_2^2e^{2v}) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenendir.

3.1.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Afin Öteleme Yüzeyinin Paralel Yüzeyleri

M bir afin öteleme yüzeyi olsun, M^t de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Bu durumda M^t yüzeyi

$$r^t(u, v) = r(u, v) + tn(u, v)$$

şeklinde parametrize edilir. Bu yüzeyin birinci ve ikinci temel formu, sırasıyla,

$$\begin{aligned} I^t &= \langle dr^t, dr^t \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial r^t}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial r^t}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial v}, \frac{\partial r^t}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \\ &= E^t (du)^2 + 2F^t dudv + G^t (dv)^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} II^t &= \langle dr^t, dn \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial v}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \\ &= L^t (du)^2 + 2M^t dudv + N^t (dv)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan M^t paralel yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E^t &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial r^t}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(r+tn)}{\partial u}, \frac{\partial(r+tn)}{\partial u} \right\rangle \\ &= \langle r_u + tn_u, r_u + tn_u \rangle, \\ &= \langle r_u, r_u \rangle + 2t \langle r_u, n_u \rangle + t^2 \langle n_u, n_u \rangle \\ &= E + 2tL + t^2 \langle n_u, n_u \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^t &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial r^t}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(r+tn)}{\partial u}, \frac{\partial(r+tn)}{\partial v} \right\rangle \\
&= \langle r_u + tn_u, r_v + tn_v \rangle, \\
&= \langle r_u, r_v \rangle + t \langle r_u, n_v \rangle + t \langle r_v, n_u \rangle + t^2 \langle n_u, n_v \rangle \\
&= F + 2tM + t^2 \langle n_u, n_v \rangle \\
G^t &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial v}, \frac{\partial r^t}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(r+tn)}{\partial v}, \frac{\partial(r+tn)}{\partial v} \right\rangle \\
&= \langle r_v + tn_v, r_v + tn_v \rangle, \\
&= \langle r_v, r_v \rangle + 2t \langle r_v, n_v \rangle + t^2 \langle n_v, n_v \rangle \\
&= G + 2tN + t^2 \langle n_v, n_v \rangle
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca M^t paralel yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları ise

$$\begin{aligned}
L^t &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(r+tn)}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial u} \right\rangle \\
&= \langle r_u + tn_u, n_u \rangle, \\
&= \langle r_u, n_u \rangle + t \langle n_u, n_u \rangle \\
&= L + t \langle n_u, n_u \rangle \\
M^t &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(r+tn)}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\rangle \\
&= \langle r_u + tn_u, n_v \rangle, \\
&= \langle r_u, n_v \rangle + t \langle n_u, n_v \rangle \\
&= M + t \langle n_u, n_v \rangle \\
N^t &= \left\langle \frac{\partial r^t}{\partial v}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(r+tn)}{\partial v}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\rangle \\
&= \langle r_v + tn_v, n_v \rangle, \\
&= \langle r_v, n_v \rangle + t \langle n_v, n_v \rangle \\
&= N + t \langle n_v, n_v \rangle
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 3.1.4. M bir afin öteleme yüzeyi olsun, M^t de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. M^t yüzeyinin birinci ve ikinci temel formu, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
I^t = & \left[\begin{aligned} & \left(1 + (f' + ag')^2 \right) + 2t(f'' + a^2 g'') D^{-1} \\ & + t^2 \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'') D + (f' + ag') D' D^{-1}]^2 + [-g'' D + g' D' D^{-1}]^2 + [-D' D^{-1}]^2}{D^4} \right) \end{aligned} \right] (du)^2 \\
& + 2 \left[\begin{aligned} & g'(f' + ag') + 2tag'' D^{-1} \\ & + t^2 \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'') D + (f' + ag') D' D^{-1}][-ag'' D + (f' + ag') D' D^{-1}]}{D^4} \right) \\ & + t^2 \left(\frac{[-g'' D + g' D' D^{-1}]^2 + [-D' D^{-1}]^2}{D^4} \right) \end{aligned} \right] dudv \\
& + \left[\begin{aligned} & (1 + g'^2) + 2tg'' D^{-1} \\ & + t^2 \left(\frac{[-ag'' D + (f' + ag') D' D^{-1}]^2 + [-g'' D + g' D' D^{-1}]^2 + [-D' D^{-1}]^2}{D^4} \right) \end{aligned} \right] (dv)^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
II^t = & \left[\begin{aligned} & (f'' + a^2 g'') D^{-1} \\ & + t \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'') D + (f' + ag') D' D^{-1}]^2 + [-g'' D + g' D' D^{-1}]^2 + [-D' D^{-1}]^2}{D^4} \right) \end{aligned} \right] (du)^2 \\
& + 2 \left[\begin{aligned} & ag'' D^{-1} \\ & + t \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'') D + (f' + ag') D' D^{-1}][-ag'' D + (f' + ag') D' D^{-1}]}{D^4} \right) \\ & + t \left(\frac{[-g'' D + g' D' D^{-1}]^2 + [-D' D^{-1}]^2}{D^4} \right) \end{aligned} \right] dudv \\
& + \left[\begin{aligned} & g'' D^{-1} \\ & + t \left(\frac{[-ag'' D + (f' + ag') D' D^{-1}]^2 + [-g'' D + g' D' D^{-1}]^2 + [-D' D^{-1}]^2}{D^4} \right) \end{aligned} \right] (dv)^2
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. M bir afin öteleme yüzeyi olsun, M^t de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. M^t yüzeyinin birinci temel formu

$$I^t = E^t (du)^2 + 2F^t dudv + G^t (dv)^2 \quad (3.1.12)$$

dir. Burada E^t, F^t ve G^t , I. temel formun katsayılarıdır. Şimdi bu katsayıları hesaplayalım:

Bir M afin öteleme yüzeyinin n birim normal vektör alanı

$$n = \frac{(-(f' + ag'), -g', 1)}{\sqrt{1 + (f' + ag')^2 + g'^2}}$$

şeklindedir. Ayrıca $D^2 = EG - F^2 = 1 + (f' + ag')^2 + g'^2$ olmak üzere

$$n_u = \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'')D + (f' + ag')D'D^{-1}], [-g''D + g'D'D^{-1}], [-D'D^{-1}]}{D^2} \right)$$

ve

$$n_v = \left(\frac{[-ag''D + (f' + ag')D'D^{-1}], [-g''D + g'D'D^{-1}], [-D'D^{-1}]}{D^2} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla E^t, F^t ve G^t katsayıları, sırasıyla,

$$E^t = \left(1 + (f' + ag')^2 \right) + 2t(f'' + a^2 g'')D^{-1} + t^2 \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'')D + (f' + ag')D'D^{-1}]^2 + [-g''D + g'D'D^{-1}]^2 + [-D'D^{-1}]^2}{D^4} \right),$$

$$F^t = g'(f' + ag') + 2tag''D^{-1} + t^2 \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'')D + (f' + ag')D'D^{-1}][-ag''D + (f' + ag')D'D^{-1}]}{D^4} \right),$$

$$+ t^2 \left(\frac{[-g''D + g'D'D^{-1}]^2 + [-D'D^{-1}]^2}{D^4} \right)$$

$$G^t = (1 + g'^2) + 2tg''D^{-1} + t^2 \left(\frac{[-ag''D + (f' + ag')D'D^{-1}]^2 + [-g''D + g'D'D^{-1}]^2 + [-D'D^{-1}]^2}{D^4} \right),$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.1.12) de yerine yazılırsa M^t yüzeyinin birinci temel formu elde edilir. M^t yüzeyinin ikinci temel formu

$$II^t = L^t (du)^2 + 2M^t dudv + N^t (dv)^2 \quad (3.1.13)$$

dir. Burada L^t, M^t ve N^t , II. temel formun katsayılarıdır. Bu katsayılar, sırasıyla,:

$$L^t = (f'' + a^2 g'')D^{-1} + t \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'')D + (f' + ag')D'D^{-1}]^2 + [-g''D + g'D'D^{-1}]^2 + [-D'D^{-1}]^2}{D^4} \right),$$

$$M^t = ag''D^{-1} + t \left(\frac{[-(f'' + a^2 g'')D + (f' + ag')D'D^{-1}][-ag''D + (f' + ag')D'D^{-1}]}{D^4} \right) + t \left(\frac{[-g''D + g'D'D^{-1}]^2 + [-D'D^{-1}]^2}{D^4} \right)$$

$$N^t = g''D^{-1} + t \left(\frac{[-ag''D + (f' + ag')D'D^{-1}]^2 + [-g''D + g'D'D^{-1}]^2 + [-D'D^{-1}]^2}{D^4} \right),$$

dir. L^t, M^t ve N^t değerleri (3.1.13) de yerine yazılırsa M^t yüzeyinin ikinci temel formu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Bir M afin öteleme yüzeyinin temel formları ile bunun M^t paralel yüzeyinin birinci temel formu arasında

$$\begin{aligned} I^t &= \langle dr^t, dr^t \rangle \\ &= \langle d(r + tn), d(r + tn) \rangle \\ &= \langle r_u du + t n_u du + r_v dv + t n_v dv, r_u du + t n_u du + r_v dv + t n_v dv \rangle \\ &= \langle r_u, r_u \rangle du^2 + 2t \langle r_u, n_u \rangle du^2 + 2 \langle r_u, r_v \rangle dudv + 2t \langle r_u, n_v \rangle dudv \\ &\quad + 2t \langle r_v, n_u \rangle dudv + t^2 \langle n_u, n_u \rangle du^2 + 2t^2 \langle n_u, n_v \rangle dudv + \langle r_v, r_v \rangle dv^2 \\ &\quad + 2t \langle r_v, n_v \rangle dv^2 + t^2 \langle n_v, n_v \rangle dv^2 \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Bu değerler (2.1.3) de göz önüne alınırsa,

$$I^t = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 + 2t(Ldu^2 + 2tMdudv + Ndv^2) \\ + t^2 \langle n_u, n_u \rangle du^2 + 2t^2 \langle n_u, n_v \rangle dudv + t^2 \langle n_v, n_v \rangle dv^2$$

olur. Buradan da

$$I^t = I + 2tII + t^2III$$

elde edilir.

M^t paralel yüzeyinin ikinci temel formu için ise benzer bağıntı;

$$II^t = \langle dr^t, dn \rangle \\ = \langle d(r + tn), dn \rangle \\ = \langle r_u du + t n_u du + r_v dv + t n_v dv, n_u du + n_v dv \rangle \\ = \langle r_u, n_u \rangle du^2 + \langle r_u, n_v \rangle dudv + t \langle n_u, n_u \rangle du^2 + t \langle n_u, n_v \rangle dudv \\ + \langle r_v, n_u \rangle dudv + \langle r_v, n_v \rangle dv^2 + t \langle n_u, n_v \rangle dudv + t \langle n_v, n_v \rangle dv^2$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$II^t = II + tIII$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5. Bir M yüzeyinin bir paralel yüzeyi M^t olsun. $P \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, K ve H olsun. $f(P) \in M^t$ noktasında M^t nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K^t ve H^t olsun. O zaman

$$K^t = \frac{K}{(1 + tH + t^2K)} \quad (3.1.14)$$

ve

$$H^t = \frac{H + 2tK}{(1 + tH + t^2K)} \quad (3.1.15)$$

dir [13].

Böylece teorem 3.1.5 kullanılarak bir M afin öteleme yüzeyinin M^t paralel yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.6. M bir afin öteleme yüzeyi olsun, M^t de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Bu durumda M^t yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K^t = \frac{f''g''D^{-4}}{\left(1+t\left[\frac{1}{2}\left[f''(1+g'^2)+g''(1+a^2+f'^2)\right]D^{-3}\right]+t^2f''g''D^{-4}\right)} \quad (3.1.16)$$

ve

$$H^t = \frac{\left(\left[f''(1+g'^2)+g''(1+a^2+f'^2)\right]D^{-3}\right)+4tf''g''D^{-4}}{\left(2+t\left(\left[f''(1+g'^2)+g''(1+a^2+f'^2)\right]D^{-3}\right)+2t^2f''g''D^{-4}\right)} \quad (3.1.17)$$

dir.

İspat. M bir afin öteleme yüzeyi olsun, M^t de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. (3.1.14) ve (3.1.15) den M^t yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K^t = \frac{K}{(1+tH+t^2K)} \quad \text{ve} \quad H^t = \frac{H+2tK}{(1+tH+t^2K)}$$

şeklindedir. M afin öteleme yüzeyi için elde edilen Gauss ve ortalama eğriliği (3.1.14) ve (3.1.15) de yerine yazılırsa,

$$K^t = \frac{f''g''D^{-4}}{\left(1+t\left[\frac{1}{2}\left[f''(1+g'^2)+g''(1+a^2+f'^2)\right]D^{-3}\right]+t^2f''g''D^{-4}\right)}$$

ve

$$H^t = \frac{\left(\left[f''(1+g'^2)+g''(1+a^2+f'^2)\right]D^{-3}\right)+4tf''g''D^{-4}}{\left(2+t\left(\left[f''(1+g'^2)+g''(1+a^2+f'^2)\right]D^{-3}\right)+2t^2f''g''D^{-4}\right)}$$

elde edilir.

NOT. (3.1.1) denklemi ile verilen bir afin öteleme yüzeyinin M^t paralel yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart f veya g fonksiyonlarından en az birinin lineer bir fonksiyon olmasıdır.

3.2. 3-Boyutlu Hiperbolik Uzayda Afin Öteleme Yüzeyleri

Bu bölümde 3-boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$ de afin öteleme yüzeyleri için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik elde edildi. Ayrıca minimal polinomial afin öteleme yüzeyleri incelendi ve $\mathbb{H}^3$ de bir polinomial afin öteleme yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şartın bu yüzeyin iki değişkenli bir lineer fonksiyonun grafik yüzeyi olması gerektiği gösterildi. Üstelik $\mathbb{H}^3$ de polinomial minimal afin öteleme yüzeylerinin total geodezik olmayan düzlemler olduğu elde edildi.

3-boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$ ün yarı-uzay modelinde bir öteleme yüzeyi

$$r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)) \quad (\text{I. Tip})$$

veya

$$r(x, z) = (x, f(x) + g(z), z) \quad (\text{II. Tip})$$

şeklinde verilen bir grafik yüzeyidir.

Ayrıca H Öklid ortalama eğrilik ve H_h hiperbolik ortalama eğrilik olmak üzere

$$H_h(x, y, z) = zH(x, y, z) + n_3(x, y, z) \quad (3.2.1)$$

bağıntısı vardır [17].

$\mathbb{H}^3$ de I. tip ve II. tip ile verilen bir öteleme yüzeylerini ele alalım. Lopez makalesinde $\mathbb{H}^3$ de bu iki tip için minimal olma durumunu incelemiş ve aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır [17].

Teorem 3.2.1. $\mathbb{H}^3$ de I. tip ile verilen bir öteleme yüzeyinin minimal yüzeyi yoktur [17].

Teorem 3.2.2. $\mathbb{H}^3$ de II. tip ile verilen bir M öteleme yüzeyinin minimal yüzeyi total geodezik düzlemlerdir [17].

$\mathbb{H}^3$ de yarı-uzay modeli için κ_i^h hiperbolik asli eğrilikler olmak üzere κ_i^h asli eğrilikleri ile κ_i Öklid asli eğrilikleri arasındaki bağıntı (2.2.7) denkleminde

$$\kappa_i^h = z\kappa_i + n_3$$

şeklindedir. Burada n_3 , $n = (n_1, n_2, n_3)$ birim normal vektörünün üçüncü bileşenidir. M nin hiperbolik Gauss eğriliği K_h ile verilsin. Bu durumda $K_h = \kappa_1^h \kappa_2^h - 1$ şeklinde hesaplanır. (2.2.7) den

$$\kappa_1^h = z\kappa_1 + n_3 \quad \text{ve} \quad \kappa_2^h = z\kappa_2 + n_3$$

olur. Buradan

$$\kappa_1^h \kappa_2^h = (z\kappa_1 + n_3)(z\kappa_2 + n_3) = z^2(\kappa_1 \kappa_2) + zn_3(\kappa_1 + \kappa_2) + n_3^2$$

bulunur. Yani verilen bu model için K_h hiperbolik Gauss eğriliği, bu yüzeyin Öklid anlamındaki Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla, K ve H olmak üzere

$$K_h = \kappa_1^h \kappa_2^h - 1 = z^2(K) + zn_3(H) + n_3^2 - 1 \quad (3.2.2)$$

olarak elde edilir.

Yarı-uzay modelinde bir M afin öteleme yüzeyi için (3.2.2) denklemi göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.2.1. $\mathbb{H}^3$ de bir M afin öteleme yüzeyi için K_h hiperbolik Gauss eğriliği

$$K_h = \frac{1}{2} \left[2(f+g)^2 (f''g''D^{-4}) + (f+g) \left([f''(1+g'^2) + g''(1+a^2 + f'^2)] \right) D^{-7/2} + 2D^{-1} - 2 \right]$$

dir.

İspat. (3.2.2) de (3.1.2) ve (3.1.3) göz önüne alınırsa istenilen elde edilir.

M polinomial bir afin öteleme yüzeyi olsun. Yani, b_m ve c_n sıfırdan farklı sabitler iken f ve g

$$f = b_m u^m + b_{m-1} u^{m-1} + \dots + b_1 u + b_0 \quad \text{ve} \quad g = c_n v^n + c_{n-1} v^{n-1} + \dots + c_1 v + c_0$$

şeklinde verilsin. $\mathbb{H}^3$ de $z(x, y) = f(x) + g(y + ax)$ nin grafik yüzeyi olarak verilen bir M polinomial afin öteleme yüzeyi için (3.2.1) denklemi ile verilen H_h hiperbolik ortalama eğriliği ele alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3. $\mathbb{H}^3$ de polinomial şeklinde verilen bir M afin öteleme yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart $z(x, y)$ nin lineer, yani f ve g nin lineer fonksiyonlar olmasıdır.

İspat. M , $\mathbb{H}^3$ de polinomial bir afin öteleme yüzeyi olsun. Böylece H ve n_3 , sırasıyla,

$$H = \frac{1}{2} \left[f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right] D^{-3} \quad \text{ve} \quad n_3 = \frac{1}{\left(1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklindedir. Bu ifadeler (3.2.1) denkleminde yerine yazılırsa M afin öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = (f+g) \frac{\left(f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right)}{\left(1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\left(1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.3)$$

olarak hesaplanır. Bu yüzeyin minimal olması için

$$(f+g) \frac{\left(f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right)}{\left(1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\left(1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

olmalıdır. Bu ifade düzenlenirse,

$$(f+g) \left(f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right) + 2 \left(1 + (f' + ag')^2 + g'^2 \right) = 0 \quad (3.2.4)$$

olur. Bunun y ye göre diferensiyeli alınırsa,

$$g' \left[f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right] + (f+g) \left[2f'g'g'' + g'''(1+a^2+f'^2) \right] + 2(2(f' + ag')ag'' + 2g'g'') = 0 \quad (3.2.5)$$

elde edilir. Bu denklem daha açık olarak yazılırsa

$$f'g' + f''g'^3 + g'g''(1+a^2+f'^2) + 2f'f'g'g'' + fg'''(1+a^2+f'^2) + 2f''gg'g'' + gg'''(1+a^2+f'^2) + 4af'g'' + 4a^2g'g'' + 4g'g'' = 0 \quad (3.2.6)$$

bulunur. Diğer taraftan kabul edelim ki $b_m, c_n \neq 0$ olmak üzere f ve g

$$f = b_mu^m + b_{m-1}u^{m-1} + \dots + b_1u + b_0 \quad \text{ve} \quad g = c_nv^n + c_{n-1}v^{n-1} + \dots + c_1v + c_0$$

şeklinde verilsin. (3.2.6) denkleminde f ve g yerine yazılırsa u ve v ye göre polinom şeklinde bir ifade elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olması için tüm katsayıların sıfıra eşit olması gerekir. Bu denklem aşağıdaki durumlar için incelenirse:

Durum 1. $m, n \geq 2$

i. Kabul edelim ki $m > n (\geq 2)$ olsun.

(3.2.6) denkleminde u ya göre en yüksek derece $u^{3m-2}v^{n-3}$ olup bu ifade denklemin $ff''^2g''' + 2f''gg'g'' + gg'''$ kısmından elde edilir. Bu ifadenin katsayısı $b_m^3c_n^2m^2n(n-1)(n-2)$ şeklindedir. $b_m, c_n \neq 0$ ve $m > n \geq 2$ olduğundan bu durum için (3.2.6) denklemi sıfıra eşit olamaz.

ii. Kabul edelim ki $n > m (\geq 2)$ veya $m = n (\geq 2)$ olsun.

Yukarıda kullanılan metot yardımı ile (3.2.6) denklemi bu durumlar için de sıfır olamaz.

Durum 2.

i. $m > n = 1$ olsun.

Bu durumda bazı c, d ve $c \neq 0$ için $g = cv + d$ yazılabilir. Bu durum denklem (3.2.6) da göz önüne alınırsa

$$f''(c^3 + c) = 0$$

elde edilir. $c \neq 0$ olduğundan $f'' = 0$, yani, f lineer bir fonksiyondur. Böylece eğer f ve g lineer fonksiyonlar ise denklem (3.2.6) sağlanır.

ii. $n > m = 1$ olsun.

Böylece bazı b, d ve $b \neq 0$ için $f = bu + d$ yazılabilir. Kabul edelim ki f lineer iken g lineer olmasın. Böylece (3.2.6) denkleminin v ye göre en yüksek derecesi v^{2n-3} olup bu (3.2.6) denkleminin $g'g''(1+a^2+f'^2) + gg'''(1+a^2+f'^2) + 4a^2g'g'' + 4g'g'''$ kısmından elde edilir ve $c_n^2n^2(n-1)(1+a^2+b^2)$ katsayısına sahiptir. $c_n \neq 0$ olup bu durum için (3.2.6) denklemi sıfıra eşit olamaz.

Durum 3.

i. $m \geq n = 0$ olsun.

Bu durumda g bir sabit olup, (3.2.6) denklemi sağlanır. Ancak g sabit iken, (3.2.4) denkleminde f bir polinom olmaz. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

ii. $n \geq m = 0$ olsun.

Bu durumda f ($f = b$) şeklinde bir sabit olarak ele alınabilir, Böylece denklem (3.2.6) yeniden yazılırsa

$$g'g''(1+a^2) + bg'''(1+a^2) + gg'''(1+a^2) + 4a^2g'g'' + 4g'g'' = 0$$

elde edilir. 1. ve 2. durum için izlenen metot bu durum için de göz önüne alınırsa $c_n \neq 0$ olduğundan yukarıdaki denklem sağlanmaz.

Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.2.2. $\mathbb{H}^3$ de minimal polinomial afin öteleme yüzeyleri total geodezik olmayan düzlemlerdir.

3.3. 3- Kürede Afin Öteleme Yüzeyleri

Bu bölümde 3-kürede invers stereografik dönüşüm kullanılarak, 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir afin öteleme yüzeyi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerine resmedildi. $\mathbb{S}^3$ de elde edilen bu yeni yüzey için ortalama eğrilik hesaplanıp minimal olma şartı incelendi.

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ bir afin öteleme yüzeyi ve $p \in M$ olsun. (X, U) da M yüzeyinin p noktasındaki parametrizasyonu olsun. Burada aşağıdaki gibi verilen $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ invers stereografik dönüşümü göz önüne alalım:

$$\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3, (u_1, u_2, u_3) \rightarrow \sigma(u_1, u_2, u_3) = \frac{(2u_1, 2u_2, 2u_3, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 1}.$$

Bu ifade

$$\sigma(u) = \frac{(2u, |u|^2 - 1)}{|u|^2 + 1}, \quad u = (u_1, u_2, u_3)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\sigma(M) \subseteq \mathbb{S}^3$ yüzeyi $\sigma(p) \in \sigma(M)$ noktasında $(\sigma \circ X, U)$ parametrizasyonu ile verilir. Burada

$$T_{\sigma(p)}\sigma(M) = \text{span}\{(\sigma \circ X)_u, (\sigma \circ X)_v\}$$

olup $|(\sigma \circ X)| = 1$, $\langle (\sigma \circ X), (\sigma \circ X)_u \rangle = \langle (\sigma \circ X), (\sigma \circ X)_v \rangle = 0$ dir. Dolayısıyla $\sigma(p)$ noktasının bir V komşuluğunda aşağıdaki şekilde verilen $\eta: V \cap \sigma(M) \rightarrow \mathbb{S}^3$ diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı mevcuttur, öyle ki

$$\left[T_{\sigma(p)}\sigma(M) \right]^\perp = \text{span}\{(\sigma \circ X), \eta\},$$

ve

$$\left[T_{\sigma(p)}\sigma(M) \right]^\perp \cap T_{\sigma(p)}\mathbb{S}^3 = \text{span}\{\eta\},$$

dir.

$\sigma(M)$ yüzeyinin, $\sigma(p)$ noktasındaki H_s ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned} H_s = & \frac{|(\sigma \circ X)_u|^2 \langle (\sigma \circ X)_{vv}, \eta \rangle - 2 \langle (\sigma \circ X)_u, (\sigma \circ X)_v \rangle \langle (\sigma \circ X)_{uv}, \eta \rangle}{2 \left(|(\sigma \circ X)_u|^2 |(\sigma \circ X)_v|^2 - \left| \langle (\sigma \circ X)_u, (\sigma \circ X)_v \rangle \right|^2 \right)} \\ & + \frac{|(\sigma \circ X)_v|^2 \langle (\sigma \circ X)_{uu}, \eta \rangle}{2 \left(|(\sigma \circ X)_u|^2 |(\sigma \circ X)_v|^2 - \left| \langle (\sigma \circ X)_u, (\sigma \circ X)_v \rangle \right|^2 \right)} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$|(\sigma \circ X)_u|^2 = \frac{4|X_u|^2}{(1+|X|^2)^2} = \frac{4E}{(1+|X|^2)^2},$$

$$\langle (\sigma \circ X)_u, (\sigma \circ X)_v \rangle = \frac{4\langle X_u, X_v \rangle}{(1+|X|^2)^2} = \frac{4F}{(1+|X|^2)^2},$$

$$|(\sigma \circ X)_v|^2 = \frac{4|X_v|^2}{(1+|X|^2)^2} = \frac{4G}{(1+|X|^2)^2},$$

$$\begin{aligned} (\sigma \circ X)_{uu} = & \frac{4}{(1+|X|^2)^2} \left(\frac{1+|X|^2}{2} X_{uu} - (|X_u|^2 + \langle X, X_{uu} \rangle) X, |X_u|^2 + \langle X, X_{uu} \rangle \right) \\ & - \frac{4\langle X, X_u \rangle}{1+|X|^2} (\sigma \circ X)_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ X)_v &= \frac{4}{(1+|X|^2)^2} \left(\frac{1+|X|^2}{2} X_v - (|X_v|^2 + \langle X, X_v \rangle) X, |X_v|^2 + \langle X, X_v \rangle \right) \\
&\quad - \frac{4\langle X, X_v \rangle}{1+|X|^2} (\sigma \circ X)_v \\
(\sigma \circ X)_{uv} &= \frac{4}{(1+|X|^2)^2} \left(\frac{1+|X|^2}{2} X_{uv} + \langle X, X_v \rangle X_u - \langle X, X_u \rangle X_v \right. \\
&\quad \left. - (\langle X_u, X_v \rangle + \langle X, X_{uv} \rangle) X, \langle X_u, X_v \rangle + \langle X, X_{uv} \rangle \right) \\
&\quad - \frac{4\langle X, X_v \rangle}{1+|X|^2} (\sigma \circ X)_u
\end{aligned}$$

bulunur. Bu hesaplamalar (3.3.1) denkleminde yerine yazılırsa ve $|\eta|=1$,

$$\langle \eta, \sigma \circ X \rangle = \langle \eta, (\sigma \circ X)_u \rangle = \langle \eta, (\sigma \circ X)_v \rangle = 0 \text{ olduğu göz önüne alınırsa}$$

$$H_S = \frac{1+|X|^2}{2} H + \langle X, n \rangle \quad (3.3.2)$$

elde edilir [14].

(3.3.2) denklemi kullanılarak 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir afin öteleme yüzeyi 3-boyutlu küre üzerine resmedildiğinde elde edilen yeni yüzeyin ortalama eğriliği aşağıdaki sonuçlarla verilebilir:

Sonuç 3.3.1. M , 3-boyutlu Öklid uzayında bir afin öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda

$$\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3, (u_1, u_2, u_3) \rightarrow \sigma(u_1, u_2, u_3) = \frac{(2u_1, 2u_2, 2u_3, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 1}$$

invers stereografik dönüşümü yardımıyla elde edilen yüzeyin ortalama eğriliği, (3.3.2) den

$$\begin{aligned}
H_S &= \frac{1+(x^2+y^2+(f+g)^2)}{4} \left[f''(1+g'^2) + g''(1+a^2+f'^2) \right] D^{-3} \\
&\quad + (-x(f'+ag') - yg' + (f+g)) D^{-1}
\end{aligned} \quad (3.3.3)$$

şeklindedir.

(3.3.2) de $H \equiv 0$ ise yani verilen afin öteleme yüzeyi minimal ise küre üzerine resmedilen yüzeyin minimal olması için $\langle X, n \rangle = 0$ olmalıdır. Bu durum için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.3.1. $M \subseteq \mathbb{R}^3$, $z(x, y) = f(x) + g(y + ax)$ nin grafik yüzeyi olarak verilen minimal bir afin öteleme yüzeyi olsun. Bu yüzey invers stereografik dönüşüm yardımıyla 3- küre üzerine resmedilirse bu yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter şart $z(x, y)$ nin lineer, yani f ve g nin lineer fonksiyonlar olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $M \subseteq \mathbb{R}^3$ minimal bir afin öteleme yüzeyi olsun. (3.3.2) denkleminde küre üzerine resmedilen yeni yüzeyin minimal olması için $\langle X, n \rangle = 0$ olmalıdır. (3.1.1) parametrizasyonu ve $n = (-(f' + ag'), -g', 1)D^{-1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\langle (x, y, f + g), (-(f' + ag'), -g', 1)D^{-1} \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece

$$(-x(f' + ag') - yg' + (f + g))D^{-1} = 0$$

olur. Denklem düzenlenirse

$$(-xf' + f) + (-(y + ax)g' + g) = 0$$

bulunur. Bu denklemde

$$(-xf' + f) = 0 \quad \text{ve} \quad (-(y + ax)g' + g) = 0$$

durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

i. $(-xf' + f) = 0$ denklemini göz önüne alalım:

$$(-xf' + f) = 0 \Rightarrow f' - \frac{1}{x}f = 0 \tag{3.3.4}$$

olur. Sabitlerin değiştirilmesi metodu kullanılırsa denklem

$$f' + p(x)f = q(x)$$

şeklinde olup bu denklemin çözümü c bir keyfi sabit iken

$$f(x) = e^{-\int p(x)dx} \left\{ e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) + c \right\}$$

bulunur. Elde edilen bu çözüm (3.3.4) de kullanılırsa

$$f(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left\{ e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot 0 + c \right\} \Rightarrow f(x) = cx$$

elde edilir.

ii. Birincisine benzer yöntemle $-(y+ax)g' + g = 0$ diferensiyel denklemi çözülürse,

$$g(x) = c(y+ax)$$

bulunur.

Böylece f ve g nin lineer olduğu gösterilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.4. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Afin Öteleme Yüzeyleri

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayı E^4 de afin öteleme yüzeyleri tanımlandı ve tanımlanan bu afin öteleme yüzeyleri için eğrilikler hesaplandı. E^4 de tanımlanan bu yüzeyin minimal olma şartı incelendi.

Tanım 3.4.1. f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y), g(x, y))$$

parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. Bu yüzeye E^4 de Monge yüzeyi adı verilir [1].

Tanım 3.4.2. f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y), g(x, y))$$

parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. Burada

$$f(x, y) = f_3(x) + g_3(y) \quad \text{ve} \quad g(x, y) = f_4(x) + g_4(y)$$

şeklinde tanımlanırsa bu yüzeye E^4 de öteleme yüzeyi adı verilir [7].

Teorem 3.4.1. M , Monge yüzeyi ile verilen diferensiyellenebilir bir yüzey olsun. Bu durumda bu yüzeyin Gauss eğriliği ve Gauss torsiyonu, sırasıyla,

$$K = \frac{C(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) - B(f_{xx}g_{yy} + g_{xx}f_{yy} - 2f_{xy}g_{xy}) + A(g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2)}{W^4} \quad (3.4.1)$$

$$K_N = \frac{E(f_{xy}g_{yy} - g_{xy}f_{yy}) - F(f_{xx}g_{yy} - g_{xx}f_{yy}) + G(f_{xx}g_{xy} - g_{xx}f_{xy})}{W^4} \quad (3.4.2)$$

dir [2].

Teorem 3.4.2. M , Monge yüzeyi ile verilen diferensiyellenebilir bir yüzey olsun.

Bu durumda bu yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{(Gf_{xx} - 2Ff_{xy} + Ef_{yy})}{2\sqrt{A}W^2} N_1 + \frac{G(Ag_{xx} - Bf_{xx}) - 2F(Ag_{xy} - Bf_{xy}) + E(Ag_{yy} - Bf_{yy})}{2\sqrt{A}W^3} N_2 \quad (3.4.3)$$

dir. Burada

$$A = 1 + (f_x)^2 + (f_y)^2 \quad (3.4.4)$$

$$B = f_x g_x + f_y g_y \quad (3.4.5)$$

$$C = 1 + (g_x)^2 + (g_y)^2 \quad (3.4.6)$$

dir [3].

Tanım 3.4.2 kullanılarak E^4 de bir afin öteleme yüzeyi

$$r(x, y) = (x, y, f_1(x) + g_1(y + a_1x), f_2(x) + g_2(y + a_2x)) \quad (3.4.7)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Buradan da

$$r_x = (1, 0, f'_1 + a_1g'_1, f'_2 + a_2g'_2) \quad \text{ve} \quad r_y = (0, 1, g'_1, g'_2)$$

olur. Böylece E , F ve G , sırasıyla,

$$E = \langle r_x, r_x \rangle = \left\langle (1, 0, f'_1 + a_1g'_1, f'_2 + a_2g'_2), (1, 0, f'_1 + a_1g'_1, f'_2 + a_2g'_2) \right\rangle \\ = 1 + (f'_1 + a_1g'_1)^2 + (f'_2 + a_2g'_2)^2$$

$$F = \langle r_x, r_y \rangle = \left\langle (1, 0, f'_1 + a_1g'_1, f'_2 + a_2g'_2), (0, 1, g'_1, g'_2) \right\rangle \\ = (f'_1 + a_1g'_1)g'_1 + (f'_2 + a_2g'_2)g'_2$$

$$G = \langle r_y, r_y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_1' \\ g_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_1' \\ g_2' \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 1 + \left(g_1'\right)^2 + \left(g_2'\right)^2$$

elde edilir. Yine (3.4.7) den

$$r_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1'' + a_1^2 g_1'' \\ f_2'' + a_2^2 g_2'' \end{pmatrix}, \quad r_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 g_1'' \\ a_2 g_2'' \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1'' \\ g_2'' \end{pmatrix}$$

bulunur. (3.4.4-6) dan A , B ve C , sırasıyla,

$$A = 1 + \left(f_1' + a_1 g_1'\right)^2 + \left(g_1'\right)^2$$

$$B = \left(f_1' + a_1 g_1'\right) \left(f_2' + a_2 g_2'\right) + g_1' g_2'$$

$$C = 1 + \left(f_2' + a_2 g_2'\right)^2 + \left(g_2'\right)^2$$

olur. N_1 ve N_2 , E^4 de bir afin öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanları olmak üzere,

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(-\left(f_1' + a_1 g_1'\right), -g_1', 1, 0 \right),$$

$$N_2 = \frac{1}{W\sqrt{A}} \left(B\left(f_1' + a_1 g_1'\right) - A\left(f_2' + a_2 g_2'\right), B\left(g_1'\right) - A\left(g_2'\right), -B, A \right),$$

şeklinde elde edilir. (3.4.3) den E^4 de bir afin öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1}{2W^2\sqrt{A}} \left(\left(f_1'' + a_1^2 g_1'' \right) \left(1 + g_1'^2 + g_2'^2 \right) + g_1'' \left(1 + \left(f_1' + a_1 g_1' \right)^2 + \left(f_2' + a_2 g_2' \right)^2 \right) \right) N_1$$

$$- \frac{1}{2W^2\sqrt{A}} \left(2a_1 g_1'' \left(\left(f_1' + a_1 g_1' \right) g_1' + \left(f_2' + a_2 g_2' \right) g_2' \right) \right) N_1$$

$$+ \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(\left[-B\left(f_1'' + a_1^2 g_1''\right) + A\left(f_2'' + a_2^2 g_2''\right) \right] \left(1 + g_1'^2 + g_2'^2 \right) \right) N_2 \quad (3.4.8)$$

$$+ \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(\left[-B g_1'' + A g_2'' \right] \left(1 + \left(f_1' + a_1 g_1' \right)^2 + \left(f_2' + a_2 g_2' \right)^2 \right) \right) N_2$$

$$- \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(2 \left[-B\left(a_1 g_1''\right) + A\left(a_2 g_2''\right) \right] \left(\left(f_1' + a_1 g_1' \right) g_1' + \left(f_2' + a_2 g_2' \right) g_2' \right) \right) N_2$$

bulunur. (3.4.1) den E^4 de bir afin öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K = & \frac{C \left[\left(f_1'' + a_1^2 g_1'' \right) g_1'' - a_1^2 g_1''^2 \right]}{W^4} \\
& - \frac{B \left[\left(f_1'' + a_1^2 g_1'' \right) g_2'' + \left(f_2'' + a_2^2 g_2'' \right) g_1'' - 2a_1 a_2 g_1'' g_2'' \right]}{W^4} \\
& + \frac{A \left[\left(f_2'' + a_2^2 g_2'' \right) g_2'' - a_2^2 g_2''^2 \right]}{W^4}
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

şeklindedir.

E^4 de verilen bir afin öteleme yüzeyinin minimal olma durumunu inceleyelim:

Kabul edelim ki M , E^4 de bir afin öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2W^2\sqrt{A}} \left(\left(f_1'' + a_1^2 g_1'' \right) \left(1 + g_1'^2 + g_2'^2 \right) + g_1'' \left(1 + \left(f_1' + a_1 g_1' \right)^2 + \left(f_2' + a_2 g_2' \right)^2 \right) \right) N_1 \\
& - \frac{1}{2W^2\sqrt{A}} \left(2a_1 g_1'' \left(\left(f_1' + a_1 g_1' \right) g_1' + \left(f_2' + a_2 g_2' \right) g_2' \right) \right) N_1 \\
& + \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(\left[-B \left(f_1'' + a_1^2 g_1'' \right) + A \left(f_2'' + a_2^2 g_2'' \right) \right] \left(1 + g_1'^2 + g_2'^2 \right) \right) N_2 \\
& + \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(\left[-B g_1'' + A g_2'' \right] \left(1 + \left(f_1' + a_1 g_1' \right)^2 + \left(f_2' + a_2 g_2' \right)^2 \right) \right) N_2 \\
& - \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(2 \left[-B \left(a_1 g_1'' \right) + A \left(a_2 g_2'' \right) \right] \left(\left(f_1' + a_1 g_1' \right) g_1' + \left(f_2' + a_2 g_2' \right) g_2' \right) \right) N_2
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu yüzeyin minimal olması için ortalama eğriliğinin sıfır olması gerekir. Dolayısıyla yukarıdaki denklemde N_1 ve N_2 ile çarpılan ifadelerin ayrı ayrı sıfıra eşit olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2W^2\sqrt{A}} \left(\left(f_1'' + a_1^2 g_1'' \right) \left(1 + g_1'^2 + g_2'^2 \right) + g_1'' \left(1 + \left(f_1' + a_1 g_1' \right)^2 + \left(f_2' + a_2 g_2' \right)^2 \right) \right) N_1 \\
& - \frac{1}{2W^2\sqrt{A}} \left(2a_1 g_1'' \left(\left(f_1' + a_1 g_1' \right) g_1' + \left(f_2' + a_2 g_2' \right) g_2' \right) \right) N_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(\left[-B(f_1'' + a_1^2 g_1'') + A(f_2'' + a_2^2 g_2'') \right] (1 + g_1'^2 + g_2'^2) \right) N_2 \\
& + \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(\left[-Bg_1'' + Ag_2'' \right] \left(1 + (f_1' + a_1 g_1')^2 + (f_2' + a_2 g_2')^2 \right) \right) N_2 \\
& - \frac{1}{2W^3\sqrt{A}} \left(2 \left[-B(a_1 g_1'') + A(a_2 g_2'') \right] \left((f_1' + a_1 g_1') g_1' + (f_2' + a_2 g_2') g_2' \right) \right) N_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

olur. (3.4.10) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left((f_1'' + a_1^2 g_1'') (1 + g_1'^2 + g_2'^2) + g_1'' \left(1 + (f_1' + a_1 g_1')^2 + (f_2' + a_2 g_2')^2 \right) \right) \\
& - \left(2a_1 g_1'' \left((f_1' + a_1 g_1') g_1' + (f_2' + a_2 g_2') g_2' \right) \right) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& f_1'' + f_1'' g_1'^2 + f_1'' g_2'^2 + a_1^2 g_1'' + a_1^2 g_1'' g_2'^2 + f_1'^2 g_1'' + f_1'^2 g_1'' + g_1'' \\
& + a_2^2 g_1'' g_2'^2 - 2a_1 a_2 g_1'' g_2'^2 + 2a_2 f_2' g_1'' g_2' - 2a_1 f_2' g_1'' g_2' = 0
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

bulunur. Bu denklem için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1.

Kabul edelim ki f_1 ve g_1 sabit olsun. Bu durumda (3.4.12) denklemi sağlanır.

Benzer şekilde (3.4.11) denkleminde f_1 ve g_1 in sabit olması göz önüne alınırsa

$$\left((f_2'' + a_2^2 g_2'') (1 + g_2'^2) \right) + \left(g_2'' \left(1 + (f_2' + a_2 g_2')^2 \right) \right) - \left(2(a_2 g_2'') \left((f_2' + a_2 g_2') g_2' \right) \right) = 0$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f_2'' + f_2'' g_2'^2 + a_2^2 g_2'' + g_2'' + f_2'^2 g_2'' = 0 \tag{3.4.13}$$

olur.

i) Kabul edelim ki (3.4.13) de g_2 sabit olsun. Bu durumda $f_2'' = 0$ olup f_2 lineer bir fonksiyon iken denklem sağlanır.

ii) Kabul edelim ki (3.4.13) de f_2 sabit olsun. Bu durumda denklem $g_2'' (1 + a_2^2) = 0$ halini alır, yani g_2 lineerdir.

Durum 2.

$v = y + ax$ olmak üzere n ve c sıfırdan farklı sabitler iken $g_1 = nv + c$ şeklinde bir polinom olsun. Bu durumda (3.4.12) denklemi

$$f_1''(1 + n^2 + g_2'^2) = 0$$

olur. Böylece ya $m, d \neq 0$ iken $f_1 = mu + d$ olur ya da c_1 sabit iken $g_2 = \sqrt{-1 - n^2}v + c_1$ dir.

i) $g_1 = nv + c$ iken $f_1 = mu + d$ olsun. Bu ifadeler (3.4.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left((1 + (m + a_1n)^2 + n^2) (f_2'' + a_2^2 g_2'') (1 + n^2 + g_2'^2) \right) \\ & + \left(\left[(1 + (m + a_1n)^2 + n^2) g_2'' \right] \left(1 + (m + a_1n)^2 + (f_2' + a_2 g_2')^2 \right) \right) \\ & - \left(2 \left[(1 + (m + a_1n)^2 + n^2) (a_2 g_2'') \right] \left((m + a_1n)n + (f_2' + a_2 g_2') g_2' \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem için g_2 sabit ise $((1 + (m + a_1n)^2 + n^2) (1 + n^2) f_2'') = 0$ olur.

$m, n, a_1 \neq 0$ olduğundan $f_2'' = 0$ olup f_2 lineerdir.

ii) $g_1 = nv + c$ iken $g_2 = \sqrt{-1 - n^2}v + c_1$ olsun. Bu durumda (3.4.11) denklemi sıfır olur.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.4.1. Kabul edelim ki M, E^4 de (3.4.7) ile verilen bir afin öteleme yüzeyi olsun. Bu yüzey aşağıdaki her bir durum için minimaldir,

- i. f_1, g_1, g_2 sabit ve f_2 lineerdir,
- ii. f_1, f_2, g_1 sabit ve g_2 lineerdir,
- iii. f_1, f_2, g_1 lineer ve g_2 sabittir,
- iv. g_1 lineer ve $g_2 = \sqrt{-1 - n^2}v + c_1$ dir.

Kabul edelim ki M, E^4 de bir afin öteleme yüzeyi olsun. O zaman M yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_1 = \frac{c_{11}^1 c_{22}^1 - c_{12}^1}{W^2} \quad \text{ve} \quad K_2 = \frac{c_{11}^2 c_{22}^2 - c_{12}^2}{W^2}$$

olmak üzere

$$K = K_1 + K_2$$

şeklindedir. Burada K_1 ve K_2 yüzeyin Gauss eğrilikleri ve c_{ij} ler ikinci temel form katsayılarıdır. Dolayısıyla

$$K_1 = \frac{(f_1'' + a_1^2 g_1'') g_1'' - a_1^2 g_1''^2}{W^2 A} = \frac{f_1'' g_1''}{W^2 A}$$

ve

$$K_2 = \frac{\left[-B(f_1'' + a_1^2 g_1'') + A(f_2'' + a_2^2 g_2'') \right] (-B g_1'' + A g_2'') - (-B a_1 g_1'' + A a_2 g_2'')^2}{W^4 A}$$

olmak üzere

$$K = \frac{f_1'' g_1''}{W^2 A} + \frac{\left[-B(f_1'' + a_1^2 g_1'') + A(f_2'' + a_2^2 g_2'') \right] (-B g_1'' + A g_2'') - (-B a_1 g_1'' + A a_2 g_2'')^2}{W^4 A}$$

olarak hesaplanır. Göz önüne alınan M yüzeyinin flat olması için $K \equiv 0$ olmalıdır. O zaman

$$\frac{f_1'' g_1''}{W^2 A} + \frac{\left[-B(f_1'' + a_1^2 g_1'') + A(f_2'' + a_2^2 g_2'') \right] (-B g_1'' + A g_2'') - (-B a_1 g_1'' + A a_2 g_2'')^2}{W^4 A} = 0$$

olur. Yukarıdaki denklemin her teriminin ayrı ayrı sıfıra eşit olduğu düşünülürse, yani

$$\frac{f_1'' g_1''}{W^2 A} = 0 \quad (3.4.14)$$

ve

$$\frac{\left[-B(f_1'' + a_1^2 g_1'') + A(f_2'' + a_2^2 g_2'') \right] (-B g_1'' + A g_2'') - (-B a_1 g_1'' + A a_2 g_2'')^2}{W^4 A} = 0 \quad (3.4.15)$$

dir. İlk olarak (3.4.14) denklemini göz önüne alınırsa f_1 ya da g_1 den en az birinin lineer olması gerektiği görülür. Şimdi (3.4.15) denklemini için lineer olma durumlarını inceleyelim:

Durum 1.

f_1 lineer olsun. O zaman $f_1'' = 0$ olur, bu (3.4.15) de ele alınırsa

$$-ABg_1''g_2''(a_1 - a_2)^2 - ABf_2''g_1'' + A^2f_2''g_2'' = 0 \quad (3.4.16)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki g_1 sabit olsun. O zaman (3.4.16) ifadesi

$$A^2f_2''g_2'' = 0 \quad (3.4.17)$$

olur. Burada $A \neq 0$ olduğundan f_2 ya da g_2 lineer iken denklem sağlanır.

Kabul edelim ki f_2 sabit olsun. Bu durumda (3.4.16) denklemi

$$-ABg_1''g_2''(a_1 - a_2)^2 = 0 \quad (3.4.18)$$

olur. Burada $A \neq 0$ ve $a_1, a_2 \neq 0$ olduğundan g_1 ya da g_2 lineer iken denklem sağlanır.

Kabul edelim ki g_2 sabit olsun. Bu durumda (3.4.16) denklemi

$$-ABf_2''g_1'' = 0 \quad (3.4.19)$$

olur. Burada $A \neq 0$ olduğundan f_2 ya da g_1 lineer iken denklem sağlanır.

Durum 2.

g_1 lineer olsun. O zaman $g_1'' = 0$ olur. Bu durum (3.4.15) denkleminde ele alınırsa

$$-ABf_1''g_2'' + A^2f_2''g_2'' = 0 \quad (3.4.20)$$

elde edilir. g_2 lineer iken denklem sağlanır.

Durum 3.

f_1 ve g_1 lineer olsun. Böylece $f_1'' = 0$ ve $g_1'' = 0$ olur. Bu durum (3.4.15) de göz önüne alınırsa

$$A^2f_2''g_2'' = 0 \quad (3.4.21)$$

bulunur. Burada $A \neq 0$ olduğundan f_2 ya da g_2 lineer iken denklem sağlanır.

Sonuç 3.4.2. Kabul edelim ki M , E^4 de (3.4.7) ile verilen bir afin öteleme yüzeyi olsun. Bu yüzey aşağıdaki her bir durum için flattir,

- i. f_1 lineer g_1 sabit iken f_2 veya g_2 den en az biri lineerdir,
- ii. f_1 lineer f_2 sabit iken g_1 veya g_2 den en az biri lineerdir,
- iii. f_1 lineer g_2 sabit iken f_2 veya g_1 den en az biri lineerdir,
- iv. g_1 ve g_2 lineerdir,
- v. f_1 ve g_1 lineer iken f_2 veya g_2 den en az biri lineerdir.

3.5. Pseudo-Galilean Uzayında Afin Öteleme Yüzeyleri

Bu bölümde 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı G_3^1 de afin öteleme yüzeyleri tanımlandı ve bu yüzeyler için eğrilikler incelendi. Ayrıca benzer ifadelerin 3-boyutlu Galilean uzayında da elde edilebileceği ifade edildi.

G_3^1 de bir öteleme yüzeyi α ve β eğrilerinin toplamı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$z(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) .$$

Böylece G_3^1 de bir M afin öteleme yüzeyi

$$z = f(x) + g(y + ax) \tag{3.5.1}$$

ile verilebilir. G_3^1 de M afin öteleme yüzeyi için (2.3.11) ve (2.3.12) den

$$W = \sqrt{1 - g'^2} \quad \text{ve} \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 - g'^2}} (0, g', 1)$$

olarak hesaplanır. Burada (3.5.1) göz önüne alınırsa

$$z_x = f' + ag' \quad \text{ve} \quad z_y = g'$$

olup

$$z_{xx} = f'' + a^2 g'' \quad , \quad z_{xy} = ag'' \quad , \quad z_{yy} = g''$$

elde edilir. (2.3.15) ve (2.3.17) denklemlerinden bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
K &= -\varepsilon \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{W^4} = -\varepsilon \frac{(f'' + a^2 g'')g'' - (ag'')^2}{W^4} \\
&= -\varepsilon \frac{f'' g''}{W^4}
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

ve

$$H = \varepsilon \frac{z_{yy}}{2W^3} = \varepsilon \frac{g''}{2W^3} \tag{3.5.3}$$

olarak elde edilir.

G_3^1 de tanımlanan M afın öteleme yüzeyi için (3.5.2) denklemi ele alınırsa bu yüzeyin flat olması için $f'' g'' = 0$ olmalı, yani f ve g den en az biri lineer olmalıdır. Bu yüzeyin sabit Gauss eğrilikli olması için

$$\frac{f'' g''}{W^4} = sbt$$

olmalıdır. Yani,

$$f'' = sbt \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{g''}{(1 - g'^2)^2} = sbt \neq 0 \tag{3.5.4}$$

olarak ele alınabilir. Böylece (3.5.4) denklemi çözülürse $b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = bx^2 + cx + d$$

şeklindedir. Ayrıca $A, B \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(y + ax) = \frac{1}{2} \frac{g'}{(1 - g'^2)} + \frac{1}{4} \log \frac{1 + g'}{(1 - g')} = A(y + ax) + B$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.5.1. G_3^1 de (3.5.1) denklemi ile verilen bir M afın öteleme yüzeyi sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli ise $b, c, d, A, B \in \mathbb{R}$ olmak üzere, bu yüzey için

$$f(x) = bx^2 + cx + d$$

ve

$$g(y + ax) = \frac{1}{2} \frac{g'}{(1 - g'^2)} + \frac{1}{4} \log \frac{1 + g'}{(1 - g')} = A(y + ax) + B$$

olmalıdır.

G_3^1 de tanımlanan M afin öteleme yüzeyi için (3.5.3) denklemi ele alınır ve bu yüzeyin ortalama eğriliğinin sabit olduğu düşünülürse

$$2H = \frac{g''}{(1-g'^2)^{3/2}}$$

yazılır. Buradan λ_1, λ_2 sabit olmak üzere

$$2Hv + \lambda_1 = \frac{g'}{\sqrt{1-g'^2}} \Rightarrow (2Hv + \lambda_1)^2 = \frac{g'^2}{1-g'^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\frac{1}{(2Hv + \lambda_1)^2} = 1 + \frac{1}{g'^2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1 - (2Hv + \lambda_1)^2}{(2Hv + \lambda_1)^2} = \frac{1}{g'^2} \Rightarrow g' = \frac{2Hv + \lambda_1}{\sqrt{1 - (2Hv + \lambda_1)^2}}$$

olup

$$g = \lambda_2 - \frac{1}{2H} \sqrt{1 - (2Hv + \lambda_1)^2}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.5.2. G_3^1 de (3.5.1) denklemi ile verilen bir M afin öteleme yüzeyi sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğine sahip ise λ_1, λ_2 sabit olmak üzere, bu yüzey

$$z = f(x) + \lambda_2 - \frac{1}{2H} \sqrt{1 - (2Hv + \lambda_1)^2}$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Aminov, Y.**, 1994. Surfaces in E^4 with a Gaussian Curvature Coinciding with a Gaussian Torsion up to the Sign, *Mathematical Notes*, **56**, 1211-1215.
- [2] **Aminov, Y.**, 2001. The Geometry of Submanifolds. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.
- [3] **Bulca, B. and Arslan, K.**, 2013. Surfaces Given with the Monge Patch in E^4 , *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, **9**(4), 435-447.
- [4] **Bletzinger, K. W.**, 1997. Form Finding of Membrane Structures and Minimal Surfaces by Numerical Continuation, Proceeding of the IASS Congress on Structural Morphology, Towards the New Millennium, Nottingham, 68–75.
- [5] **Cannon, J.W., Floyd, W.J., Kenyon, R. and Parry, R.W.**, 1997. Hyperbolic Geometry, MSRI Publications, **31**, 69-71.
- [6] **Chen, B.Y.**, 1973. Geometry of Submanifolds, Dekker, New York.
- [7] **Dillen, F., Verstraelen, L., Vrancken L., and Zafindratafa G.**, 1995. Classification of Polynomial Translation Hypersurfaces of Finite Type, *Result in Math.*, **27**, 244-249.
- [8] **Divjak, B.**, 1998. Curves in Pseudo-Galilean Geometry, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **41**, 117-128.
- [9] **Divjak, B. and Milin-Sipus, Z.**, 2003. Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces, *Acta Math. Hungar.*, **98**(3), 203-215.
- [10] **Fu, Y. and Hou, Z.**, 2010. Affne Translation Surfaces with Constant Gaussian Curvature, *Kyungpook Math. J.*, **50**, 337-343.
- [11] **Hacısalihoğlu, H.H.**, 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, Malatya.
- [12] **Hacısalihoğlu, H. H.**, 2000. Lineer Cebir I. Cilt, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara
- [13] **Hacısalihoğlu, H.H.**, 2012. Diferensiyel Geometri II. Cilt, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [14] **Hynd, R.**, 2004. Minimal Surfaces in the Three-Sphere with Special Spherical Symmetry, *Master of Science Thesis*, Georgia Institute of Technology.

- [15] **Kamenarovic, I.**, 1991. Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galilean Space G_3 , *Rad HAZU. Mat.* **456**(10), 183-196.
- [16] **Lopez, R.**, 1999. Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary in Hyperbolic Space, *Mh Math.* **127**, 155-169.
- [17] **Lopez, R.**, 2011. Minimal Translation Surfaces in Hyperbolic Space, *Beitr. Algebra Geom.* **52**, 105-112.
- [18] **Liu, H. L.**, 1999. Translation Surfaces with Constant Mean Curvature in 3-dimesional Spaces. *J. Geom.*, **64**, 141-149.
- [19] **Liu, H. and Yu, Y.**, 2013. Affine Translation Surfaces in Euclidean 3-space, *Proc. Japan Acad.*, **89** (9), 111-113.
- [20] **Magid, M. and Vrancken, L.**, 2000. Affine Translation Surfaces with constant sectional curvature, *Journal of Geometry*, **68**, 192-199.
- [21] **Mello, L. F.**, 2003. Mean Directionally Curved Lines on Surfaces Immersed in $\mathbb{R}^4$, *Publ. Math.*, **47**, 415-440,
- [22] **Mello, L.F.**, 2009. Orthogonal Asymptotic Lines on Surfaces Immersed in $\mathbb{R}^4$, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **39**(5), 1597-.1612,
- [23] **Milin Sipus, Z.**, 2008. Ruled Weingarten Surfaces in the Galilean Space, *Periodica Mathematica Hungarica*, **56**(2), 213-225.
- [24] **Milin-Sipus, Z. and Divjak, B.**, 2011. Translation Surfaces in the Galilean Space, *Glasnik Matematicki*, **46**(66), 455-469.
- [25] **Milin-Sipus, Z.**, 2011. On A Certain Class of Translation Surfaces in a Pseudo-Galilean Space, *International Mathematical Forum*, **6**(23), 1113-1125.
- [26] **Milin-Sipus, Z. and Divjak, B.**, 2012. Surfaces of Constant Curvature in the Pseudo-Galilean Space, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, doi:10.1155/2012/375264, 1-28.
- [27] **Munteanu, I.M and Nistor, A.I.**, 2011. On the Geometry of the Second Fundamental Form of Translation Surfaces in E^3 , *Houston J.Math.*, **37**, 1087-1102.
- [28] **Röschel, O.**, 1986. Die Geometrie Des Galileischen Raumes, Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz, Ber.256, 1-20.
- [29] **Verstraelen, L., Walrave, J. and Yaprak, S.**, 1994. The Minimal Translation Surfaces in Euclidean Space, *Soochow J. Math.*, **20** (1), 77-82.

- [30] **Yoon, D.W.**, 2002. On the Gauss Map of Translation Surfaces in Minkowski 3-Space, *Taiwan. J. Math.* **6** (3), 389-398.
- [31] **Yoon, D.W.**, 2010. Polynomial Translation Surfaces of Weingarten Types in Euclidean 3-Space, *Central Eur. J. Math.* **8** (3), 430-436.
- [32] **Yuan, Y. and Liu, H.L.**, 2011. Some New Translation Surfaces in 3-Minkowski Space, *Journal of Math. Res. & Exp.*, **31** (6), 1123-1128.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 2009 yılında Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladı. 2011 yılında yüksek lisansı bitirdi. 2009 yılında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen adı geçen üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.