

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN
SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI**

Yunus BULUT

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN
SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI**

Yunus BULUT

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/
oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Başkan: Prof Dr. Salih ÖZÇELİK

Üye: Prof. Dr. Mikail ET

Üye: Doç. Dr. Murat KARAGÖZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, hiçbir zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam sayın Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR 'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Saygılarımı sunarım.

Ayrıca tezin hazırlanmasında yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK'a teşekkür ederim.

Yunus BULUT

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
GİRİŞ.....	1
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2. BAĞIMSIZ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI.....	4
2.1. Sürekli, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları.....	4
2.2. Kesikli, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları.....	7
2.3. Sürekli, Bağımsız Fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları.....	8
3. BAĞIMLI TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI.....	10
KAYNAKLAR.....	19

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
per	:	Permanent
F	:	Dağılım fonksiyonu
f	:	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
i.i.d.	:	Independent and identically distributed (Bağımsız ve aynı dağılımlı)
i.n.n.i.d.	:	Independent but not necessarily identically distributed (Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan)

ÖZET

Doktora Tezi

AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

Yunus BULUT

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 20

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci, ikinci ve son kısımlarda; sırasıyla, sürekli, bağımsız ve aynı dağılımlı; kesikli, bağımsız ve aynı dağılımlı; ve sürekli, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları verilmiştir.

Son bölümde, süreksiz ve kesikli bağımlı tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları incelenmiştir. Ayrıca, bağımlı ile bağımsız, süreksiz ile sürekli ve kesikli ile sürekli durumlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı istatistikler, bağımlı tesadüfi değişkenler, sürekli tesadüfi değişkenler, kesikli tesadüfi değişkenler, i.i.d. tesadüfi değişkenler, i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE DISTRIBUTIONS OF ORDER STATISTICS FROM NONIDENTICAL RANDOM VARIABLES

Yunus BULUT

Fırat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2007, Page: 20

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems are given.

The second chapter consists of three sections. In the first, second and last sections, the distributions of order statistics of continuous i.i.d., discrete i.i.d. and continuous i.n.n.i.d. random variables are given, respectively.

In the last chapter, the distributions of order statistics of discontinuous and discrete dependent random variables are examined. Furthermore, the relations between dependent and independent, discontinuous and continuous, and discrete and continuous cases are given.

Keywords: Order statistics, dependent random variables, continuous random variables, discrete random variables, i.i.d. random variables, i.n.n.i.d. random variables.

GİRİŞ

İstatistik teorisinde sıralı istatistikler oldukça önemlidir. Çünkü; sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır.

1962’de Khatri [1], kesikli i.i.d. ve 1970’de David [2], sürekli i.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımlarını incelemiştir. Ayrıca; David [2], bağımlı tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım fonksiyonunu da incelemiştir. 1972’de Vaughan ve Venables [3], permanent yardımıyla sürekli i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve 1982’de Guilbaud [4], i.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları yardımıyla i.i.d. olmayan tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımlarını ifade etmiştir. 1989’da Reiss [5], sürekli i.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımlarını ve süreksiz i.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve 1991’de Balakrishnan ve Cohen [6], sürekli i.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımlarını incelemiştir. 1991’de Beg [7], permanent yardımıyla sürekli i.n.n.i.d.; 1994’de Balakrishnan [8], sağdan kesilmiş sürekli i.n.n.i.d. üstel ve 2004’te Barakat ve Abdelkader [9], permanent yardımıyla sürekli i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımlarını incelemiştir.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. X kesikli tesadüfi değişkeni, $x_1, x_2, \dots$ değerlerini

$$P(X = x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

olasılıkları ile alsın. f 'ye X 'in *olasılık fonksiyonu* denir. f ,

i) $f(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

şartlarını sağlar[10].

Tanım 1.2. f , reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ iken

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

'dir. f 'ye X 'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir. f ,

i) $f(x) \geq 0,$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

şartlarını sağlar[10].

Tanım 1.3. X 'in *dağılım fonksiyonu*,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

'dir. F , X kesikli ise

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

ve X sürekli ise

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

şeklinde ifade edilir[10].

Tanım 1.4. $B_n, \mathbb{R}^n$ uzayında,

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n\}$$

şeklinde tanımlanan n boyutlu aralıkları kapsayan en küçük σ -cebiri olsun. Bu σ -cebirinin her bir elemanına $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *Borel kümesi* denir[11].

Tanım 1.5. Bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $c \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\} \in B_n$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *Borel fonksiyonu* denir[11].

Tanım 1.6. $(1, 2, \dots, n)$ indislerinin bütün $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları için $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ile $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$ 'nin dağılımı aynı ise $X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenlerine *değiştirilebilir tesadüfi değişkenler* denir. Değiştirilebilir tesadüfi değişkenlerin herhangi bir alt kümesi de değiştirilebilirdir[12].

Tanım 1.7. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin x_i 'deki marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(x_i)$ ve bunlardan seçilmiş $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m})$ 'nin $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ 'deki bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ olsun. $1 < m \leq n$ için $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ 'de

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) = f_{i_1}(x_{i_1})f_{i_2}(x_{i_2})\dots f_{i_m}(x_{i_m})$$

ise, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'lere *bağımsız tesadüfi değişkenler* denir[13].

Tanım 1.8. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ kolon vektörleri olmak üzere $\mathbf{a}_1$ 'in i_1 defa, $\mathbf{a}_2$ 'nin i_2 defa ... yazılması ile elde edilen matris,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots \\ i_1 & i_2 & \dots \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde karesel bir matris ise,

$$\text{per}(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

'dir. Burada S_n , $(1, 2, \dots, n)$ 'nin permütasyonlarının kümesidir. Yani; permanent, açılımındaki bütün işaretlerin pozitif olması hariç, determinant ile aynıdır[9].

2. BAĞIMSIZ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

2.1. Sürekli, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin sıralanmış hali,

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n} \quad (2.1.1)$$

olsun.

$X_{r:n}$ 'ye, *r. sıralı istatistik* ve (2.1.1)'e de $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'nin *sıralı istatistikleri* denir. Burada, $X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve $X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olarak ifade edilebilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$, f olasılık yoğunluk ve F dağılım fonksiyonuna sahip, sürekli, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenler olsun. Bu tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin maksimumunun dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{n:n}(x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= F_1(x) F_2(x) \dots F_n(x) \\ &= F^n(x) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

olarak elde edilir. (2.1.2)'nin x 'e göre türevi alınırsa bu tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin maksimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{n:n}(x) &= \frac{d}{dx} (F^n(x)) \\ &= nF^{n-1}(x) f(x) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

şeklinde elde edilir. Bu tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin minimumunun dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{1:n}(x) &= 1 - P(X_{1:n} > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) \\ &= 1 - (1 - F_1(x))(1 - F_2(x)) \dots (1 - F_n(x)) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

olarak elde edilir. (2.1.4)'ün x 'e göre türevi alınırsa bu tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin minimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{1:n}(x) &= \frac{d}{dx} (1 - (1 - F(x))^n) \\ &= n(1 - F(x))^{n-1} f(x) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

şeklinde elde edilir. Aynı zamanda (2.1.3) ve (2.1.5), sırasıyla,

$$\begin{aligned}
f_{n:n}(x) dx &= P(X_{n:n} \in dx) \\
&= P(X \text{ 'lerin biri } dx\text{'in elemanı, diğerleri } x\text{'den küçük}) \\
&= nP(X_1 \in dx, \text{ diğerleri } x\text{'den küçük}) \\
&= nP(X_1 \in dx) P(X_1 \text{ hariç diğerleri } x\text{'den küçük}) \\
&= nf(x) dx F^{n-1}(x)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_{1:n}(x) dx &= P(X_{1:n} \in dx) \\
&= P(X \text{ 'lerin biri } dx\text{'in elemanı, diğerleri } x\text{'den büyük}) \\
&= nP(X_1 \in dx, \text{ diğerleri } x\text{'den büyük}) \\
&= nP(X_1 \in dx) P(X_1 \text{ hariç diğerleri } x\text{'den büyük}) \\
&= nf(x) dx (1 - F(x))^{n-1}
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

şeklinde de elde edilebilir. Bu metodun avantajı, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere herhangi bir r . sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonunun daha kolay elde edilmesidir. (2.1.6) ve (2.1.7) yardımıyla r . sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
f_{r:n}(x) dx &= P(X_{r:n} \in dx) \\
&= P(X \text{ 'lerin biri } dx\text{'in elemanı, diğerlerin } r-1 \text{ tanesi } x\text{'den küçük}) \\
&= nP(X_1 \in dx, \text{ diğerlerin } r-1 \text{ tanesi } x\text{'den küçük}) \\
&= nP(X_1 \in dx) \binom{n-1}{r-1} F^{r-1}(x) (1 - F(x))^{n-r} \\
&= nf(x) dx \binom{n-1}{r-1} F^{r-1}(x) (1 - F(x))^{n-r}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir[6, 14].

Tanım 2.1.1. $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $-\infty < x_{1:n} < x_{2:n} < \dots < x_{n:n} < \infty$ olmak üzere

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_{1:n}, x_{2:n}, \dots, x_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^n f(x_{i:n})$$

'dir[6].

Tanım 2.1.2. $X_{r:n}$ 'nin *olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $1 \leq r \leq n$ ve $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(x) (1-F(x))^{n-r} f(x)$$

'dir[2].

Tanım 2.1.3. $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F^{r-1}(x) (F(y) - F(x))^{s-r-1} \cdot (1-F(y))^{n-s} f(x)f(y)$$

'dir[2].

Tanım 2.1.4. $1 \leq k \leq n$ ve $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < r_{k+1} = n+1$ olsun. $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $0 < F(x_1) < F(x_2) < \dots < F(x_k) < 1$ olmak üzere

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(\mathbf{x}) = n! \left(\prod_{i=1}^k f(x_i) \right) \prod_{i=1}^{k+1} \frac{(F(x_i) - F(x_{i-1}))^{r_i - r_{i-1} - 1}}{(r_i - r_{i-1} - 1)!}$$

'dir. Burada, $F(x_0) = 0$, $F(x_{k+1}) = 1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ve $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ 'dir[5].

Teorem 2.1.1. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} F^m(x) (1-F(x))^{n-m} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

'dir[2].

Ayrıca, (2.1.8)'in x 'e göre türevi alınırsa sürekli, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r:n}(x) &= \frac{d}{dx} (F_{r:n}(x)) \\ &= \frac{d}{dx} (P(X_{r:n} \leq x)) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{m=r}^n \binom{n}{m} F^m(x) (1-F(x))^{n-m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} \{mF^{m-1}(x)f(x)(1-F(x))^{n-m} \\
&\quad + F^m(x)(n-m)(1-F(x))^{n-m-1}(-f(x))\} \\
&= \sum_{m=r-1}^{n-1} \binom{n-1}{m} F^m(x)(1-F(x))^{(n-1)-m}nf(x) \\
&\quad - \sum_{m=r}^n \binom{n-1}{m} F^m(x)(1-F(x))^{(n-1)-m}nf(x) \\
&= \binom{n-1}{r-1} F^{r-1}(x)(1-F(x))^{(n-1)-(r-1)}nf(x) \\
&\quad - \binom{n-1}{n} F^n(x)(1-F(x))^{(n-1)-n}nf(x) \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(x)(1-F(x))^{n-r}f(x)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir[5, 15].

2.2. Kesikli, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları

$x; 0, 1, 2, \dots$ değerlerini sırasıyla $p(0), p(1), p(2), \dots$ olasılıkları ile alan kesikli bir tesadüfi değişken olsun. Burada, $p(\alpha) \geq 0$ ve $\sum_{\alpha=0}^{\infty} p(\alpha) = 1$ 'dir. x sadece $0, 1, 2, \dots, M$ sonlu değerlerini alıyorsa, $\alpha = 1, 2, \dots$ için $p(M + \alpha) = 0$ olacaktır.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 'ler kesikli bir dağılımdan alınmış bağımsız gözlemler olsun. Bu gözlem değerlerinin sıralanmış hali,

$$x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$$

ve $P(s) = \sum_{\alpha=0}^s p(\alpha)$ olsun. Verilen n gözlem için $r.(n-r+1)$ tane birbirinden farklı durum söz konusudur. Yani, sırasıyla, $k = 0, 1, \dots, r-1$ ve $l = 0, 1, \dots, n-r$ için $x_{r:n}$ 'den küçük $P(x_{r:n} - 1)$ olasılıklı $(r-1-k)$, $x_{r:n}$ 'nin $p(x_{r:n})$ olasılıklı $(k+l+1)$ ve $x_{r:n}$ 'den büyük $1 - P(x_{r:n})$ olasılıklı $(n-r-l)$ tane gözlem vardır. Böylece $x_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
p_{r:n}(x_{r:n}) &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{n!}{(r-1-k)!(k+l+1)!(n-r-l)!} P^{r-1-k}(x_{r:n} - 1) \\
&\quad \cdot p^{k+l+1}(x_{r:n}) (1 - P(x_{r:n}))^{n-r-l}
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $x_{r:n} = 0$ ise $P(x_{r:n} - 1) = 0$ 'dır.

(2.2.1),

$$p_{r:n}(x_{r:n}) = r \cdot \binom{n}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-r} \binom{r-1}{k} \binom{n-r}{l} P^{r-1-k}(x_{r:n}-1) \cdot (1-P(x_{r:n}))^{n-r-l} p(x_{r:n}) \int_0^1 (yp(x_{r:n}))^k ((1-y)p(x_{r:n}))^l dy \quad (2.2.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Toplam ve integral arasındaki ilişkiler ve $yp(x_{r:n})+P(x_{r:n}-1) = w$ değişken değiştirmesi ile (2.2.2),

$$p_{r:n}(x_{r:n}) = r \cdot \binom{n}{r} \int_{P(x_{r:n}-1)}^{P(x_{r:n})} w^{r-1} (1-w)^{n-r} dw \quad (2.2.3)$$

olarak ifade edilebilir. (2.2.3)'den $x_{r:n}$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} P_{r:n}(x_{r:n}) &= \sum_{x_{r:n}=0}^{x_{r:n}} p_{r:n}(x_{r:n}) \\ &= r \cdot \binom{n}{r} \int_0^{P(x_{r:n})} w^{r-1} (1-w)^{n-r} dw \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir[1].

2.3. Sürekli, Bağımsız Fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 'nin sırasıyla, $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım ve $f_1, f_2, \dots, f_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsunlar. [4]'de i.i.d. tesadüfi değişkenlerin fonksiyonları yardımıyla i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenlerin fonksiyonları verilmiştir. [4]'deki Teorem 2.1, aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.3.1. Her B Borel kümesi için

$$P((X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}) \in B) = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \frac{m^n}{n!} \sum_{|S|=m} P((X_{1:n}^S, X_{2:n}^S, \dots, X_{n:n}^S) \in B) \quad (2.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.1)'deki $\sum_{|S|=m}$ toplamı, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin m elemanlı tüm S alt kümeleri üzerinden alınmaktadır. $X_{1:n}^S \leq X_{2:n}^S \leq \dots \leq X_{n:n}^S$,

$$F^S = |S|^{-1} \sum_{i \in S} F_i$$

dağılım fonksiyonlu i.i.d. tesadüfi değişkenlerinin sıralı istatistiklerini göstermektedir.

Tanım 2.3.1. $X_{r:n}$ 'nin *olasılık yoğunluk fonksiyonu*, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x) & \mathbf{f}(x) & \mathbf{1} - \mathbf{F}(x) \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

$r-1 \quad 1 \quad n-r$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))'$,

$\mathbf{1} - \mathbf{F}(x) = (1 - F_1(x), 1 - F_2(x), \dots, 1 - F_n(x))'$ ve $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))'$

sütun vektörleridir[3]. Ayrıca, (2.3.2)'deki permanent açılırsa,

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \prod_{a=1}^{r-1} F_{i_a}(x) f_{i_r}(x) \prod_{b=r+1}^n (1 - F_{i_b}(x))$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\sum_P$ toplamı, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $n!$ tane $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden alınmıştır[8].

Tanım 2.3.2. $1 \leq r < s \leq n$ ve $-\infty < x < y < \infty$ olmak üzere $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu*,

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{C_{r,s:n}}{n!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x) & \mathbf{f}(x) & \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x) & \mathbf{f}(y) & \mathbf{1} - \mathbf{F}(y) \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

$r-1 \quad 1 \quad s-r-1 \quad 1 \quad n-s$

'dir. Burada, $C_{r,s:n} = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ ve permanent içindeki ifadeler, (2.3.2)'dekilere benzer sütun vektörleridir[7]. Ayrıca, (2.3.3)'deki permanent açılırsa,

$$f_{r,s:n}(x, y) = \frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \sum_P \prod_{a=1}^{r-1} F_{i_a}(x) f_{i_r}(x) \prod_{b=r+1}^{s-1} (F_{i_b}(y) - F_{i_b}(x)) f_{i_s}(y) \cdot \prod_{c=s+1}^n (1 - F_{i_c}(y))$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\sum_P$ toplamı, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $n!$ tane $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden alınmıştır[8].

Tanım 2.3.3. $X_{r:n}$ 'nin *dağılım fonksiyonu*, $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$F_{r:n}(x) = \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x) & \mathbf{1} - \mathbf{F}(x) \end{bmatrix}$$

$m \quad n-m$

'dir. $\mathbf{F}(x)$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{F}(x)$, (2.3.2)'deki gibidir[9].

3. BAĞIMLI TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımlı tesadüfi değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonunu $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterelim. Buradan

$$P(X_{n:n} \leq x) = P_n(x, x, \dots, x) \quad (3.1)$$

'dir. (3.1), $X_{r:n}$ için,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} S_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada, S_m , $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{m}$ tane $P(X_{i_1} \leq x, X_{i_2} \leq x, \dots, X_{i_m} \leq x)$ olasılıklarının toplamıdır. Özel olarak, tesadüfi değişkenler değiştirilebilir ise (3.2),

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \binom{n}{m} P(X_{m:m} \leq x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilebilir[2].

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler bağımsız ve aynı dağılımlı ise (3.3),

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \binom{n}{m} F^m(x) \\ &= \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} F^m(x) (1 - F(x))^{n-m} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonunu inceleyelim. Bu fonksiyon, (3.4)'deki gibi veya tam olmayan beta fonksiyonu yardımıyla

$$F_{r:n}(x) = I_{F(x)}(r, n - r + 1) \quad (3.5)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (3.5),

$$I_{F(x)}(r, n - r + 1) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. (3.6)'da $(1-t)^{n-r}$ ifadesi yerine binom açılımı yazılırsa

$$I_{F(x)}(r, n - r + 1) = \sum_{j=0}^{n-r} \int_0^{F(x)} \binom{n-r}{j} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1+j} (-1)^j dt \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7)'de integral alınırsa $r + j = m$ için

$$I_{F(x)}(r, n - r + 1) = \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \binom{n}{m} F^m(x) \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8), (3.4) ile aynıdır[16].

X_i , $1 \leq i \leq n$ tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu F_i olmak üzere F_i 'nin x 'deki değeri $F_i(x)$ ve F_i , x 'de süreksiz olsun. Bu durumda $(0, 1)$ -düzgün dağılımlı η tesadüfi değişkeni yardımıyla tanımlanan ve $(F_i(x^-), F_i(x))$ aralığında düzgün dağılımlı olan,

$$F_i(x^-) + \eta(F_i(x) - F_i(x^-)) \quad (3.9)$$

tesadüfi değişkenini düşünelim. (3.9)'da $F_i(x^-)$, F_i 'nin x 'deki soldan limitini göstermektedir ve X_i ile η birbirinden bağımsızdır. η 'nın gözlem değeri y olmak üzere (3.9),

$$H_i(y, x) = F_i(x^-) + y(F_i(x) - F_i(x^-)) \quad (3.10)$$

şeklinde alınır, (3.10), $(0, 1)$ -düzgün dağılımlı olur ve x 'de süreksiz olan F_i 'nin yerine alınabilir[5]. (3.2) ve (3.10)'dan aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.1. X_i , $1 \leq i \leq n$, tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu F_i , x 'de süreksiz olsun. Süreksiz ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H_{r:n}(y, x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} H^{(i_1, i_2, \dots, i_m)}((y, x), \dots, (y, x)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

'dir. Burada, $H^{(i_1, i_2, \dots, i_m)}((y, x), \dots, (y, x))$, $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}$ tesadüfi değişkenlerinin bileşik

dağılım fonksiyonudur.

Sonuç 3.1. (3.11)'deki tesadüfi değişkenler sürekli ise r . sıralı istatistiğin dağılım fonksiyonu [2]'de olduğu gibi,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} F^{(i_1, i_2, \dots, i_m)}(x, x, \dots, x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $F^{(i_1, i_2, \dots, i_m)}(x, x, \dots, x)$, $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}$ tesadüfi değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonudur.

Sonuç 3.2. (3.11)'deki tesadüfi değişkenler süreksiz, bağımsız fakat aynı dağılımlı değilse r . sıralı istatistiğin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H_{r:n}(y, x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} H_{i_1}(y, x) H_{i_2}(y, x) \dots H_{i_m}(y, x) \\ &= \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \underset{m}{per}[\underset{n-m}{\mathbf{H}(y, x)} \quad \mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{H}(y, x) = (H_1(y, x), H_2(y, x), \dots, H_n(y, x))'$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x) = (1 - H_1(y, x), 1 - H_2(y, x), \dots, 1 - H_n(y, x))'$ sütun vektörleridir.

Sonuç 3.3. (3.13)'deki tesadüfi değişkenler aynı dağılımlı ise r . sıralı istatistiğin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H_{r:n}(y, x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \binom{n}{m} H^m(y, x) \\ &= \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} H^m(y, x) (1 - H(y, x))^{n-m} \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.4. (3.13)'deki tesadüfi değişkenler sürekli ise r . sıralı istatistiğin dağılım fonksiyonu [9]'de olduğu gibi,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \underset{m}{per}[\underset{n-m}{\mathbf{F}(x)} \quad \mathbf{1} - \mathbf{F}(x)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))'$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{F}(x) = (1 - F_1(x), 1 - F_2(x), \dots, 1 - F_n(x))'$ sütun vektörleridir.

Sonuç 3.5. (3.15)'deki tesadüfi değişkenler aynı dağılımlı ise r . sıralı istatistiğin dağılım fonksiyonu [2]'de ifade edildiği gibi,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \binom{n}{m} F^m(x) \\ &= \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} F^m(x) (1 - F(x))^{n-m} \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir.

(3.2)'den aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2. $X_i, 1 \leq i \leq n$, tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu P_i olsun. Kesikli ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$P_{r:n}(x_{r:n}) = \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} P^{(i_1, i_2, \dots, i_m)}(x_{r:n}, x_{r:n}, \dots, x_{r:n}) \quad (3.17)$$

'dir. Burada, $P^{(i_1, i_2, \dots, i_m)}(x_{r:n}, x_{r:n}, \dots, x_{r:n})$, $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}$ tesadüfi değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonudur.

Sonuç 3.6. (3.17)'deki tesadüfi değişkenler bağımsız ise r . sıralı istatistiğin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} P_{r:n}(x_{r:n}) &= \sum_{x_{r:n}=0}^{x_{r:n}} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+l+1)!(n-r-l)!} \\ &\quad \cdot \text{per}[\mathbf{P}(x_{r:n} - 1) \quad \mathbf{p}(x_{r:n}) \quad \mathbf{1} - \mathbf{P}(x_{r:n})] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{matrix} r-1-k & k+l+1 & n-r-l \end{matrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{P}(x_{r:n} - 1) = (P_1(x_{r:n} - 1), P_2(x_{r:n} - 1), \dots, P_n(x_{r:n} - 1))'$, $\mathbf{p}(x_{r:n}) = (p_1(x_{r:n} - 1), p_2(x_{r:n} - 1), \dots, p_n(x_{r:n} - 1))'$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{P}(x_{r:n}) = (1 - P_1(x_{r:n}), 1 - P_2(x_{r:n}), \dots, 1 - P_n(x_{r:n}))'$ sütun vektörleridir.

Sonuç 3.7. (3.18)'deki tesadüfi değişkenler aynı dağılımlı ise r . sıralı istatistiğin

dağılım fonksiyonu [1]'de ifade edildiği gibi,

$$\begin{aligned}
P_{r:n}(x_{r:n}) &= \sum_{x_{r:n}=0}^{x_{r:n}} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{n!}{(r-1-k)!(k+l+1)!(n-r-l)!} \\
&\quad \cdot P^{r-1-k}(x_{r:n}-1) p^{k+l+1}(x_{r:n}) (1-P(x_{r:n}))^{n-r-l} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{P(x_{r:n})} w^{r-1} (1-w)^{n-r} dw
\end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.8. (3.17)'deki tesadüfi değişkenler sürekli olacak şekilde arttırılırsa sürekli ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.12)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.9. Sonuç 3.8'deki yaklaşım ve (3.18)'de $k = l = 0$ alınrsa sürekli, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.15)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.10. Sonuç 3.8'deki yaklaşım ve (3.19)'da $k = l = 0$ alınrsa sürekli, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.16)'daki gibi elde edilir.

Sonuç 3.11. (3.11)'in x 'e göre türevi alınrsa süreksiz ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

Sonuç 3.12. (3.12)'nin x 'e göre türevi alınrsa sürekli ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

Sonuç 3.13. (3.13)'ün x 'e göre türevi alınrsa süreksiz, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h_{r:n}(y, x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(y, x) & \mathbf{h}(y, x) & \mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$\begin{matrix} r-1 & 1 & n-r \end{matrix}$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{H}(y, x) = (H_1(y, x), H_2(y, x), \dots, H_n(y, x))'$,

$\mathbf{h}(y, x) = (h_1(y, x), h_2(y, x), \dots, h_n(y, x))'$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x) = (1 - H_1(y, x), 1 - H_2(y, x), \dots, 1 - H_n(y, x))'$ sütun vektörleri ve $h_i(y, x) = f_i(x^-) + y(f_i(x) - f_i(x^-))$ 'dir.

Sonuç 3.14. (3.20)'deki tesadüfi değişkenler aynı dağılımlı ise r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h_{r:n}(y, x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} H^{r-1}(y, x)(1 - H(y, x))^{n-r} h(y, x) \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.15. (3.15)'in x 'e göre türevi alınırsa r . sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu, [3]'de ifade edildiği gibi,

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x) & \mathbf{f}(x) & \mathbf{1} - \mathbf{F}(x) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$r-1 \quad 1 \quad n-r$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))'$, $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))'$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{F}(x) = (1 - F_1(x), 1 - F_2(x), \dots, 1 - F_n(x))'$ sütun vektörleridir.

Sonuç 3.16. (3.22)'deki tesadüfi değişkenler aynı dağılımlı ise r . sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu, [2]'de ifade edildiği gibi,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x) \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.17. $P(x_{r:n}) - P(x_{r:n} - 1) = p(x_{r:n})$, (3.17)'ye uygulanırsa kesikli ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu elde edilir.

Sonuç 3.18. $P(x_{r:n}) - P(x_{r:n} - 1) = p(x_{r:n})$, (3.18)'e uygulanırsa kesikli, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$p_{r:n}(x_{r:n}) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+l+1)!(n-r-l)!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_{r:n} - 1) & \mathbf{p}(x_{r:n}) & \mathbf{1} - \mathbf{P}(x_{r:n}) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$r-1-k \quad k+l+1 \quad n-r-l$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{P}(x_{r:n} - 1) = (P_1(x_{r:n} - 1), P_2(x_{r:n} - 1), \dots, P_n(x_{r:n} - 1))'$, $\mathbf{p}(x_{r:n}) = (p_1(x_{r:n} - 1), p_2(x_{r:n} - 1), \dots, p_n(x_{r:n} - 1))'$ ve $\mathbf{1} - \mathbf{P}(x_{r:n}) = (1 - P_1(x_{r:n}), 1 - P_2(x_{r:n}), \dots, 1 - P_n(x_{r:n}))'$ sütun vektörleridir. Ayrıca, $x_{r:n} = 0$ ise $P_i(x_{r:n} - 1) = 0$ 'dır.

Sonuç 3.19. (3.24)'deki tesadüfi değişkenler aynı dağılımlı olursa r . sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu, [1]'de ifade edildiği gibi,

$$\begin{aligned}
p_{r:n}(x_{r:n}) &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{n!}{(r-1-k)!(k+l+1)!(n-r-l)!} \\
&\quad \cdot P^{r-1-k}(x_{r:n}-1) p^{k+l+1}(x_{r:n}) (1-P(x_{r:n}))^{n-r-l} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{P(x_{r:n}-1)}^{P(x_{r:n})} w^{r-1} (1-w)^{n-r} dw \quad (3.25)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.20. Sonuç 3.18'deki tesadüfi değişkenler sürekli olursa (3.24)'de $k = l = 0$ olur. Dolayısıyla; sürekli, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, (3.22)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.21. Sonuç 3.19'daki tesadüfi değişkenler sürekli olursa (3.25)'de $k = l = 0$ olur. Böylece, sürekli, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, (3.23)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.22. Sonuç 3.11'de ifade edilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun $-\infty$ 'dan x 'e kadar integrali alınırsa süreksiz ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.11)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.23. Sonuç 3.12'de ifade edilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun $-\infty$ 'dan x 'e kadar integrali alınırsa sürekli ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.12)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.24. (3.20)'nin $-\infty$ 'dan x 'e kadar integrali alınırsa süreksiz, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
H_{r:n}(y, x) &= \int_{-\infty}^x h_{r:n}(y, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(y, x) & \mathbf{h}(y, x) & \mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x) \end{bmatrix} dx \\
&\quad \quad \quad r-1 \quad \quad 1 \quad \quad n-r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \text{per}[\mathbf{H}(y, x) \quad \mathbf{dH}(y, x) \quad \mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x)] \\
&= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} H_{i_1}(y, x) H_{i_2}(y, x) \dots H_{i_m}(y, x) \\
&= \sum_{m=r}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \text{per}[\mathbf{H}(y, x) \quad \mathbf{1} - \mathbf{H}(y, x)] \\
&\quad \quad \quad m \quad \quad \quad n-m
\end{aligned}$$

şeklinde, (3.13)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.25. (3.21)'in $-\infty$ 'dan x 'e kadar integrali alınırsa süreksiz, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
H_{r:n}(y, x) &= \int_{-\infty}^x h_{r:n}(y, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} H^{r-1}(y, x) (1 - H(y, x))^{n-r} h(y, x) dx
\end{aligned}$$

'da $H(y, x) = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$= \int_0^{H(y, x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

elde edilir. İntegrandtaki $(1-u)^{n-r}$ 'nin yerine binom açılımı yazılırsa

$$= \sum_{j=0}^{n-r} \int_0^{H(y, x)} \binom{n-r}{j} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1+j} (-1)^j du$$

elde edilir. Burada $r+j = m$ olarak alınırsa söz konusu dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=r}^n (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r-1} \binom{n}{m} H^m(y, x) \\
&= \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} H^m(y, x) (1 - H(y, x))^{n-m}
\end{aligned}$$

şeklinde, (3.14)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.26. (3.22)'nin $-\infty$ 'dan x 'e kadar integrali alınırsa sürekli, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.15)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.27. (3.23)'ün $-\infty$ 'dan x 'e kadar integrali alınrsa sürekli, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.16)'daki gibi elde edilir.

Sonuç 3.28. Sonuç 3.17'de ifade edilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun $x_{r:n} = 0$ 'dan $x_{r:n}$ 'e kadar toplamı alınrsa kesikli ve bağımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.17)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.29. (3.24)'ün $x_{r:n} = 0$ 'dan $x_{r:n}$ 'e kadar toplamı alınrsa kesikli, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.18)'deki gibi elde edilir.

Sonuç 3.30. (3.25)'in $x_{r:n} = 0$ 'dan $x_{r:n}$ 'e toplamı alınrsa kesikli, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, (3.19)'daki gibi elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Khatri, C.G., 1962, Distributions of order statistics for discrete case, *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, 14, 167-171.
- [2] David, H.A., 1970, *Order Statistics*, John Wiley&Sons, New York.
- [3] Vaughan, R.J. and Venables, W.N., 1972, Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 34, 308-310.
- [4] Guilbaud, O., 1982, Functions of non-i.i.d. random vectors expressed as functions of i.i.d. random vectors, *Scandinavian Journal of Statistics*, 9, 229-233.
- [5] Reiss, R.-D., 1989, *Approximate Distributions of Order Statistics*, Springer-Verlag, New York.
- [6] Balakrishnan, N. and Cohen, A.C., 1991, *Order Statistics and Inference*, Academic Press, Inc., San Diego.
- [7] Beg, M.I., 1991, Recurrence relations and identities for product moments of order statistics corresponding to nonidentically distributed variables, *Sankhyā, Ser.A*, 53, 365-374.
- [8] Balakrishnan, N., 1994, On order statistics from non-identical right-truncated exponential random variables and some applications, *Commun. Statist. -Theory Meth.*, 23(12), 3373-3393.
- [9] Barakat, H.M. and Abdelkader, Y.H., 2004, Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables, *Statistical Methods & Applications*, 13, 13-24.
- [10] Cerit, C. ve Yüksel, M., 2005, *Olasılık*, İstanbul.
- [11] Shahbazov, A., 2005, *Olasılık Teorisine Giriş*, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., İstanbul.
- [12] Galambos, J., 1987, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Krieger, Florida.
- [13] Freund, J.E. and Walpole, R.E., 1980, *Mathematical Statistics*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., London.

[14] <http://www-stat.stanford.edu/~susan/courses/s116/node79.html> (eriřim:12/05/2007)

[15] http://en.wikipedia.org/wiki/Order_statistic (eriřim:12/05/2007)

[16] Bulut, Y., 2003, Sıralı İstatistiklerin Dağılımları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.