

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VARYASYON HESABININ OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİNE
UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hanifi TÜRKAN

Anabilim Dalı : Matematik Bölümü

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ

ARALIK 2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VARYASYON HESABININ OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİNE
UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hanifi TÜRKAN

(131121112)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 2 Aralık 2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 24 Aralık 2015

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (Fırat Üni.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa İNÇ (Fırat Üni.)

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İnönü Üni.)

Necdet Catalbas
M. Inç
O. Faruk Temizer

ARALIK - 2015

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince değerli vaktini ayırıp, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, her türlü kaynağını, ilgisini, desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ' a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu süreçte beni her zaman desteklemiş olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN' a ve bu günlere gelmemi sağlayan, sevgisi ve ilgisi ile hep yanımda olan canım aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hanifi TÜRKAN
ELAZIĞ - 2015

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
TABLOLAR LİSTESİ.....	VIII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Birkaç Önemli Ekstremal Problemler.....	1
1.2 Varyasyon İlkeleri.....	3
1.3 Brachistochrone Problemi.....	4
1.4 Diyet Problemi.....	6
1.5 Optimal Kontrol Problemi.....	7
2. VARYASYONLAR HESABI.....	10
2.1 Temel Kavramlar.....	10
2.2 Bir Fonksiyon Ve Fonksiyonelin Ekstremumu.....	13
2.3 Temel Varyasyon Problemi (Euler-Lagrange Denklemi).....	14
2.4 İkinci Varyasyon.....	22
2.5 Şartlarla Fonksiyonların Ekstremumu.....	23
2.5.1 Lagrange Çarpan Metodu.....	24
3. VARYASYON HESABININ OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİNE UYGULANMASI.....	29
3.1 Giriş.....	29
3.2 Optimal Kontrol Probleminin Temel Tanım ve Teoremleri.....	29

3.3	Varyasyon Hesabının Optimal Kontrol Sistemlerine Uygulanması.....	35
3.3.1	Adım 1: Fonksiyonelin Optimizasyonu Ve Şartı.....	35
3.3.2	Adım 2: Optimal Kontrol Sisteminin Lagrange Denklem Formuyla Yazılması.....	37
3.3.3	Adım 3: Optimal Kontrol Sisteminin Hamilton Denklem Formuyla Yazılması (Pontryagin Prensibi).....	38
3.3.4	Bazı Önemli Özellikler.....	42
4.	OPTİMAL KONTROL VE VARYASYON HESABI PROBLEMİNİN BİRBİRLERİYLE KARŞILAŞTIRILMASI.....	45
	KAYNAKLAR.....	46
	ÖZGEÇMİŞ.....	

ÖZET

Varyasyon Hesabının Optimal Kontrol Sistemlerine Uygulanması

Bu tezin amacı uygulamalı matematiğin ve mühendisliğin çeşitli dallarında kullanılan varyasyon hesabını ve optimal kontrolü tanıtmaktır. Bu nedenle öncelikle varyasyon hesabı ve optimal kontrol sistemleri ile ilgili temel bilgileri ortaya koymaktadır. Tezde optimal kontrol, optimizasyon, varyasyonlar hesabı ile ilgili bilgiler temel olarak kullanılmıştır.

Optimal kontrol için varyasyonlar hesabının temel kavramları ve optimal kontrol sistemlerine uygulanması açıklanmıştır. Fonksiyonun optimumu hesaplanırken Lagrange çarpan metodundan yararlanılmıştır.

Varyasyon hesabının optimal kontrol sistemlerine uygulanması yapılırken fonksiyonelin optimizasyonu, Lagrange denklem formu ve Hamilton denklem formu kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol / Varyasyon / Euler-Lagrange denklemi / Hamilton prensibi

SUMMARY

Applying the Optimal Control Systems of the Calculus of Variations

The aim of this thesis is to introduce optimal control and calculus of variation which are used in various branches of applied mathematics and engineering. In accordance with this, first it also manifests all the basic informations about calculus of variations and optimal control systems. In this thesis, information concerning optimal control, optimization and calculus of variations is explained in basic terms.

Furthermore, for optimal control, basic informations about calculus of variations and applied to optimal control systems are explained. While calculating the optimum of the function, Langrange multiplier method was being utilized.

While applying the Optimal Control Systems of the Calculus of Variations, optimization of the function, equation of Lagrange and eguation of Hamilton are used.

Key Words: Optimal control / Variations / eguation of Euler-Lagrange / Hamilton principle

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Dido problemi	2
Şekil 2. Euclid problemi	2
Şekil 3. Kepler problemi	3
Şekil 4. Brachistochrone problemi	5
Şekil 5. Brachistochrone probleminin matematiksel modellemesi	5
Şekil 6. Optimal kontrol problemi	7
Şekil 7. Sabit-bitiş durumlu ve sabit-bitiş zamanlı sistem	15
Şekil 8. Sıfırdan farklı $f(t)$ ve $\delta x(t)$ keyfisi	19
Şekil 9. Yay uzunluğu	21

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1. Optimal kontrol ve varyasyon hesabı probleminin karşılaştırılması	45
--	----

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbf{v}(t)$	: Kontrol değişkeni
$\mathbf{y}(t)$	: Durum değişkeni
$\dot{\mathbf{y}}^*(t)$	: Durum denklemi
$\dot{\mathbf{p}}^*(t)$	: Co-state denklemi
$\mathbf{v}^*(t)$	: Optimal kontrol değişkeni
$\mathbf{p}^t(t)$	: Durum matrisinin transpozesi
$\Delta \mathbf{g} \triangleq \mathbf{g}(t + \Delta t) - \mathbf{g}(t)$	: Fonksiyonun t değişkenine bağlı artışı
$\Delta \mathbf{f} \triangleq \mathbf{F}(\mathbf{y}(t) + \delta \mathbf{y}(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{y}(t))$	: Fonksiyonelin $\mathbf{y}(t)$ fonksiyonuna bağlı artışı
$d\mathbf{f}$	: $\mathbf{f}$ nin diferansiyeli
$\dot{\mathbf{f}}$	: $\mathbf{f}$ nin türevi
$(\cdot)_*$	: Optimallik şartı
L	: Lagrange denklemi
$\mathbf{p}(t)$	: Lagrange çarpanı (co-state fonksiyonu)
$\delta \mathbf{y}(t)$	: Durum fonksiyonunun varyasyonu
$\delta \mathbf{v}(t)$	: Kontrol fonksiyonunun varyasyonu
H	: Hamilton denklemi (Pontryagin fonksiyonu)
$\max$	: Maksimum
$\min$	: Minimum

1. GİRİŞ

Ortada var olan bir problemin çözümüne yönelik birkaç seçenek varsa doğal olarak bunların içerisinde en iyisi seçilecektir. Ayrıca doğada meydana gelen olayların çoğunun optimizasyon kaynaklı olması da çok ilginç bir durumdur. Burada büyük matematikçi Leonhard Euler' in (1707-1783) şu sözünü hatırlatalım:

“Doğada bir maksimum veya minimum anlamı taşımayan hiçbir şey yoktur.”

Optimal sözcüğü Latince *“optimus”* sözcüğünden gelmekte ve anlam olarak *“en iyi”* demektir.

Optimal çözümü bulmak için maksimum ya da minimum problemi çözmek gerekmektedir.

Maksimum ve minimum terimlerinin yerine ekstremum (uç) sözcüğü de kullanılabilir; dolayısıyla maksimum ve minimum problemlerine *“ekstremal problemler”* denir.

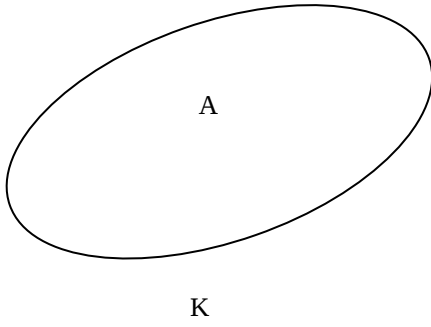
Varyasyon Hesabı optimal kontrol sistemlerinin temelini oluşturur ve optimizasyonun küçük bir bölümüdür [1].

1.1 Birkaç Önemli Ekstremal Problemler

Ekstremal problemlerin ortaya çıkması çok eskilere dayanmaktadır.

İlk ekstremal problem şu şekildedir:

Bir düzlem içerisinde uzunluğu verilmiş olan kapalı eğriler içerisinde öyle bir tanesini bulunuz ki kapladığı alan maksimum olsun.



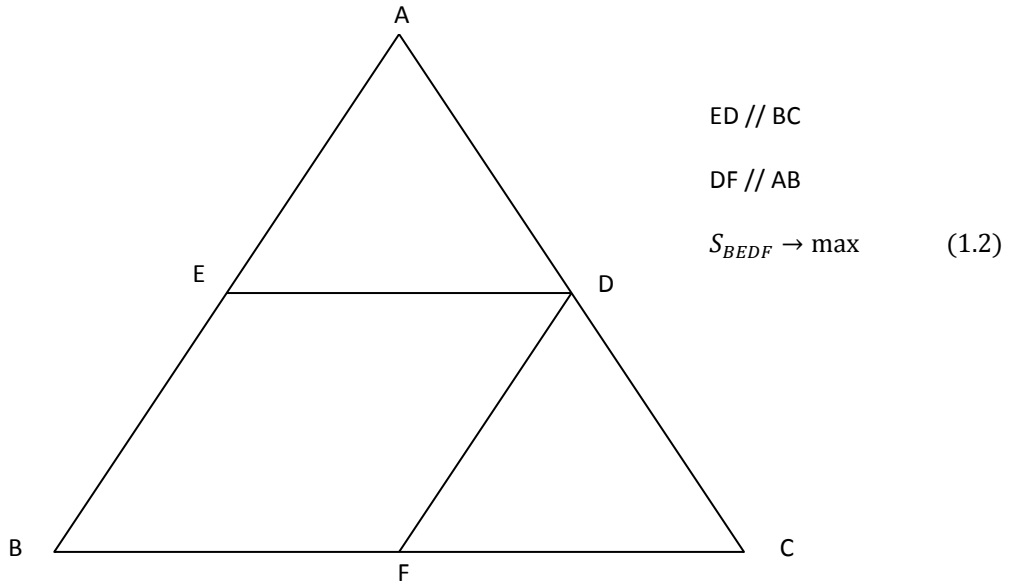
$$\begin{aligned} A &\rightarrow \max \\ K &= \text{sabit} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Şekil – 1.1 Dido problemi

Archimedes (M.Ö. 287-212) dido probleminin çözümünün çember olabileceğini tahmin etmesine rağmen bu iddianın ispatlanması iki bin sene sonra gerçekleşebilmiştir. Problem, çok daha sonraları geliştirilen varyasyon hesabı teorisinin izoperimetrik problemler sınıfına dahil bir problemdir ve bu teori içinde çözülmüştür.

Ekstremal problemleri eski çağın büyük matematikçileri Euclid (M.Ö. 325-265), Archimedes (M.Ö. 287-212), Apollonius (M.Ö. 262-190)' un eserlerinde bulmak mümkündür.

Örneğin Euclid' in “Başlangıç” kitabında şu problem bulunmaktadır.



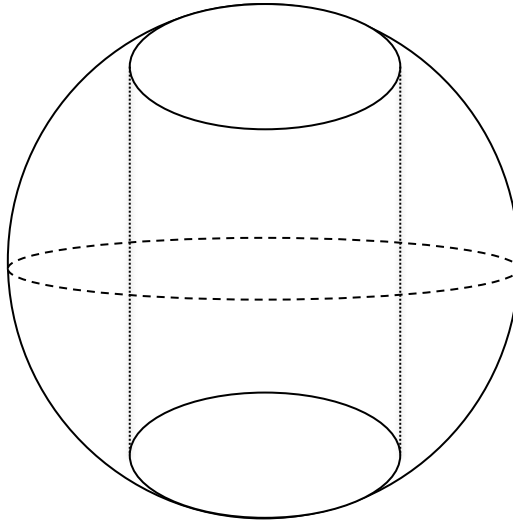
Şekil – 1.2 Euclid Problemi

ABC üçgeninde AB kenarı üzerinde öyle bir E noktası bulunuz ki BEDF paralel kenarının alanı en büyük olsun.

Eski çağ uygarlığının yok edilmesiyle 15. Yüzyıla kadar Avrupa’da bilimde durgunluk yaşansa da 16. Yüzyılda cebirin temelini atılmasıyla cebirsel ekstremal problemler ortaya çıkmıştır.

Örneğin Johannes Kepler (1571-1630) “Nova Stereometria Doliorum (Fıçıların Yeni Stereometrisi, 1615)” kitabında bazı ekstremal problemler çözmüştür.

“Kürenin içine yerleştirilmiş maksimum hacimli silindir problemi” bunlardan biridir [4], [10].



Şekil – 1.3 Kepler problemi

1.2 Varyasyon İlkeleri

Fizik problemleri için ilk varyasyon prensibi P.Fermat tarafından ortaya çıkarılmıştır.

P.Fermat ışının yansıma kanununa başka bir yaklaşım düşünerek ışının iki nokta arasındaki mesafeyi en kısa zamanda geçmesi düşüncesini ortaya atmıştır.

Bu yaklaşıma geometrik optikte “*Fermat’ın Varyasyon İlkesi*” denir.

Fermat’ın varyasyon ilkesinden başka varyasyon ilkeleri de bulunmuştur [4].

1.3 Brachistochrone Problemi

1696 yılında J. Bernoulli (1667-1748)’ nin yayınladığı “Yeni Bir Problem Çözmek İçin Matematikçilere Davet (Problema Novum, Ad Cujus Solutionem Mathematici Invitantur)” isimli yazıda şu problem ortaya atılır:

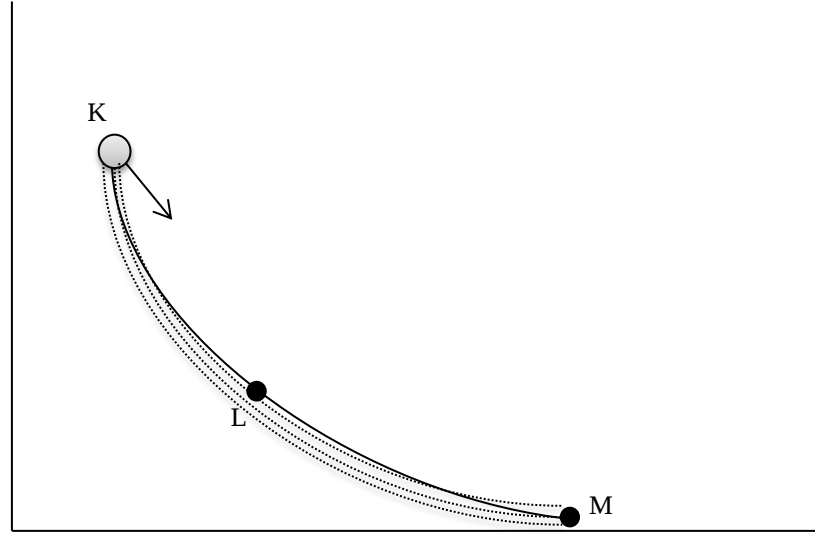
Düşey düzlemde K ve M noktaları verilmiş olsun. Öyle bir KLM yolu bulunuz ki cisim kendi ağırlığının etkisi ile K’ dan M’ ye en kısa zamanda gelsin.

Galileo bu eğrinin çember yayı olduğunu tahmin etmesine karşın J. Bernoulli KLM eğrisinin dairemsi (cycloidal) olduğunu ispat etmiştir.

Brachistochrone probleminin önceki problemlerden önemli bir farkı vardır. Bu problem sonsuz boyutlu ekstremal problemidir.

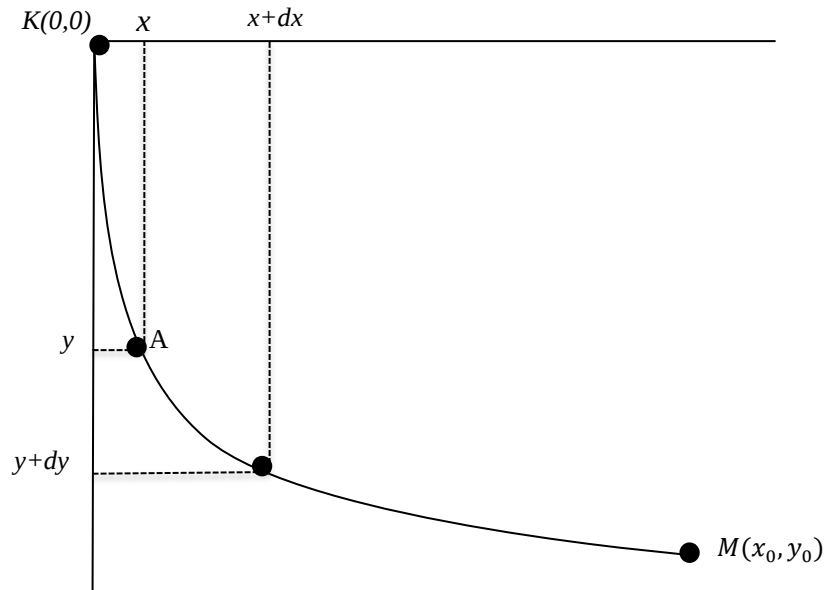
Brachistochrone problemine kadar ki ekstremal probleminin hepsi tek değişkenli fonksiyonların ekstremumu problemidir. Fakat Brachistochrone probleminde ise eğriler kümesinde verilen fonksiyonun (K’ den M’ ye geçen zaman KLM eğrisinin fonksiyonudur.) minimum problemini çözmek gerekmektedir. Eğriler kümesi ise sonsuz boyutludur.

Brachistochrone uygulamalı matematiğin en önemli alanlarından biri olan varyasyon hesabı teorisinin ilk önemli problemidir.



Şekil – 1.4 Brachistochrone problemi

Brachistochrone probleminin matematik modellemesini yazalım.



Şekil – 1.5 Brachistochrone probleminin matematiksel modellemesi

Şekilde görüldüğü gibi K noktası (0,0) noktası olsun. M noktasının koordinatları da (x_0, y_0) olsun. KM eğrisi xy koordinat sisteminde $y=y(x)$ denklemiyle verilsin. A cisminin (x,y) noktasındaki hızı Galileo (1564-1642) kanununa göre $\sqrt{2gy}$ ye eşittir. Burada g yerçekimi ivmesidir.

Cisim, eğrinin (x,y) den $(x+dx, y+dy)$ ye kadar olan $d\omega = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ uzunluğundaki parçasını $T = \frac{d\omega}{\sqrt{2gy}}$ zamanında geçecektir.

Böylece problemin matematiksel modellemesi şöyle olacaktır.

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min; y(0) = 0, y(x_0) = y_0 \quad (1.3)$$

Optimizasyon teorisi 20. Yüzyılda hızla gelişmeye başlamıştır. Bu durum hem ekonomi hem de mühendislik alanlarında optimizasyonun gelişmesiyle açıklanabilir.

Örneğin diyet ve taşıma problemleri, optimal kontrol problemi 1940' lı yıllarda gelişmeye başlayan “Lineer Programlama” teorisi içerisinde çözülebilen pratik problemlerdir [1], [2].

1.4 Diyet Problemi

Bir hastanedeki hastaların belirli gıdalar ile beslenmesi gerektiğini düşünelim. Her gıda ile birlikte alınan vitamin miktarı ve gıdaların fiyatı bilinmekte olup öyle bir diyet programı uygulayalım ki hastalar en az harcamayla istenilen vitaminleri alabilsin [1].

Bu problemin matematiksel modellemesi şu şekilde olur.

$G_1, G_2, \dots, G_n$ gıdalar, her gıdanın içerdiği vitaminler ise $K_1, K_2, \dots, K_m$ olsun.

G_j gıdasının biriminde K_i vitamininin miktarı α_{ij} olsun. Eğer hasta x_i kadar G_i gıdası alırsa,

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n$ hastanın aldığı K_1 vitamin miktarı,

...

...

$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n$ hastanın aldığı K_m vitamin miktarı olacaktır.

Eğer doktor, her hastasının en az a_1 kadar K_1 , a_2 kadar K_2 , ... a_m kadar K_m vitaminini almasını şart koyarsa problem aşağıdaki hale dönüşür.

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &\geq a_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &\geq a_2 \\ &\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n &\geq a_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n &\geq 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

Eğer bu eşitlikleri sağlayan $(x_1, x_2, \dots x_n)^K$ vektörlerinin sayısı fazla ise problem ekonomik olur.

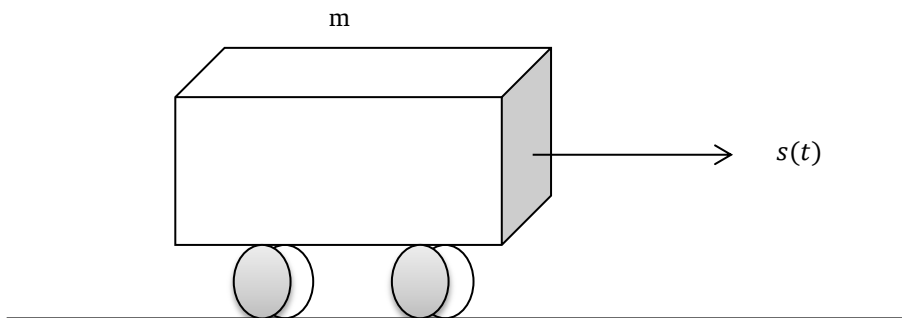
G_i gıdasının birim fiyatının b_i olduğunu varsayarsak G_i gıdasından x_i birim kullanılırsa gıdalar için harcadığımız para miktarı

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \text{ olacaktır.}$$

Böylece aşağıdaki optimizasyon problemini çözmemiz yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n &\rightarrow \min \\ \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n &\geq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{1.5}$$

1.5 Optimal Kontrol Problemi



Şekil 1.6 Optimal kontrol problemi

Kütlesi m olan bir araç $s(t)$ dış kuvvetinin etkisi ile $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ başlangıç durumundan $x = 0$, $\dot{x} = 0$ durumuna en kısa zamanda getirilmek isteniyor.

Sürtünme kuvveti ihmal edildiğinde Newton yasasına göre aracın hareketi

$$m\ddot{x} = s(t) \quad (1.6)$$

denklemleriyle ifade edilir.

$s(t)$ kontrolü $|s(t)| \leq 1$ kısıtlamasını sağlamaktadır.

Öyle bir $s(t)$ kontrolü bulmalıyız ki araç, $(x_0, \dot{x}_0)^T$ durumundan $(0,0)^T$ durumuna en kısa sürede gelebilsin.

İşte bu problem optimal kontrol problemidir.

Bu ve benzeri problemleri inceleyen teori – *Optimal Kontrol Teorisi* – 20. Yüzyılın ortalarında Rus matematikçi Lev Pontryagin (1908 – 1988) tarafından geliştirilmiştir [2].

Optimal kontrol probleminin matematiksel modeli şu şekildedir.

$$\begin{cases} T \rightarrow \min \\ m\ddot{x}(t) = s(t) \\ |s(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

20. yüzyılın ortalarında öyle optimizasyon problemleri ortaya çıkmıştır ki o zamana kadar var olan bilgi ve teorilerle onları çözmek mümkün değildi.

Bunlar varyasyon hesabının problemlerinin genellemesi olan optimal kontrol problemleriydi.

Sovyet Bilimler Akademisi' nin V.A. Steklov Matematik Enstitüsünde 20. Yüzyılın büyük matematikçilerinden biri olan L.S. Pontryagin tarafından optimal kontrol problemlerini araştırmak üzere seminerler düzenlenmiştir.

Bu araştırmaların sonucu olarak 1956-1958 yıllarında L.S. Pontryagin ve öğrencileri tarafından optimal kontrol problemlerinin matematik teorisi geliştirildi.

Optimal Kontrol Teorisi hem optimizasyon teorisinin gelişmesinde hem de matematikte yeni kavram ve teorilerin ortaya çıkmasında önemli bir rol oynamıştır [4].

2. VARYASYONLAR HESABI

Bir ya da daha fazla değişkene bağlı fonksiyonların ekstremumu değerlerinin bulunması diferansiyel denklemleri hesabının konusudur. Varyasyonlar hesabında ise fonksiyonelleri ekstremum yapan fonksiyonlar bulunur.

1687’ de Newton, 1696’ da Jacque ve Jean Bernoulli kardeşler varyasyon hesabının ilk problemlerinden olan Brachistochrone problemi ve izoperimetri problemlerinin çözümleri ile uğraşmışlardır. Daha sonra Euler (1707 – 1783) in bu konudaki esas çalışmaları ile varyasyon hesabı, kendine has inceleme metotları olan, matematiğin bağımsız bir çalışma alanı haline gelmiştir [3].

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Fonksiyon) Bir x değişkeni k değişkeninin bir fonksiyonu ise $x(k) = f(k)$ şeklinde yazılır. k bağımsız bir değişkendir. Her k değerine bir x değeri karşılık geliyorsa bir k sayısına karşılık bir x sayısı vardır.

Tanım 2.1.2 (Fonksiyonel) φ cümlesi bazı şartları sağlayan bir fonksiyonlar cümlesi olsun. φ cümlesindeki her fonksiyona karşı sayısal değer veren kurala, φ fonksiyonlar cümlesinde tanımlı bir fonksiyonel denir. Fonksiyonel birkaç fonksiyona bağlıdır [3].

Tanım 2.1.3 (Bir Fonksiyonun Artış Miktarı) Bir g fonksiyonunun artışı Δg ile gösterilir ve şöyle tanımlanır.

$$\Delta g \triangleq g(t + \Delta t) - g(t) \quad (2.1)$$

Tanımdan da görüldüğü üzere Δg , t bağımsız değişkenine ve Δt bağımsız değişkeninin artışına bağlıdır [3].

Tanım 2.1.4 (Bir Fonksiyonelin Artış Miktarı) F fonksiyonelinin artışı ΔF ile gösterilir ve şöyle tanımlanır.

$$\Delta F \triangleq F(y(t) + \delta y(t)) - F(y(t)) \quad (2.2)$$

Burada $\delta y(t)$, $y(t)$ fonksiyonunun bir varyasyonudur. Bir fonksiyonelin artışı $y(t)$ fonksiyonuna ve $\delta y(t)$ varyasyonuna bağlı olduğu için artış olarak $\Delta F(y(t), \delta y(t))$ yazılabilir [3], [12].

Tanım 2.1.5 (Bir Fonksiyonun Diferansiyeli) g fonksiyonunun artışını bir t noktasında şu şekilde tanımlarız.

$$\Delta g \triangleq g(t + \Delta t) - g(t) \quad (2.3)$$

t nin Taylor serisi $g(t + \Delta t)$ genişletilebilir.

$$\Delta g = g(t) + \left(\frac{dg}{dt}\right) \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2g}{dt^2}\right) (\Delta t)^2 + \dots - g(t) \quad (2.4)$$

Δt de yüksek dereceli terimleri ihmal edersek

$$\Delta g = \left(\frac{dg}{dt}\right) \Delta t = \dot{g}(t) \Delta t = dg \quad (2.5)$$

elde edilir. Burada dg , t noktasında g' nin diferansiyeli olur. $g(t)$, t da g' nin eğimi ya da türevidir [3].

Örnek 2.1.1 $g(t) = t^2 + 4t$ fonksiyonun artışını ve türevini bulunuz [3].

Çözüm: Tanım gereği Δg artışı

$$\begin{aligned} \Delta g &\triangleq g(t + \Delta t) - g(t) \\ &= (t + \Delta t)^2 + 4(t + \Delta t) - (t^2 + 4t) \\ &= 2t\Delta t + 4\Delta t + \dots + \dots \text{yüksek dereceli terimler,} \\ &= 2(t + 2)\Delta t, \\ &= \dot{g}(t)\Delta t \text{ dir.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tanım 2.1.6 (Bir Fonksiyonelin Varyasyonu) Bir fonksiyonelin artış miktarı Taylor serisinde $F(x(t) + \delta x(t))$ genişletilerek

$$\Delta F \triangleq F(x(t) + \delta x(t)) - F(x(t)) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x(t)) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \delta x(t) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) (\delta x(t))^2 + \dots - F(x(t)) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \delta x(t) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) (\delta x(t))^2 + \dots \\ &= \delta F + \delta^2 F + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. Burada

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \delta x(t) \text{ ve } \delta^2 F = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) (\delta x(t))^2 \quad (2.9)$$

dir. Bu eşitliklere sırasıyla F fonksiyonelinin *birinci varyasyonu* ve *ikinci varyasyonu* denir [3], [13].

Örnek 2.1.2

$$F(x(t)) = \int_{t_i}^{t_f} [3x^2(t) + 2x(t) + 5] dt \quad (2.10)$$

Fonksiyonelinin varyasyonunu değerlendiriniz [3].

Çözüm: Öncelikle artışı biçimlendirip sonra da birinci dereceli tahmin olarak varyasyonu bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta F &\triangleq F(x(t) + \delta x(t)) - F(x(t)) , \\ &= \int_{t_i}^{t_f} [3(x(t) + \delta x(t))^2 + 2(x(t) + \delta x(t)) + 5 - (3x^2(t) + 2x(t) + 5)] dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} [6x(t)\delta x(t) + 3(\delta x(t))^2 + 2\delta x(t)] dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

Burada sadece birinci dereceli terimler incelenirse birinci varyasyon şöyle olur.

$$\delta F(x(t), \delta x(t)) = \int_{t_i}^{t_f} [6x(t) + 2] \delta x(t) dt \quad (2.12)$$

2.2. Bir Fonksiyon ve Fonksiyonelin Ekstremumu

Bir fonksiyon ve fonksiyonelin ekstremum (maksimum ya da minimum) veya optimumu için bazı tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

Varyasyon bir fonksiyonun optimal değerini ya da ekstremumunu bulmada diferansiyel olarak çalışır, bir fonksiyonelin optimal değerini bulmada da aynı şekilde çalışır.

Tanım 2.2.1 Bir Fonksiyonun Optimumu

Eğer bir M düzlemindeki tüm noktalar için $|s - s^*| < \varepsilon$ şartını sağlayan bir ε pozitif parametresi varsa bir $f(s)$ fonksiyonunun s^* noktasında bir göreceli optimumu vardır.

$$\Delta f = f(s) - f(s^*) \geq 0 \quad (2.13)$$

ise $f(s^*)$ göreceli lokal minimumdur

$$\Delta f = f(s) - f(s^*) \leq 0 \quad (2.14)$$

ise göreceli lokal maksimumdur.

Yukarıdaki durumlar keyfi bir ε için sağlanırsa bir global tam optimuma sahiptir

Bir fonksiyonun optimumu için gerek şart (ilk) diferansiyelin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Yani $df = 0$ olmalıdır.

Yeter şart ise

- i. Minimum için ikinci diferansiyelin pozitif olmasıdır, $d^2f > 0$ dır ve
- ii. Maksimum için ikinci diferansiyelin negatif olmasıdır, $d^2f < 0$

$d^2f = 0$ ise sabit bir noktaya karşılık gelir [4], [11].

Tanım 2.2.2 Bir Fonksiyonelin Optimumu

Bir F fonksiyonelin $|t - t^*| < \varepsilon$ şartını sağlayan bir D düzlemi içindeki tüm t noktaları için pozitif bir ε varsa t^* da bir göreceli optimum vardır.

$$\Delta F = F(t) - F(t^*) \geq 0 \quad (2.15)$$

ise $F(t^*)$ bir göreceli minimumdur.

$$\Delta F = F(t) - F(t^*) \leq 0 \quad (2.16)$$

ise $F(t^*)$ bir göreceli maksimumdur.

Yukarıdaki durumlar keyfi bir ε için sağlanırsa $F(t^*)$ bir global tam optimumdur.

Fonksiyonların ekstremumu yada optimal değerlerini bulmaya benzer olarak, fonksiyonellerle ilgili varyasyon problemlerinde de, varyasyon optimal bir kavis üzerinde sıfır olmalıdır [4].

Teorem 2.2.1 (Varyasyon Hesabının Temel Teoremi) Bir fonksiyonelin optimumu için gerek şart ilk varyasyonun sıfıra eşit olmasıdır.

$\delta x(t)$ nin tüm kabul edilebilir değerleri için $\delta F(x^*(t), \delta x(t)) = 0$ olmasıdır.

Yeter şart ise

- i. Minimum için yeter şart $\delta^2 F > 0$,
- ii. İkinci varyasyon ve maksimum için $\delta^2 F < 0$ olmalıdır [4].

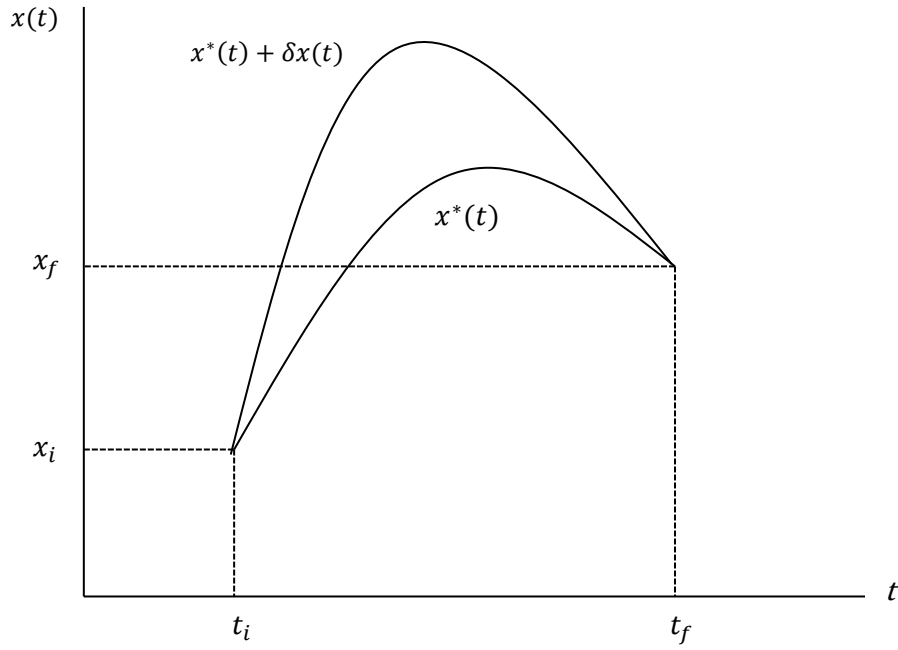
2.3 Temel Varyasyon Problemi (Euler-Lagrange Denklemi)

$$\text{Temel varyasyon problemi } V(x(t)) = \int_{t_i}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.17)$$

şeklinde verilen fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmaktır.

Burada $x(t)$ sürekli, birinci türevli bir fonksiyon, t_i ve t_f sabit ayrıca bitiş noktaları da sabit olmak üzere $x(t = t_i) = x_i$, $x(t = t_f) = x_f$ (2.18)

Optimum için gerek şart bir fonksiyoneli sıfıra eşitleyen varyasyondur.



Şekil 2.1 Sabit-bitiş durumlu ve sabit-bitiş zamanlı sistem

$x(t)$ optimumunu bulmak için ilk olarak $V(x(t))$ için artış tanımlarız daha sonra varyasyon elde ederiz ve en son olarak varyasyon hesabının temel teoremini uyguluyoruz. Bunun sonucunda da temel varyasyon problemini elde ederiz.

Şimdi bu adımları tek tek uygulayalım.

1. *Adım: Bir Optimum Varsayımı:* $x(t)$ fonksiyonu için varsayılan optimum $x^*(t)$ olsun. $x^*(t)$ ye yakın $x_\beta(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ fonksiyonun alalım. $\delta x(t)$, $x^*(t)$ nin varyasyonudur.

$x_\beta(t)$ fonksiyonu (2.18) sınır şartlarını sağlamalıdır ve gerek şart şu şekilde olur.

$$\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0 \quad (2.19)$$

Şimdi de varyasyon ve artış uygulayalım.

2. *Adım: Artış ve Varyasyon:*

$$\begin{aligned}\Delta V(x^*(t), \delta x(t)) &\triangleq V(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} F(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_i}^{t_f} F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\Delta V(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_i}^{t_f} [F(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)] dt$$

(2.21) elde edilir.

Burada

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ ve } \delta \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \{\delta x(t)\} \quad (2.22)$$

dir.

$x^*(t)$ ve $\dot{x}^*(t)$ noktasının Taylor serisi (2.21) artışı içinde F genişletilerek, ΔV artışı

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V(x^*(t), \delta x(t)) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 F(\dots)}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \frac{\partial^2 F(\dots)}{\partial \dot{x}^2} (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 F(\dots)}{\partial x \partial \dot{x}} (\delta x(t) \delta \dot{x}(t)) \right\} + \dots \right] dt\end{aligned}\quad (2.23)$$

haline gelir.

Burada kısmi türevler $x(t), \dot{x}(t), (*)$ ve $*$ optimallik şartında kolaylık olması gerektiğinden ihmal edilir.

Şimdi de ilk varyasyonu uygulayalım.

3. Adım: İlk Varyasyonun Uygulanması: $\delta x(t)$ ve $\delta \dot{x}(t)$ de lineer olan terimler korunma şartıyla varyasyon elde edilir.

$$\Delta V(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt \quad (2.24)$$

$\delta x(t)$ içeren terimlerde (2.24) ilk varyasyonu için bağıntıyı ifade edebilmek için $\delta \dot{x}(t)$ içeren terimlerin integrasyonu ile olur($\delta \dot{x}(t)$, $\delta x(t)$ ye bağlı olduğu için).

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta \dot{x}(t) dt &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \frac{d}{dt} (\delta x(t)) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* d(\delta x(t)) \\ &= \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir.

Burada $\int u dv = uv - \int v du$ formülü kullanılmıştır. ($u = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$, $v = \delta x(t)$)

(2.25) kullanılarak ilk varyasyon için (2.24) bağıntısı şu hale gelir.

$$\begin{aligned} \delta V(x^*(t), \delta x(t)) &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_* \delta x(t) dt + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right]_{t_i}^{t_f} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.19) bağıntısı kullanılarak (2.26) daki sınır değişkenleri için

$$\delta V(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir.

4. Adım: Varyasyon Hesabının Temel Teoreminin Uygulanması

Bu durumda V nin ilk varyasyonu sıfır olmalıdır.

$x^*(t)$ optimumu için $\delta V(x^*(t), \delta x(t)) = 0$ olmalıdır.

Yani $\delta x(t)$ fonksiyonu t_i ve t_f te sıfır olmalıdır. Bunun için keyfidir.

5. Adım: Varyasyon Hesabının Yardımcı Temel Teoreminin Uygulanması

Teorem 2.3.1 (Varyasyon Hesabının Yardımcı Temel Teoremi) $\delta x(t)$ fonksiyonu $[t_i, t_f]$ aralığında sürekli, $f(t)$ fonksiyonu $[t_i, t_f]$ aralığı boyunca her yerde sıfır olmak üzere sürekli her $f(t)$ fonksiyonu için

$$\int_{t_i}^{t_f} f(t) \delta x(t) dt = 0 \quad (2.28)$$

dır [3].

İspat: $f(t)$ fonksiyonunu $[t_a, t_b]$ aralığının bir noktasında sıfırdan farklı kabul edelim. Fonksiyon bu aralıkta sürekli bir fonksiyon olduğu için $[t_a, t_b]$ aralığı içinde, bu noktayı içine alan bir $[t_i^*, t_f^*]$ aralığında $f(t)$ fonksiyonunun mutlak değeri ρ gibi bir sayıdan daha büyük kalacaktır.

Yani $\delta x(t)$ nin (2.28) deki integral değeri sıfırdan farklı olacaktır. Bu da aralık boyunca sıfırdan farklı farz ettiğimiz $f(t)$ ile çelişir. Halbuki $f(t)$ (2.28) de tüm $[t_i, t_f]$ aralığı boyunca her yerde sıfır olmalıdır.

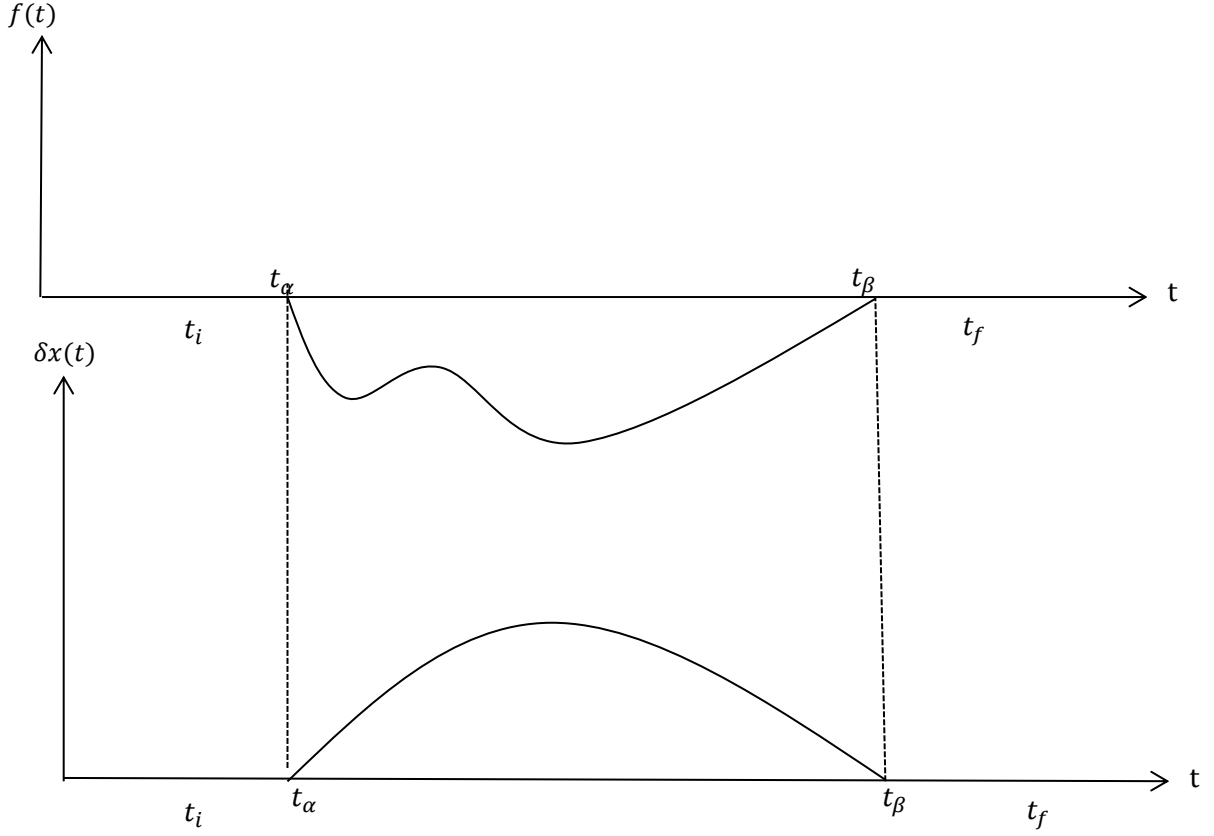
6. Adım: Euler-Lagrange Denklemi: (2.27) ye yukarıdaki teorem uygulandığında $x^*(t)$ için gerek şart (2.17) ile verilen V fonksiyonelinin bir optimali olur.

$$\left(\frac{\partial F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \quad (2.29)$$

Denklem daha basit olsun diye F deki idealar ihmal edilirse tüm $t \in [t_i, t_f]$ için

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \quad (2.30)$$

denklemini elde edilir.



Şekil 2.2 Sıfırdan farklı $f(t)$ ve $\delta x(t)$ keyfisi

Bu denkleme *Euler-Lagrange denklemi* denir [1], [3], [4], [5], [6].

(2.30) Euler-Lagrange denklemi lineer olmayan, ikinci dereceli, iki nokta sınır değerli ve zamanla değişen adı bir diferansiyel denklemdir.

Bir başka ifadeyle bir lineer olmayan iki nokta sınır değer problemidir.

Örnek 2.3.1

$$V = \int_0^3 [3x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt \quad (2.31)$$

$$x(0) = 1, x(3) = 5 \quad (2.32)$$

Sınır şartlarını sağlayan optimumu elde ediniz.

Çözüm: Burada $F = 3x^2(t) + \dot{x}^2(t)$ dir.

(2.31) performans indeksine Euler-Lagrange denklemi uygulanırsa

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \rightarrow 6x(t) - \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) = 3x(t) \quad (2.33)$$

bulunur.

Bu basit diferansiyel denklem çözülürse

$$x^*(t) = \frac{x^3(t)}{2} + C_1 t + C_2 \quad (2.34)$$

C_1 ve C_2 burada integrasyon sabitidir. Sınır şartları kullanılırsa

$$x(0) = 1 \rightarrow C_2 = 1, \quad x(3) = 5 \rightarrow C_1 = -\frac{39}{2}$$

bulunur. Bulunan değerler denklemde yazılırsa

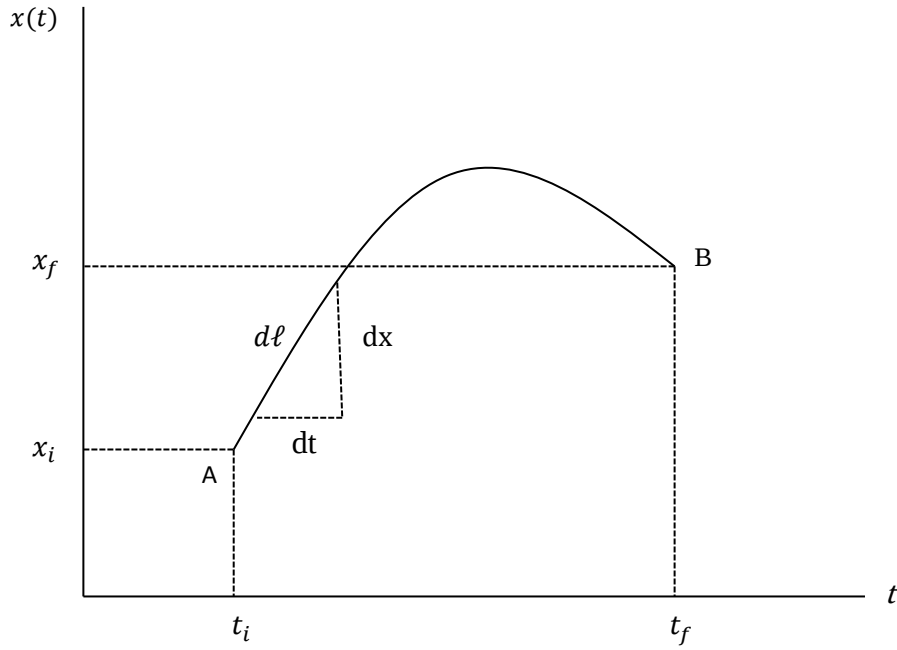
$$x^*(t) = \frac{x^3(t)}{2} - \frac{39}{2}t + 1 \quad (2.35)$$

Optimal fonksiyonu elde edilir.

Örnek 2.3.2 Bir düzlem üzerinde verilen iki nokta arasındaki minimum uzaklığı bulunuz[3].

Çözüm: Bu problemin çözümü bir doğru olur. Alınan noktalar $A(x_0, y_0)$ ve $B(x_1, y_1)$ olsun.

$y = y(x)$ bu iki noktayı birleştiren herhangi bir eğrinin denklemini gösterdiğine göre A ve B noktaları arasındaki eğri yayının uzunluğu;



Şekil 2.3 Yay uzunluğu

$$(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dt)^2 \quad (2.36)$$

dir.

(2.36) denkleminde

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \text{ ve } d\ell = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2}(t) dt \quad (2.37)$$

$x(t = t_i)$ ve $x(t = t_f)$ noktaları arasındaki toplam yay uzunluğu ℓ dir. Minimize edilen ise V performans indeksidir.

$$\ell = V = \int d\ell = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} F(\dot{x}(t)) dt \quad (2.38)$$

Burada $F(\dot{x}(t)) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}(t)$ dir.

F sadece $\dot{x}(t)$ ye bağlı bir fonksiyondur. (2.38) denkleminde Euler-Lagrange denklemini uygulayalım.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0$$

Buradan

$$K = \frac{\dot{x}^*}{(1 + \dot{x}^2)^{3/2}} = 0 \quad (2.39)$$

Denklemini bulunur ve bu denklem çözülerek optimal çözüm

$x^*(t) = C_1 t + C_2$ bulunur ve bu bir doğru denklemidir. O halde ekstremaller $y = mx + n$ şeklinde doğrular olacaktır. Ayrıca (2.39) denkleminde eğri üzerinde alınan her noktada eğriliğin sıfır olduğu görülür.

2.4. İkinci Varyasyon

İkinci varyasyonun başlangıcı Euler-Lagrange denklemi ile başlar.

(2.23) bağıntısındaki artışın terimleri ikinci varyasyona karşılık gelir.

$$\partial^2 V = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_* ((\delta x(t))^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right)_* (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* (\delta x(t) \delta \dot{x}(t)) \right] dt \quad (2.40)$$

Sabit bitiş şartları $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$ kullanılırsa

$$\partial^2 V = \frac{1}{2!} \int_{t_i}^{t_f} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* \right\} (\delta x(t))^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right)_* (\delta \dot{x}(t))^2 \right] dt \quad (2.41)$$

bulunur.

Temel varyasyon teoreminden minimum için yeter şartın $\partial^2 V > 0$ ve maksimum için ise $\partial^2 V < 0$ olduğunu biliyoruz.

Bu ise $\delta x(t)$ ve $\delta \dot{x}(t)$ keyfi değerleri için

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\right)_* > 0 \quad (2.42)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right)_* > 0 \quad (2.43)$$

İfadesinin minimum için yeter şart olacağı anlamına gelir. Maksimum için ise işaretler ters çevrilir.

Literatürde bu şarta Legendre şartı denir [3], [4].

2.5. Şartlarla Fonksiyonların Ekstremumu

Bir şart altında bir fonksiyonun ekstremumunu bulmak için Lagrange çarpan metodu kullanılır. İlk olarak teorem vererek başlayalım.

Teorem 2.5.1 $f(t) = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ gerçekteğerli ve sürekli bir fonksiyon olsun.

Bu fonksiyonun ekstremumu ile ilgili şartlar

$$\begin{aligned} g_1(t) &= g_1(t_1, t_2, t_3, \dots, t_m) = 0 \\ g_2(t) &= g_2(t_1, t_2, t_3, \dots, t_m) = 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ g_n(t) &= g_n(t_1, t_2, t_3, \dots, t_m) = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

şeklindedir. Burada f ve g sürekli kısmi türevlere sahiptir ve $n < m$ dir.

Bu şartlara karşılık Lagrange çarpanı $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ olsun.

Artan Lagrange fonksiyonu şu şekildedir.

$$L(t, p) = f(t) + p^t g(t) \quad (2.45)$$

Burada p^t , p nin transpozudur.

t^* ve p^* optimal değerlerinin çözümü şöyle olur.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + p^t \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = g(t) = 0 \quad (2.47)$$

Lagrange çarpan metodu ilgili sınırlarla fonksiyonunun ekstremumunu bulmada çok önemlidir [4].

2.5.1. Lagrange Çarpan Metodu

Şartlarla verilen problemin ekstremumunu bulmak için Lagrange çarpan metodu kullanılır.

$f(t_1, t_2)$ bir fonksiyon olmak üzere ilgili şart

$$g(t_1, t_2) = 0 \quad (2.48)$$

olsun.

Artan Lagrange fonksiyonu

$$L(t_1, t_2, p) = f(t_1, t_2) + pg(t_1, t_2) \quad (2.49)$$

dir.

Burada kullanılan p Lagrange çarpanıdır.

Lagrange denkleminde (2.48) sınır şartı kullanılırsa

$$L(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) \quad (2.50)$$

bulunur.

Ekstremum için gereken şart

$$dL = df = 0 \quad (2.51)$$

dir. (2.49) Lagrange bağıntısından

$$dL = df + pdg \quad (2.52)$$

olur. Bu denklemi şöyle de yazabiliriz.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t_1} + p \frac{\partial g}{\partial t_1}\right) dt_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t_2} + p \frac{\partial g}{\partial t_2}\right) dt_2 = 0 \quad (2.53)$$

Burada dt_1 ve dt_2 bağımsız değildir. dt_1 bağımsız olarak seçilirse dt_2 bağımlı bir diferansiyel olur. p çarpanı (2.53) deki dt_1 ve dt_2 nin katsayılarından birini sıfır yapmak için seçilebilir. Bu durumda p, p^* değerinde alındığında dt_1 bağımlı diferansiyelinin katsayısı sıfır olur.

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} + p^* \frac{\partial g}{\partial t_2} = 0 \quad (2.54)$$

Böylece (2.53) denklemi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t_1} + p \frac{\partial g}{\partial t_1}\right) dt_1 = 0 \quad (2.55)$$

olur.

dt_1 bağımsız diferansiyel olduğundan keyfi olarak seçilebilir. (2.55) i sağlayan tüm dt_1 ler için dt_1 in katsayısı sıfır olur.

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} + p^* \frac{\partial g}{\partial t_1} = 0 \quad (2.56)$$

dır. (2.49) dan

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad (2.57)$$

(2.48) sınır bağıntısı meydana gelir.

(2.54), (2.56) ve (2.57) den sonuçlar birleştirilirse

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t_1} + p^* \frac{\partial g}{\partial t_1} = 0 \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial t_2} + p^* \frac{\partial g}{\partial t_2} = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = g(t_1^*, t_2^*) \quad (2.60)$$

bulunur. Bu denklemler çözülürse t_1^*, t_2^*, p^* elde edilir. (2.58) ve (2.59) arasından p^* yok edilirse

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial t_2}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial t_2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial t_1}\right) = 0 \quad (2.61)$$

bulunur.

Sonuç olarak ilgili sınır şart $g(t_1, t_2) = 0$ ile $f(t_1, t_2)$ ekstremum fonksiyonu t_1, t_2, p bağımsız olsalar dahi yalnız bir artan fonksiyonun ekstremumuna eşittir.

Yani $L(t_1, t_2, p) = f(t_1, t_2) + pg(t_1, t_2)$ dir.

(2.5.1) teoremi bu sonucun genellemesini vermektedir [1], [4], [5], [14].

Örnek 2.5.1 Bir esnaf silindirik ve sınırlı olan bir deponun hacmini maksimize etmek ister. Malzemenin inceliği bir sabit olarak kabul edilmekte olup esnaf depoda bulunan malzemelerin hacmini ve depo için maliyetini minimize etmek istemektedir [4].

Çözüm: Malzemenin inceliği ve deponun alanı sabittir. Silindirik deponun çapı ve yüksekliği r ve ℓ olsun. Deponun hacmi

$$V(r, \ell) = \frac{\pi r^2 \ell}{4} \quad (2.62)$$

Deponun alanı ise

$$A_s = A(r, \ell) = \frac{2\pi r^2}{4} + \pi r \ell \quad (2.63)$$

A_s burada sabittir.

Buradaki amaç $A(r, \ell) = A_s$ korunarak deponun hacmini $V(r, \ell)$ maksimize etmektir.

Şimdi bu problemi Lagrange Çarpan Metodu ile çözelim.

$$f(r, \ell) = \frac{\pi r^2 \ell}{4} \quad (2.64)$$

$$g(r, \ell) = \frac{2\pi r^2}{4} + \pi r \ell - A_s \quad (2.65)$$

diyelim.

$$L(r, \ell, p) = f(r, \ell) + p g(r, \ell) = \frac{\pi r^2 \ell}{4} + p \left(\frac{2\pi r^2}{4} + \pi r \ell - A_s \right) \quad (2.66)$$

olur. r, ℓ, p optimal değişkenlerinin bir fonksiyonu L Lagrange fonksiyonu olduğundan $L(r, \ell, p)$ nin her değişkeninin r, ℓ, p ye göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\pi r \ell}{2} + p(\pi r + \pi \ell) = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} = \frac{\pi r^2}{4} + p(\pi r) = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{2\pi r^2}{4} + \pi r \ell - A_s = 0 \quad (2.69)$$

Bu üç bağıntı çözülürse

$$r^* = \sqrt{\frac{2A_s}{3\pi}} \quad , \quad \ell^* = \sqrt{\frac{2A_s}{3\pi}} \quad , \quad p^* = -\sqrt{\frac{A_s}{24\pi}} \quad (2.70)$$

elde edilir.

Sonuç olarak silindirik bir deponun hacmini maksimize edebilmek için deponun çapının yüksekliğine eşit olması gerekmektedir.

3. VARYASYON HESABININ OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİNE UYGULANMASI

3.1 Giriş

Optimal kontrol teorisini verilen bir sistemi kontrolü için *en iyi yolu bulma* olarak tanımlamamız mümkündür.

Optimal kontrolün stratejisi en iyi durumun, en az zaman ve en az emek harcanarak nasıl elde edileceği ile ilgilidir.

Örneğin bir roketin fırlatılması olayını ele alırsak optimal kontrol teorisinin amacının roketin en az yakıt harcaması ve en kısa zamanda hedefine varması için gereken şartlar olarak ifade edebiliriz.

Optimal kontrol problemi teorisinin uygulama olanları oldukça geniştir. Ekonomik problemler, nüfus büyümeleri problemi, kozmik uçuşlar, nükleer reaktörler vb...

İlk optimal kontrol problemleri 1940-1950 li yıllarda ortaya çıkmıştır. Bu yıllarda gelişen teknolojiye kaynaklanan yeni ve karışık problemlerin eski yöntemlerle çözülemeyeceği anlaşılmaktadır.

L.S. Pontryagin ve öğrencileri tarafından bu problemleri çözmek için bir teori geliştirildi.

Temel teoremi Pontryagin' in maksimum prensibi olan bu teori *Optimal Kontrol Teorisi* olarak adlandırıldı [2], [7], [11].

3.2 Optimal Kontrol Probleminin Temel Tanım ve Teoremleri

Kontrol edilen süreci

$$\dot{y} = F(y, v, t) \quad (3.1)$$

diferansiyel denklemi ile tanımlayalım. Bu denklem $[t_0, t_1]$ de verilmiş olsun. $y(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları da bu aralıkta verilmiş olsun.

Burada $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ vektör-fonksiyon, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ koordinat, $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ kontrol vektörüdür [8].

Tanım 3.2.1 $[t_0, t_1]$ de verilen ve

$$v(t) \in V, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (3.2)$$

Durum kısıtlamasını sağlayan parçalı-sürekli $v(t)$ fonksiyonuna *uygun kontrol* denir.

Uygun olan kontrollerin sürekli değil de parçalı-sürekli fonksiyonlardan seçilmesinin nedeni optimal kontrol problemlerinde optimal kontrolün sürekli fonksiyon olmamasından kaynaklanmaktadır.

Bir başka ifadeyle bu sistemler için sürekli kontroller sınıfında optimal kontrol bulunmamaktadır[8].

Aşağıdaki Cauchy problemini göz önüne alıp $y(t)$ yörüngesinin tanımını verelim.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F(y(t), v(t), t), & t_0 \leq t \leq t_i \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tanım 3.2.2

$$F: E^n \times E^m \times [t_0, t_1] \rightarrow E^n \quad (3.4)$$

sürekli fonksiyonu verilsin.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \quad t_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_K < t_1$$

Noktaları aynı $v(t)$ uygun kontrolünün tüm süreksiz noktaları olmak üzere (3.3) Cauchy probleminin $[t_0, \alpha_1]$ de çözümünün olduğunu kabul edelim ve $y(\alpha_1) = y_1$ olsun.

Daha sonra ise

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= F(y(t), v(t), t), & \alpha_1 \leq t \leq \alpha_2 \\ y(\alpha_1) &= y_1\end{aligned}\tag{3.5}$$

(3.3) Cauchy probleminin $[\alpha_1, \alpha_2]$ de çözümünün olduğunu varsayalım ve $y(\alpha_2) = y_2$ olsun.

Daha sonra ise

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= F(y(t), v(t), t), & \alpha_2 \leq t \leq \alpha_3 \\ y(\alpha_2) &= y_2\end{aligned}\tag{3.6}$$

Eğer $y(t)$ fonksiyonunu bu yöntemle $[t_0, t_1]$ de bulabilmek mümkün olursa $y(t)$ *yörüngesine* (3.3) Cauchy probleminin $v(t)$ kontrolüne uygun gelen çözümü denir.

Bu tanımdan anlaşılacağı gibi $y(t)$ sürekli bir fonksiyondur ve $[t_0, t_1]$ de

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} F(y(t), v(t), t) dt\tag{3.7}$$

denklemini sağlar. Ayrıca (3.3) probleminin uygun $u(t)$ kontrolü için $y(t)$ çözümü vardır ve tektir [1].

Optimal kontrol teorisinin esas problemi $(y(t), v(t))$ mümkün süreçleri içinde optimalini bulmaktır.

$$\begin{cases} f_0: E^m \times E^n \rightarrow E \\ \beta: E^m \times E \rightarrow E \end{cases}\tag{3.9}$$

fonksiyonları verilsin.

$$G(y, v) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(y(t), v(t), t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \beta(y(t_1), t_1) \rightarrow \min\tag{3.10}$$

(3.9) kriteri optimal çözümleri karakterize eder [9].

Tanım 3.2.3 (y_*, v_*) verilmiş olan mümkün süreç olsun. Eğer her mümkün (y, v) süreci için $G(y_*, v_*) \leq G(y, v)$ ise (y_*, v_*) sürecine (3.1) probleminin *optimal süreci* veya *minimum çözümü* denir.

$v(t)$ ye *optimal kontrol*, $y(t)$ ye ise *optimal yörünge* denir.

Optimal süreci bulmak için L.S. Pontryagin ve öğrencileri tarafından *maksimum prensibi teoremi* ispat edilmiştir.

Tanım 3.2.4 (Hamilton-Pontryagin Fonksiyonu)

$$G(y, v) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(y(t), v(t), t) dt \rightarrow \min; \quad (3.11)$$

$$\dot{y}(t) = F(y(t), v(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.12)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1 \quad (3.13)$$

$$v(t) \in V, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Şeklinde verilen bir problemi ele alalım. Bu problemde t_0, t_1, y_0, y_1 sabittirler.

$$f(y, v, t) = (f_1(y, v, t), \dots, f_m(y, v, t))^T$$

dir. $f_0, f_1, \dots, f_m$ fonksiyonlarının $y_0, y_1, \dots, y_m$ değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = f_{0y} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial y_1}, \frac{\partial f_0}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial y_m} \right) \quad (3.15)$$

olacak şekilde işaretleyelim.

$f_j(y, v, t)$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $f_y(y, v, t)$, $f_{0y} = (y, v, t)$ fonksiyonların

$(y, v, t) \in E^m \times E^n \times [t_0, t_1]$ değişkenine göre sürekli olduğunu kabul edelim.

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T \in E^m$ olsun.

$$\begin{aligned} H(y, v, t, \varphi, \varphi_0) &= \varphi_0 f_0(y, v, t) + \varphi_1 f_1(y, v, t) + \dots + \varphi_m f_m(y, v, t) \\ &= \varphi_0 f_0(y, v, t) + [\varphi, f(y, v, t)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde oluşturulan

$$H: E^m \times E^n \times [t_0, t_1] \times E^m \times E \rightarrow E \quad (3.17)$$

fonksiyonuna *Hamilton-Pontryagin Fonksiyonu* denir [2].

Tanım 3.2.5 $(y(t), v(t))$, $t_o \leq t \leq t_1$ uygun süreci için

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))^T$ değişkenlerinin sağladığı lineer diferansiyel denklemler sistemini yazarsak

$$\dot{\varphi}_i(t) = \frac{\partial H(y(t), v(t), t, \varphi(t), \varphi_0)}{\partial \varphi_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.18)$$

sistemine $(y(t), v(t))$ sürecine karşı gelen *eşlenik sistem* denir.

Burada $\varphi_0(t) = \varphi_0$, t ' den bağımsızdır.

(3.18) sistemini vektör şeklinde de yazabiliriz.

$$\dot{\varphi}(t) = -H_y(y(t), v(t), t, \varphi(t), \varphi_0) \quad (3.19)$$

veya

$$\dot{\varphi}(t) = -\varphi_0 f_{0y}(y(t), v(t), t)^T - F_y(y(t), v(t), t)^T \varphi(t), \quad t_o \leq t \leq t_1 \quad (3.20)$$

Şimdi de (3.10)-(3.13) probleminde optimal kontrolü bulmak için gerekli koşul olan maksimum ilkesini yazalım.

Teorem 3.2.1

$(y(t), v(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (3.10) – (3.13) probleminde optimal olsun. O halde öyle φ sabit sayısı ve $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında belirlenmiş sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonu vardır ki;

- a) $\varphi_0 \leq 0$, $|\varphi_0| + \|\varphi(t)\| \neq 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (3.21)
- b) $\varphi(t)$, (3.30) eşlenik sisteminin çözümüdür.
- c) Her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$H(y(t), v(t), t, \varphi(t), \varphi_0) = \max_{v \in V} H(y(t), v(t), t, \varphi(t), \varphi_0) \quad (3.22)$$

dir. (3.21) durumu bu teoremin esas koşuludur ve $(y(t), v(t))$ optimal çözüm ise, Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun her t zamanında maksimumunu optimal kontrolün $v = v(t)$ değerinde aldığını göstermektedir [2].

Örnek 3.2.1

$$G(y, v) = \int_0^{t_1} (y^2(t) + v^2(t)) dt \rightarrow \min \quad (3.23)$$

$$\dot{y}(t) = v(t), \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$y(0) = y(t_1) = 0$$

$$v \in E, \quad t_1 > 0$$

probleminin optimal çözümünü bulunuz [2].

Çözüm: Bu problem (3.10) – (3.13) şeklindedir. Burada

$t_0 = 0$, $f_0(y, v, t) = y^2 + v^2$, $V = E$, $y_0 = y_1 = 0$ dir. Problemin optimal çözümü

$y(t) = 0$, $0 \leq t \leq t_1$ dir ve $\min G(y, v) = 0$ dir.

Şimdi de Teorem 3.1 in uygulaması ile bu optimal çözümü bulalım.

Hamilton-Pontryagin fonksiyonu

$$H(y, v, \varphi, \varphi_0) = \varphi_0(y^2 + v^2) + \varphi v \quad (3.24)$$

Eşlenik denklem $\dot{\varphi} = -2\varphi_0 x$ dir.

Eğer $\varphi_0 = 0$ olsaydı H fonksiyonunun v değişkenine göre maksimumunun mevcut olması için $\varphi = 0$ olmalıdır. Halbuki Teorem (3.1) e göre $(\varphi_0, \varphi) \neq 0$ olmalıdır. O halde $\varphi_0 \neq 0$ olmalıdır. Biz $\varphi_0 = -1$ alabiliriz. Bu durumda

$H = -y^2 - v^2 + \varphi v$ fonksiyonu E de $v = \frac{\varphi}{2}$ noktasında maksimum olur. (3.20) eşlenik denklemini de göz önüne alırsak

$$\dot{y} = \frac{\varphi}{2}, \quad \dot{\varphi} = 2y, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$y(0) = y(t_1) = 0$ sınır problemini alıyoruz.

Bu sistemin çözümü $y(t) = \varphi(t) = 0$. $0 \leq t \leq t_1$ dir.

$y(t) = \frac{\varphi(t)}{2}$ den $\varphi(t) = 0$,. $0 \leq t \leq t_1$ elde edilir.

O halde optimal süreç

$$(y(t), v(t)) = (0, 0), \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.25)$$

olur.

3.3 Varyasyon Hesabının Optimal Kontrol Sistemlerine Uygulanması

Bu bölümde varyasyon hesabı kullanılarak optimal şartların elde edilmesi konularının gelişimi anlatılmaktadır.

3.3.1 Adım 1: Fonksiyonelin Optimizasyonu ve Şartı

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(y(t), \dot{y}(t), t) dt \quad (3.26)$$

$$y(t_i) \text{ sabit, } y(t_f) \text{ serbest} \quad (3.27)$$

Sınır şartları verilsin.

$y^*(t)$ optimal fonksiyonu Euler-Lagrange denklemini sağlamalıdır.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_* = 0 \quad (3.28)$$

Optimum yeter şart için Legendre şartı şöyle olur.

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}\right)_* > 0 \text{ minimum için} \quad (3.29)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}\right)_* < 0 \text{ maksimum için} \quad (3.30)$$

Bağıntı şartı ise

$$g(y(t), \dot{y}(t), t) dt = 0 \quad (3.31)$$

dır ve burada (3.27) şartı, artan fonksiyonel formuyla

$$J_\beta = \int_{t_i}^{t_f} L(y(t), \dot{y}(t), p(t), t) dt \quad (3.32)$$

dır.

Burada $p(t)$ Lagrange çarpanıdır (co-state fonksiyonu da denir.)

Lagrange denklemi

$$L(y(t), \dot{y}(t), p(t), t) = F(y(t), \dot{y}(t), t) - p^t(t)(y(t), \dot{y}(t), t) \quad (3.33)$$

şeklinde olur.

Optimal şartta $y(t)$ ve $p(t)$ için artan fonksiyonel Euler-Lagrange denklemi vardır.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)_* = 0 \quad \text{durum denklemi} \quad (3.34)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)_* = 0 \quad \text{co - state denklemi} \quad (3.35)$$

(3.27) ile L Lagrange denklemi $p^*(t)$ den bağımsızdır. $p(t)$ co-state denklemi için (3.31) sınır bağıntısı önemli olmasına karşın Lagrange denklemi önemsizdir.

3.3.2 Adım 2: Optimal Kontrol Sisteminin Lagrange Denklem Formuyla Yazılması

Standart kontrol sistemi

$$\dot{y}(t) = f(y(t), v(t), t) \quad (3.36)$$

şeklinde ve sınır şartları

$$y(t_i) \text{ sabit, } y(t_f) \text{ serbest} \quad (3.37)$$

Performans indeksi

$$J(v(t)) = \int_{t_i}^{t_f} F(y(t), v(t), t) dt \quad (3.38)$$

dir. (3.31) bağıntı şartı olarak (3.36) sistem denklemi

$$g(y(t), \dot{y}(t), v(t), t) = f(y(t), v(t), t) - \dot{y}(t) = 0 \quad (3.39)$$

(3.32) performans indeksinin (3.33) bağıntı şartının artan fonksiyoneli

$$J_\beta(v(t)) = \int_{t_i}^{t_f} L(y(t), \dot{y}(t), v(t), p(t), t) dt \quad (3.40)$$

dir. Burada L Lagrange denklemi

$$\begin{aligned} L &= L(y(t), \dot{y}(t), v(t), p(t), t) \\ &= F(y(t), v(t), t) + p^t(t) [f(y(t), v(t), t) - \dot{y}(t)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

1. Adımın sonuçları kullanılır.

Optimal şartta $y(t), p(t), v(t)$ terimleriyle verilmiş olan (3.40) artan fonksiyoneli için (3.34) ve (3.35) Euler-Lagrange denklemleri vardır.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right)_* = 0 \quad \text{durum denklemi} \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial p} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right)_* = 0 \quad \text{co - state denklemi} \quad (3.43)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right)_* = 0 \quad \text{kontrol denklemi} \quad (3.44)$$

(3.41) deki L Lagrange denklemi $\dot{p}^*(t), \dot{v}^*(t)$ den bağımsızdır.

3.3.3 Adım 3: Optimal Kontrol Sisteminin Hamilton Denklem Formuyla Yazılması (Pontryagin Prensibi)

Lagrange denklem formundan Hamilton denklem formuna geçiş için Hamilton denklemi yazılabilir.

$$H(y(t), v(t), p(t), t) = F(y(t), v(t), t) + p^t(t) f(y(t), v(t), t) \quad (3.45)$$

(3.38) Lagrange denkleminde

$$L(y(t), \dot{y}(t), v(t), p(t), t) = H(y(t), v(t), p(t), t) - p^t(t) \dot{y}(t) \quad (3.46)$$

halini alır.

(3.46) kullanılarak (3.42), (3.43), (3.44) Euler-Lagrange denklemleri Hamilton denklemleri olarak tekrar yazılırsa

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_* - \frac{d}{dt}(-p^*) = 0 \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_* - \dot{y}^*(t) - \frac{d}{dt}(0) = 0 \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_* - \frac{d}{dt}(0) = 0 \quad (3.49)$$

Böylece

$$\dot{y}^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_* \quad \text{durum denklemi} \quad (3.50)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_* \quad \text{co - state denklemi} \quad (3.51)$$

$$0 = +\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_* \quad \text{kontrol denklemi} \quad (3.52)$$

Yeter şart

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right)_* > 0 \quad \text{minimum} \quad (3.53)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right)_* < 0 \quad \text{maksimum} \quad (3.54)$$

Böylece (3.50), (3.51), (3.52) durum, co-state ve kontrol denklemleri (3.27) başlangıç şartı ile çözülmüş olur [7], [8], [9], [11], [12].

Örnek 3.3.1 Çift integralli sistem

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = v(t) \end{cases} \quad (3.55)$$

ve performans indeksi

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} v^2(t) dt \quad (3.56)$$

verilsin.

$$y(0) = [1 \ 2]^t; \quad y(2) = [1 \ 0]^t \quad (3.57)$$

verilen sınır şartları ile optimal kontrol ve durumu bulunuz [4].

Çözüm: Öncelikle (3.55) sistemi ve (3.56) performans indeksi ile (3.26) sistemi ve (3.27) performans indeksi genel formülünü karşılaştırsak

$$F(y(t), v(t), t) = F(v(t)) = \frac{1}{2} v^2(t)$$
$$F(y(t), v(t), t) = [f_1 \ f_2]^t \quad (3.58)$$

tanımlanır.

Burada $f_1 = y_2(t)$, $f_2 = v(t)$ dir.

1. *Adım:* Hamilton denklem fonksiyonu şu şekildedir.

$$\begin{aligned} H &= H(y_1(t), y_2(t), v(t), p_1(t), p_2(t)) \\ &= F(v(t)) + p^t(t) f(y(t), v(t)) \\ &= \frac{1}{2} v^2(t) + p_1(t) y_2(t) + p_2(t) v(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

2. *Adım:* Aşağıdaki bağıntı ile $v^*(t)$ bulunur.

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 \rightarrow v^*(t) + p_2^*(t) = 0 \rightarrow v^*(t) = -p_2^*(t) \quad (3.60)$$

3. *Adım:* 1.adımda 2. adımın sonuçları kullanılarak H^* optimali bulunur.

$$\begin{aligned} H^*(y_1^*(t), y_2^*(t), p_1^*(t), p_2^*(t)) &= \frac{1}{2} p_2^{*2} + p_1^*(t) y_2^*(t) - p_2^{*2} \\ &= p_1^*(t) y_2^*(t) - \frac{1}{2} p_2^{*2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

4. *Adım:* Durum ve co-state denklemleri

$$\begin{cases} \dot{y}_1^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right)_* = y_2^*(t) \\ \dot{y}_2^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial p_2} \right)_* = -p_2^*(t) \\ \dot{p}_1^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial y_1} \right)_* = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial y_2} \right)_* = -p_1^*(t) \end{cases} \quad (3.62)$$

denklemlerinin çözümleri ile bulunur.

Optimal co-state ve optimal durum denklemleri şu şekilde olur.

$$\begin{cases} y_1^*(t) = \frac{K_3}{6} t^3 - \frac{K_4}{2} t^2 + K_2(t) + K_1 \\ y_2^*(t) = \frac{K_3}{2} t^2 - K_4(t) + K_2 \\ p_1^*(t) = K_3 \\ p_2^*(t) = -K_3(t) + K_4 \end{cases} \quad (3.63)$$

5. *Adım:* Optimal kontrol

$$v^*(t) = -p_2^*(t) = K_3(t) - K_4 \quad (3.64)$$

ile elde edilir.

Burada K_1, K_2, K_3, K_4 (3.51) sınır şartları kullanılarak değerlendirilen sabitlerdir.

$$K_1 = 1, K_2 = 2, K_3 = 3, K_4 = 4 \quad (3.65)$$

Sonuç olarak co-state'ler, optimal durumlar ve optimal kontrol bulunur.

$$\begin{cases} y_1^*(t) = \frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + 2t + 1 \\ y_2^*(t) = \frac{3}{2}t^2 - 4t + 2 \\ p_1^*(t) = 3 \\ p_2^*(t) = -3t + 4 \\ v^*(t) = 3t - 4 \end{cases} \quad (3.66)$$

3.3.4 Bazı Önemli Özellikler

Varyasyon hesaplamada optimal şartları elde ederken kullanılan yöntemin farklı özelliklerini ifade edelim.

i. *Lagrange Çarpanının Önemi:* Lagrange çarpanı $p(t)$, bir diğer adı olan co-state değişkeni her $y(t)$ ve $v(t)$ değişkeni için her biri sistem denkleminin bağlı olmasına rağmen, bağımsızmış gibi Euler-Lagrange denkleminin kullanılmasına olanak verir.

ii. *Hamilton ve Lagrange Denklemi:* Hamilton ve Lagrange denklemini tanımlarız.

$$L(y(t), \dot{y}(t), p(t), v(t), t) = F(y(t), v(t), t) + p^t(t) [f(y(t), v(t), t) - \dot{y}(t)] \quad (3.67)$$

$$H(y(t), v(t), p(t), t) = F(y(t), v(t), t) + p^t(t) f(y(t), v(t), t) \quad (3.68)$$

iii. *Hamilton Denklemi Optimizasyonu:* $0 = + \left(\frac{\partial H}{\partial v} \right)_*$ (3.52) kontrol denklemi $v(t)$ kontrolü ile Hamilton denkleminin optimizasyonunu gösterir.

$v(t)$ kontrolünün sınırsız olduğu kabul edilerek $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$ kontrol bağıntısı elde edilir.

$v(t)$ deki sınır ne olursa olsun $v(t)$ Hamilton denklemini minimize etmek için seçilir.

$v(t)$, optimal kontrol teorisine Pontryagin' in en önemli katkısı olan H fonksiyonunu optimize etmek için seçilir. Bu şekildeki yaklaşıma *Pontryagin Prensibi* denir.

Kısıtlı kontrol

$$\min_{v \in V} H(y^*(t), p^*(t), v(t), t) = H^*(y^*(t), p^*(t), v^*(t), t) \quad (3.69)$$

dir. Şu şekilde de yazılabilir.

$$H(y^*(t), p^*(t), v^*(t), t) \leq H(y^*(t), p^*(t), v(t), t) \quad (3.70)$$

iv. *Pontryagin' in Maksimum Prensibi:* Pontryagin maksimize eden performans indeksini minimize eden performans indeksi yerine kullanarak adını Pontryagin' in Maksimum Prensibi koymuştur.

Bu yüzden Hamilton denklemi *Pontryagin H-fonksiyonu* olarak da adlandırılır. J performans indeksinin minimizasyonu $-J$ nin maksimizasyonuna eşittir.

$$H(y(t), v(t), p(t), t) = -F(y(t), v(t), t) + p^t(t) f(y(t), v(t), t) \quad (3.71)$$

v. *Optimal Şartta Hamilton Denklemi:* Optimal şartta Hamilton denklemi şu şekilde yazılır.

$$H^* = H^*(y^*(t), p^*(t), v^*(t), t) \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH^*}{dt} &= \frac{dH^*}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_*^t \dot{y}^*(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_*^t \dot{p}^*(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial v} \right)_*^t \dot{v}^*(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_*^t \end{aligned} \quad 3.73)$$

Bu denklemde (3.50), (3.51) ve (3.52) durum, co-state ve kontrol denklemleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_* = \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_* \quad (3.74)$$

Optimal yörünge boyunca H 'nin zamana bağlı toplam türevi, H 'nin zamana bağlı kısmi türevine eşittir.

H, t ye bağlı olmadığı durumda ise

$$\left.\frac{dH}{dt}\right|_* = 0 \quad (3.75)$$

dır.

Bu da bize gösterir ki H optimal yörünge boyunca t zamanına bağlı bir sabittir [13], [14].

4. OPTİMAL KONTROL VE VARYASYON HESABI PROBLEMİNİN BİRBİRLERİYLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde optimal kontrol ve varyasyon hesabı problemlerinin karşılaştırılması bir tablo halinde özet olarak verilmiştir.

VARYASYON HESABI	OPTİMAL KONTROL
Temel varyasyon problemi hem başlangıç ve bitiş zamanı sabit ve aynı zamanda durumu da sabit, birinci türevi olan $y(t)$ fonksiyonundan oluşur.	Optimal kontrol problemi ise $v(t)$ kontrol değişkeni ve $y(t)$ durum değişkenlerinden oluşur.
Bir fonksiyon ya da fonksiyonelin optimumunu bulmayı hedefler.	Verilmiş olan başlangıç şartlarına bağlı olarak kontrol ve durum değişkenlerini bulmayı hedefler.
Temel varyasyon probleminin çözümünde a. Euler-Lagrange denklemi b. Birinci ve ikinci varyasyon c. Artış miktarı d. Lagrange çarpan metodu kullanılır.	Optimal kontrol probleminin çözümünde a. Lagrange çarpan metodu b. Pontryagin prensibi c. Hamilton denklemi kullanılır.
Sonuç olarak başlangıç ve bitiş zamanları sabit olan ve aynı zamanda sabit durumlu fonksiyonun optimumu bulunur.	Sonuç olarak uygun olan optimum kontrol parametresi bulunur.

Tablo 4.1 Optimal kontrol ve varyasyon hesabı probleminin karşılaştırılması [10], [14].

KAYNAKLAR

- [1] **Sasane, A.**, 2004. Calculus of Variations and Optimal Control, Virginia.
- [2] **Pontryagin L., S.**, 1962. The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley, New York.
- [3] **Gökhan, G.**, 1978. Varyasyonlar Hesabı, İstanbul.
- [4] **Naidu, D., S.**, 2002. Optimal Control Systems, CRC Press, Idaho State University, Pocatello, Idaho, USA.
- [5] **Arthurs, A.**, 1992. Calculus of Variations, New York.
- [6] **Bryson, A.**, 1975. Applied Optimal Control, Taylor, Francis, USA.
- [7] **Barrierre, R.**, 1967. Optimal Control Theory, Dover Publications, New York.
- [8] **Hocking, L.**, 1991. Optimal Control, Clarendon Press, Oxford.
- [9] **Troutman, J., I.**, 1996. Variational Calculus and Optimal Control; Optimization with Elementary Convexity 2nd edition, Springer.
- [10] **Lebedev, L., P. and Cloud, M., J.**, 2003. The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Application in Mechanic, World Scientific.
- [11] **Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Pontryagin L. S.**, On the theory of optimal processes. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 110:7-10, 1956. (in Russian).
- [12] **Bryson A. E., Denham, W. F. and Dreyfus, S. E.**, Optimal programming problems with inequality constraints, I: Necessary conditions for extremal solutions. AIAA Journal, 1(3):2544-2550, 1963.
- [13] **Gamkrelidze, R. V.**, Discovery of the Maximum Principle. Journal of Dynamical and Control Systems, 5(4):437-451, 1999.
- [14] **McShane, E. J.**, The calculus of variations from the beginning through optimal control theory. SIAM Journal of Control and Optimization, 27:916-939, September 1989.