

769356

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
KUVVETLİ $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]$ TOPLANABİLİR DİZİ UZAYLARI

Yusuf KIRAÇ

Tez Yöneticisi:
Prof.Dr. Rifat Çolak

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2005

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
KUVVETLİ $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]$ TOPLANABİLİR DİZİ UZAYLARI

Yusuf KIRAÇ
Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /~~oyçok~~
~~luğu~~ ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman:

Üye:

Üye:

Üye:

Üye:

Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

E. G. G. G.

Prof. Dr. Fahrettin GÖĞTAŞ d. l. l. l. l.

Yrd. Doç. Dr. Gökdem BEKTAŞ.

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..*16/09*.../..*2005*
tarih ve ..*2005/31-1*... sayılı kararıyla onaylanmıştır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ KUVVETLİ $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]$ TOPLANABİLİR DİZİ UZAYLARI

Yusuf Kırac

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2005, Sayfa: 51

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi ve kuvvetli p Cesaro yakınsaklık incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; λ -istatistiksel yakınsaklık incelendi.

Dördüncü bölümde; Δ -dizi uzayları, Δ -istatistiksel yakınsaklık, Δ -istatistiksel Cauchy dizisi, kuvvetli Δ_p -Cesaro yakınsaklık ve genelleştirilmiş fark dizi uzayları incelendi.

Beşinci bölümde; Orlicz dizi uzayları incelendi.

Altıncı bölümde; Orlicz fonksiyonları yardımıyla tanımlanan $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1$, $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ uzayları ve bu uzayların bazı özellikleri verildi.

Yedinci bölümde; $S_\lambda(\Delta_q, u)$ -istatistiksel yakınsaklık verildi.

ANAHTAR KELİMELER: İstatistiksel yakınsaklık, λ -istatistiksel yakınsaklık, Δ -istatistiksel yakınsaklık, Kuvvetli Δ_p -Cesaro yakınsaklık, Orlicz dizi uzayı, $S_\lambda(\Delta_q, u)$ -istatistiksel yakınsaklık

SUMMARY

Masters Thesis

STRONGLY SUMMABLE SEQUENCE SPACES $[V, \lambda, M, \Delta, p, q, u]$ BY DEFINED ORLICZ FUNCTIONS

Yusuf Kırac

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2005,Page:51

This study is prepared as seven chapter.

In the first chapter; the fundemantel definitions and theorems are given.

In the second chapter; statistically convergence, statistically cauchy sequence and Strongly p -Cesaro summability are examined.

In the third chapter; λ -statistically convergence are examined.

In the third chapter; Δ -sequence spaces, Δ -statistically convergence, Δ -statistically cauchy sequence, strong Δ_p Cesaro convergence ve Generalized differance sequence spaces are examined.

In the fifth chapter; Orlicz sequence spaces are examined.

In the sixth chapter; the sequence spaces $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1$, $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ and $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ defined by Orlicz functions and the properties of spaces are given.

In the seventh chapter; $S_\lambda(\Delta_q, u)$ -statistically Convergence are examined.

KEY WORDS: Statistically convergence, λ -statistically convergence, Δ -statistically convergence, strong Δ_p -Cesaro convergence, Orlicz sequence spaces, $S_\lambda(\Delta_q, u)$ -statistically convergence.

TESEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Rifat Çolak'a, bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan Doç. Dr. Mikail Et'e, zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanlarını ve bilgilerini sunan Sayın Dr. Yavuz Altın'a, özellikle beşinci bölümün hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Kemal Özdemir'e, tüm çalışma boyunca her türlü desteğini esirgemeyen eşime ve kızıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
SUMMARY	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
BİRİNCİ BÖLÜM	
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
İKİNCİ BÖLÜM	
2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	8
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
3. λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	16
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM	
4. Δ -DİZİ UZAYLARI	20
BEŞİNCİ BÖLÜM	
5. ORLİCZ DİZİ UZAYLARI	27
ALTINCI BÖLÜM	
6. $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1, [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ	34
YEDİNCİ BÖLÜM	
7. $S(\Delta_q, u)$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	45
KAYNAKLAR	50

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi.

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi.

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi.

w : $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı.

S : İstatistiksel yakınsak diziler uzayları.

S_λ : λ –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi.

$S(\Delta)$: Δ –istatistiksel yakınsak diziler uzayları.

$S(\Delta_q)$: Δ_q –istatistiksel yakınsak diziler uzayları.

$\delta(K)$: K' nın doğal yoğunluğu.

S_0 : Sıfıra istatistiksel yakınsak dizi uzayları.

$S_0(\Delta)$: Sıfıra Δ –istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

w_p : Kuvvetli p –Cesaro toplanabilir diziler uzayı.

$w_p(\Delta)$: Kuvvetli Δ_p –Cesaro toplanabilir diziler uzayı.

$h.h.k$: Hemen hemen tüm k' lar.

ℓ_∞ : Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı.

c : Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı.

c_0 : Kompleks terimli sıfıra yakınsayan diziler uzayı.

$\inf X$: X ' in en büyük alt sınırı, infimumu

$\sup X$: X ' in en küçük üst sınırı, supremumu.

$(X, |||)$: Normlu uzay

$(\hat{X}, |||_{\hat{X}})$: $(X, |||)$ normlu uzayının tamlanması.

(X, d) : Metrik uzay.

Λ : $\lambda = (\lambda_n)$ Pozitif sayıların azalmayan ve sonsuza giden dizilerin kümesi.

I. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel tanım, teorem ve eşitsizliklere yer vereceğiz.

Tanım 1.1.1 X boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X, (\alpha, x) \rightarrow \alpha x$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

L1) $x + y = y + x$

L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

L3) Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır.

L4) Her $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $(-x) \in X$ vardır.

L5) Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$

L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L7) $(a + b)x = ax + bx$

L8) $(ab)x = a(bx)$

Bu durumda X 'e K üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*) ve elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir kompleks vektör uzayı adı verilir [1].

Tanım 1.1.2 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in M$ ve her $c \in K$ için

$$x + y \in M \text{ ve } cx \in M$$

olacak biçimde X' in bir M alt kümesine *alt vektör uzayı* denir.

Tanım 1.1.3 X, K cismi üzerinde bir Lineer uzay ve $L = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ cümlesi X 'in bir alt cümlesi olsun. $\alpha_i \in K$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i = 0$$

olması her bir $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa L cümlesine *lineer bağımsız*, aksi takdirde *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 1.1.4 X, K cismi üzerinde bir Lineer uzay ve B, X 'in bir alt cümlesi olsun. B 'nin elemanları lineer bağımsız ve B, X 'i geriyorsa bu takdirde B 'ye X 'in *bazı (tabanı)* denir.

Tanım 1.1.5 X boş olmayan bir cümle olsun. Her $x, y, z \in X$ için

- i) $d(x, x) = 0$
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. (i), (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan d fonksiyonuna bir yarımetrik, (X, d) ikilisine de yarımetrik uzay denir [1].

Tanım 1.1.6 X, K cismi üzerinde bir Lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

- i) $g(0) = 0$
- ii) $g(x) = g(-x)$
- iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

iv) $\lambda \rightarrow \lambda_0, x \rightarrow x_0$ iken $\lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$, bir başka ifadeyle $|\lambda - \lambda_0| \rightarrow 0, g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$ şartını sağlayan $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa g 'ye total paranorm denir [1].

Tanım 1.1.7 Yarimetriği bir paranormdan elde edilebilen lineer uzaya, lineer yarı metrik uzay ve metriği bir total paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer metrik uzay denir [1].

Tanım 1.1.8 (X, d) metrik uzayında bir $a = (a_k)$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ni \forall i, j > n_0$ için $d(a_i, a_j) < \varepsilon$ olmasıdır [1].

Tanım 1.1.9 Bir metrik uzayda, her Cauchy dizisi metrik uzayın bir noktasına yakınsıyorsa metrik uzaya tamdır denir. Daha açık ifade etmek gerekirse, $i, j \rightarrow \infty$ için $d(x_i, x_j) \rightarrow 0$ olduğunda $i \rightarrow \infty$ için $d(x_i, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa metrik uzaya tamdır

denir [1].

Tanım 1.1.10 Sayılabilir bir yoğun alt cümle içeren (X, d) metrik uzayına ayrılabilir

denir [1].

Tanım 1.1.11 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$(N_1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı veya kısaca normlu uzay denir [2]

Tanım 1.1.12 $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve bu uzay içerisinde bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 1.1.13 $\|\cdot\|$ normuyla tam olan $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayına Banach uzayı denir [2].

Tanım 1.1.14 Bir $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n > n_0$ için

$$\|x_n - s\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $x = (x_n)$ dizisi s 'ye yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ yazılır.

Bu çalışmada kompleks terimli tüm $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w bir lineer uzaydır.

Tanım 1.1.15 w nın her alt lineer uzayına bir *dizi uzayı* denir.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_{\infty} = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.16 X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X' e bir BK (Banach Coordinat) –uzayı denir [3]

Tanım 1.1.17 X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|^{(1)}$ ve $\|\cdot\|^{(2)}$ normları verilsin. Her $x \in X$ için

$$C_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C_2 \|x\|^{(1)}$$

olacak şekilde $C_1 > 0$ ve $C_2 > 0$ sayıları varsa $\|\cdot\|^{(1)}$ ve $\|\cdot\|^{(2)}$ normlarına denk normlar adı verilir.

Teorem 1.1.1 Bir sonlu boyutlu vektör uzayında tanımlı normlar denktir.

Tanım 1.1.18 X ve Y aynı cisim üzerinde iki vektör uzayı olsun. Eğer birebir ve örten $i : X \rightarrow Y$ dönüşümü lineer uzay yapısını koruyorsa i dönüşümü X' den Y' ye bir lineer izomorfizmdir denir. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ birer normlu uzay olduğunda bu i dönüşümü normu koruyorsa, i dönüşümüne lineer izometri denir.

Teorem 1.1.2 $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir vektör uzayı olsun. Bu uzay ile lineer izometrik ve izomorfik olan yoğun bir Y altuzayı bulunan bir $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ Banach uzayı vardır. $(X, \|\cdot\|_X)$ uzayının tamlanması adı verilen $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ Banach uzayı lineer ve izometrik dönüşümlerine bağlı olarak tektir.

Önerme 1.1.1 Her bir k için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ ve $p_k > 0$ olsun. $H = \sup p_k$ olmak üzere,

$$|a_k + b_k| \leq C \{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C = \max(1, 2^{H-1})$ dir [1].

Tanım 1.1.19 (*Minkowski Eşitsizliği*) $p \geq 1$ ve $k = 1, 2, 3, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

References

$$[1] \left[\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{1/p} \text{ eşitsizliği vardır } [2]$$

Tanım 1.1.20 (*Hölder Eşitsizliği*) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $\alpha_i, \beta_i \in K$ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır [2].

Tanım 1.1.21 (*Yarı Norm*) Bir X vektör uzayında tanımlanmış ve her $x, y \in X$ ve her λ skalarları için

$$\begin{aligned} q(x+y) &\leq q(x) + q(y) \\ q(\lambda x) &= |\lambda| q(x) \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan negatif olmayan gerçel q fonksiyonuna *yarı norm* denir. Normdan farklı olarak $x \neq 0$ olduğunda $q(x) = 0$ olabilir. Üzerinde yarı norm tanımlanmış olan uzaya da *yarı normlu uzay* denir.

2. BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık tanımı Fast [4] tarafından kısa bir not olarak verildi. Schoenberg [5] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı özelliklerini verdi. Her iki yazar da sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Salat [6], Connor [7], Maddox [8], Savaş ve Nuray [9], Fridy [10], Fridy ve Orhan [11], ve Kolk [12] tarafından çalışıldı.

2.1 Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bir $K \subset \mathbb{N}$ cümlesindeki x 'e eşit olan ya da x 'den küçük olan pozitif tamsayıların sayısı $K(x)$ ile gösterilsin. Örneğin bir K cümlesi $2,4,6,\dots$ çift tamsayılarından oluşuyorsa $K(1) = 0, K(2) = 1, K(6) = 3, K(7) = 3, K(\frac{15}{2}) = 3 \dots$ dır. Gerçekten $x \geq 0$ ise $K(x) = \left[\frac{x}{2} \right]$ dır.

Tanım 2.1.1 Bir K cümlesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta_i(K) = \liminf_n \frac{K(n)}{n}$$

dır. $K(n)/n$ dizisi limite sahip ise K nın doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_n \frac{K(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K cümlesine *sıfır yoğunluklu cümle* denir [13]

Teorem 2.1.1 $K = (a_i)$ sonsuz bir dizi ise bu takdirde;

$$\delta_i(K) = \liminf_n \frac{n}{a_n}$$

dır. Eğer $\delta(K)$ mevcut ise $\delta(K) = \lim_n \frac{n}{a_n}$ dır [13].

Tanım 2.1.2 Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu cümle hariç bütün k 'lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve 'h.h.k' şeklinde gösterilir [10].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenilerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.1.3 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani, h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $S - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir [10].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ile $L = 0$ olması halinde bu uzay

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

olarak gösterilir.

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \ (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ demektir. Diğer taraftan ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \ (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dir. Ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1, S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 2.1.2 $S - \lim x = L_1, S - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $S - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$

ii) $S - \lim (x + y) = L_1 + L_2$ dir [5]

(i) ve (ii) den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.1.4 $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise yani

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [10].

Teorem 2.1.3 Bir x dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir [10].

İspat. Burada "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir" teoreminin ispatına benzer bir yol izlenecektir. $S - \lim x_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda h.h.k için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Eğer N

$$|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &= |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\text{h.h.k için}) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesaro Yakınsaklık

Bu kısımda kuvvetli Cesaro yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 2.2.1 $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye Cesaro yakınsaktır denir. Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \quad \text{enaz bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [14].

Teorem 2.2.1 $x = (x_k)$ dizisi L 'ye yakınsak ise (x_k) dizisi L 'ye σ_1 -yakınsaktır [14].

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $n \geq N_1$ için $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Bu takdirde $n \geq N_2$ için

$$\frac{1}{n} |(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{N_1-1}) - N_1 L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir N_2 tamsayısı mevcuttur. $N = \max \{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n \geq N$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^n x_k - (n+1)L \right] \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=N_1}^n (x_k - L) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1}^n |x_k - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} (n+1 - N_1) \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

dır. Tersı doğru değildir. Gerçekten $x_n = 1 + (-1)^n$ dizisi σ_1 -yakınsaktır fakat yakınsak değildir.

Teorem 2.2.2 $S - \lim x = L$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < M$ ise $\sigma_1 - \lim x = L$ dır [5].

İspat. $L = 0$ olsun. $\sigma_1 - \lim x = 0$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k < n \\ |x_k| < \varepsilon}} |x_k| + \sum_{\substack{1 \leq k < n \\ |x_k| \geq \varepsilon}} |x_k| \right\} \\
&\leq \frac{1}{n} n\varepsilon + \frac{1}{n} M |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Tanım 2.1.3 den

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teoremin karşıtı doğru değildir. Gerçekten $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ ye yakınsaktır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 2.2.2 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi,

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \quad \text{enaz bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [1].

Teorem 2.2.3 $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde;

i) Bir L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

ii) Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır [7].

İspat. i) $x \in w_p$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \sum_{|x_k - L| < \varepsilon} |x_k - L|^p + \sum_{|x_k - L| \geq \varepsilon} |x_k - L|^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = L$ demektir.

ii) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $K = \|x\|_\infty + L$ diyelim. $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε 'u

$$\frac{1}{n} \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu takdirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır.

3. BÖLÜM

λ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde (V, λ) –toplanabilme ve λ –istatistiksel yakınsaklık kavramını vereceğiz.

$\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartını sağlayan azalmayan ve sonsuza giden bir dizisi olsun.

Genelleştirilmiş Vallée-Pousin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlıdır. Burada $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ dir.

Eğer $n \rightarrow \infty$ için $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$, (V, λ) –*toplanabilir* dizidir denir [15].

Eğer $\lambda_n = n$ ise (V, λ) –toplanabilirlik $(C, 1)$ – toplanabilirliğe indirgenir. Kuvvetli Cesaro toplanabilir ve kuvvetli (V, λ) –toplanabilir dizilerin sınıfları

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0, \text{ enaz bir } L \text{ için} \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0, \text{ enaz bir } L \text{ için} \right\}$$

olarak yazılabilir. Eğer $x = (x_k)$ dizisi L 'ye kuvvetli Cesaro toplanabilir ise bu $x_k \rightarrow L [C, 1]$, kuvvetli (V, λ) toplanabilir ise $x_k \rightarrow L [V, \lambda]$ olarak ifade edilir.

Tanım 3.1.1. $\Lambda, \lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$ şartını sağlayan azalmayan ve sonsuza giden dizilerin kümesini gösterebilirsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L ye λ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$S_\lambda - \lim x = L \text{ veya } x_k \rightarrow L (S_\lambda)$$

yazılır ve λ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir, yani

$$S_\lambda = \{x : S_\lambda - \lim x = L, \text{ enaz bir } L \text{ için}\}$$

dır [16]

Uyarı.

- i) Eğer $\lambda_n = n$ ise $S_\lambda = S$ dir.
- ii)

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n}, & k \in I_n \\ 0, & k \notin I_n \end{cases}$$

olmak üzere, $A = (a_{nk})$ olsun. Bu durumda λ -istatistiksel yakınsaklık A -istatistiksel yakınsaklığın özel bir hali olur.

Teorem 3.1.1 $\lambda \in \Lambda$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L [V, \lambda]$ iken $x_k \rightarrow L [S_\lambda]$ bu içermeye kesindir.
- ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L [S_\lambda]$ ise $x_k \rightarrow L [V, \lambda]$ ve böylece $x_k \rightarrow L [C, 1]$ dir.
- iii) $S_\lambda \cap [V, \lambda] = [V, \lambda] \cap \ell_\infty$ dir [16].

İspat. i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k \in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

dır. Böylece $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ iken $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olur. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} k, & n - \lfloor \sqrt{\lambda_n} \rfloor + 1 \leq k \leq n \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ bir sayının tam kısmını göstermektedir. Bu durumda $x \notin \ell_\infty$ ve

$$\frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\lfloor \sqrt{\lambda_n} \rfloor}{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Yani $x_k \rightarrow 0(S_\lambda)$ dır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - 0| \rightarrow \infty, \quad (n \rightarrow \infty)$$

yani $x_k \not\rightarrow 0[V, \lambda]$ olur.

ii) Kabul edelim ki tüm k değerleri için $|x_k - L| \leq M$ olmak üzere $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| &= \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-\lambda_n} (x_k - L) + \frac{1}{n} \sum_{k \in I_n} (x_k - L) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-\lambda_n} (x_k - L) + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} (x_k - L) \\
&\leq \frac{2}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} (x_k - L)
\end{aligned}$$

dır. Böylece $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olduğundan $x_k \rightarrow L[C, 1]$ olur.

iii) (i) ve (ii) den hemen görülür. $\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)$ sınırlı olduğundan $S_\lambda \subset S$ dir.

Teorem 3.1.2

$$S \subseteq S_\lambda \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0 \quad (3.1.1)$$

dır [16].

İspat. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\geq \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

dır. $n \rightarrow \infty$ için limit alıp (3.1.1) i kullanırsak $x_k \rightarrow L(S)$ iken $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ elde ederiz.

Tersine kabul edelim ki $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olsun. $(n(j))_{j=1}^\infty$ alt dizisini $\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde seçelim ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)} \text{ ise } j = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $x \in [C, 1]$ ve buradan $x \in S$ dir. Diğer taraftan $x \notin [V, \lambda]$

ve Teorem 3.1.1 (ii) den $x \notin S_\lambda$ idi. Bu bir çelişkidir. Ohalde $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ dir.

4. BÖLÜM

Δ – DİZİ UZAYLARI

4.1 $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ Uzaylarının Bazı Özellikleri

Fark dizileri Kızılmaz [17] tarafından tanımlandı. Bu bölümde $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları tanımlanacak, bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.1 $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Teorem 4.1.1 $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $\ell_\infty(\Delta)$ dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty \quad (4,1,1)$$

normu ile birer normlu uzaydır [17].

İspat. X ; $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarından birini göstermek üzere $x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

N1) $\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty} \geq 0$

N2) $\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty} = 0$ olsun. Bu takdirde $x_1 = 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - x_{k+1}| = 0$ dır. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir. O halde $x = 0$ dır. Tersine $x = 0$ olması halinde $\|x\|_{\Delta} = 0$ olduğu aşıkardır.

N3)

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{\Delta} &= |\alpha x_1| + \sup_k |\alpha (x_k - x_{k+1})| \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| \right) \\ &= |\alpha| \|x\|_{\Delta} \end{aligned}$$

N4)

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\Delta} &= |x_1 + y_1| + \sup_k |(x_k + y_k) - (x_{k+1} + y_{k+1})| \\ &\leq |x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| + |y_1| + \sup_k |y_k - y_{k+1}| \\ &\leq \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta} \end{aligned}$$

Teorem 4.1.2 $\ell_{\infty}(\Delta)$ dizi uzayı $(4, 1, 1)$ normu ile bir Banach uzayıdır [17].

İspat. $x^s = (x_1^s, x_2^s, x_3^s, \dots) \in \ell_{\infty}(\Delta)$ olmak üzere $(x^s), \ell_{\infty}(\Delta)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta} = |x_1^s - x_1^t| + \|\Delta(x^s - x^t)\|_{\infty} \rightarrow 0$$

olur. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_1^s - x_1^t| \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| \rightarrow 0$$

dır. Buna göre (x_1^s) , $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir.

$$|x_{k+1}^s - x_{k+1}^t| \leq |(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| + |x_k^s - x_k^t|$$

olması nedeniyle her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için,

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre $x_k^s = (x_k^1, x_k^2, x_k^3, \dots)$ dizisi her sabit $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^s) , $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$) diyelim. $(x^s), \ell_\infty(\Delta)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq N$ iken $\|x^s - x^t\|_\Delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde her $s, t \geq N$ için

$$|x_1^s - x_1^t| < \varepsilon$$

ve her bir k için

$$|(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| < \varepsilon$$

olur. Bu son iki ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $s \geq N$ için

$$\begin{aligned} \lim_t |x_1^s - x_1^t| &= |x_1^s - x_1| < \varepsilon \\ \lim_t |(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| &= |(x_k^s - x_k) - (x_{k+1}^s - x_{k+1})| < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $s \geq N$ için

$$\|x^s - x\|_{\Delta} = |x_1^s - x_1| + \sup_k |(x_k^s - x_k) - (x_{k+1}^s - x_{k+1})| < 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir. Şimdi de $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(\Delta)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+1}| &= |x_k - x_{k+1} - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N| \\ &\leq |(x_k - x_k^N) - (x_{k+1} - x_{k+1}^N)| + |x_k^N - x_{k+1}^N| \\ &\leq \|x^N - x\|_{\Delta} + |x_k^N - x_{k+1}^N| \end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(\Delta)$ elde edilir. O halde $(\ell_{\infty}(\Delta), \|\cdot\|_{\Delta})$ bir Banach uzayı olur.

Sonuç 4.1.1 $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzayları $\ell_{\infty}(\Delta)$ uzayının birer kapalı altuzayı olduklarından (4.1.1) deki norm ile Banach uzayıdır.

4.2 Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

m pozitif bir tamsayı olmak üzere Et ve Çolak [18] $\Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \Delta^m x = (\Delta^m x_k), \Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$

$$\ell_{\infty}(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_{\infty}\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile birer BK -uzayı olduğunu gösterdiler.

X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $X(\Delta)$ dizi uzayını

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in X\}$$

şeklinde tanımlayalım. $X(\Delta)$ nın bazı topolojik özelliklerini aşağıdaki teoremlerde verebiliriz.

Teorem 4.2.1 $X \subset Y$ ise $X(\Delta) \subset Y(\Delta)$ dir [19].

Teorem 4.2.2 X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta), X(\Delta)$ de konvektir [19].

Teorem 4.2.3 $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta)$

$$\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|$$

normu ile Banach uzayıdır [19].

Teorem 4.2.4 X ayrılabilir ise $X(\Delta)$ da ayrılabilirdir [19].

Sonuç 4.2.1 $c_0(\Delta), c(\Delta)$ ve $\ell_p(\Delta)$ ($1 \leq p < \infty$) ayrılabilirdir.

Tanım 4.2.1 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani $h.h.k$ için $|\Delta x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ -istatistiksel yakınsaktır denir. Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta)$ ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta)$, yani sıfıra Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [20].

Teorem 4.2.5. $S(\Delta)$ lineer uzaydır [21].

Tanım 4.2.2 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ -Cesaro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ -Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi

$$w_p(\Delta) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - L|^p = 0, p > 0, \text{ enaz bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir. $x \in w_p(\Delta)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta))$ yazacağız [20].

Teorem 4.2.6 $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ dir.
- ii) $x \in \ell_\infty(\Delta)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta))$ dir [20].

Sonuç 4.2.2

- i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta)$
- ii) $S(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta) = w_p(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta)$ dir.

Tanım 4.2.3 $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta x_k - \Delta x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ -istatistiksel Cauchy dizisi denir [21]

Teorem 4.2.7 Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ -istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ -istatistiksel Cauchy dizisidir [21]

İspat. Kabul edelim ki $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$|\Delta x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. N sayısını $|\Delta x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde

$$|\Delta x_k - \Delta x_N| < |\Delta x_k - L| + |\Delta x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup x , Δ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.8 $y = (y_k)$ Δ -yakınsak dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi $h.h.k$ için $\Delta x_k = \Delta y_k$ olacak şekilde bir dizi ise x , Δ -istatistiksel yakınsak bir dizidir [21]

İspat. $h.h.k$ için $\Delta x_k = \Delta y_k$ ve $\Delta - \lim y_k = L$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde her n için

$$\{k \leq n : |\Delta x - L| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : \Delta x_k \neq \Delta y_k\} \cup \{k \leq n : |\Delta x - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin ikinci yanındaki son cümle sabit sayıda eleman içerir. Bunu

$$g = g(\varepsilon)$$

ile gösterelim. $\Delta x_k = \Delta y_k$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta x - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta x_k \neq \Delta y_k\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g}{n}$$

yazabiliriz. Bu $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ demektir.

5. BÖLÜM

ORLICZ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, elemanları skalerlerin bir dizisi olan Orlicz dizi uzaylarına yer verildi.

5.1 ℓ_M Dizi Uzayı

Bu kısım, *Orlicz*'in [22] ℓ_p uzayını genelleştirme fikriyle başlayan ve *Orlicz*'den sonra *Lindberg* ([15], [23]) , *Lindenstrauss and Tzafriri* [24] , *Kamthan ve Gupta* [25] ve daha bir çok matematikçinin katkılarıyla genişleyen Orlicz dizi uzayları teorisine bir giriş niteliğindedir.

Tanım 5.1.1 *Bir M Orlicz fonksiyonu*

M1) Azalmayan

M2) $x > 0$ için $M(x) > 0$, $x \rightarrow \infty$ için $M(x) \rightarrow \infty$

M3) $M(0) = 0$

M4) $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli konveks bir fonksiyondur.

Tanım 5.1.2 Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\tilde{\ell}_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty \right\}$$

ile tanımlanan $\tilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir [25].

Tanım 5.1.3 M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

ile tanımlanan dizi uzayına *Orlicz dizi uzayı* denir [23].

ℓ_M dizi uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

Tanım 5.1.4 Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t) dt$$

integral formunda gösterilebilir [25]. Burada M 'nin çekirdeği olarak bilinen $p, t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $p(0) = 0, t > 0$ için $p(t) > 0, p$ azalmayan ve $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ dur.

Bir Orlicz fonksiyonu verilmiş olsun ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu takdirde

$$N(x) = \int_0^x q(s) ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s)$, $p(t)$ nin tüm özelliklerine sahip olan N 'nin çekirdeğidir. Açıkça N bir Orlicz fonksiyonu olur. Bu şekildeki M ve N fonksiyonları birbirinin tamamlayıcısı olarak adlandırılır.

M ve N birbirini tamamlayan Orlicz fonksiyonları olmak üzere Young eşitsizliği kullanılarak, ℓ_M

$$\ell_M = \left\{ x \in w : \forall y \in \tilde{\ell}_N \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak} \right\}$$

0,

olarak verilebilir [25].

Teorem 5.1.1 $M(x) = \int_0^{|x|} p(t) dt$ integral gösterimi ile M bir Orlicz fonksiyonu olsun.

Bu durumda,

- i) $\ell_M \approx \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $p(0) = a > 0$ olmasıdır.
- ii) $x_0 > 0$ olmak üzere $0 \leq x \leq x_0$ için $p(x) = 0$ ise $\ell_M \approx \ell_{\infty}$, $h_M \approx c_0$ dır [23]

Sonuç 5.1.1 M bir Orlicz fonksiyonu olsun. $\ell_M \approx \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) olması için gerek ve yeter şart, M Orlicz fonksiyonunun $M_p(x) = x^p$ fonksiyonuna sıfırda denk olmasıdır [25].

Teorem 5.1.2 Her bir $x \in \ell_M$ için, N , M yi tamamlayan fonksiyon olmak üzere

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1 \right\} < \infty$$

dir. Böylece,

$$\|x\|_M = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\|\cdot\|_M$, ℓ_M üzerinde bir norm tanımlar ve ℓ_M , bu şekilde tanımlanan norm ile bir Banach uzayıdır [25].

Teorem 5.1.3 $(\ell_M, \|\cdot\|_M)$ bir Banach uzayıdır $\|\cdot\|_M$ normundan farklı olarak ℓ_M ,

$$\|x\|_{(M)} = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanan ve $\|\cdot\|_M$ normuna denk olan $\|\cdot\|_{(M)}$ normuyla da Banach uzayı yapılabilir [25].

Teorem 5.1.4 Herbir $x \in \ell_M$ için $\sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{(M)}} \right) \leq 1$ dir [25].

Teorem 5.1.5 $\|x\|_M \leq 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda,

$$y = \{p(|x_n|)\} \in \tilde{\ell}_N \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1$$

dir [25].

Teorem 5.1.6 $x \in \ell_M$ için $\|x\|_M \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$x \in \tilde{\ell}_M \text{ ve } \sum_k M(|x_k|) \leq \|x\|_M$$

dir [25].

Teorem 5.1.7 $x = (x_k) \in \ell_M$ için $\sum_k M \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_M} \right) \leq 1$ dir [25].

Teorem 5.1.8 $x = (x_k) \in \ell_M$ için $\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2 \|x\|_{(M)}$ dir [25].

Sonuç 5.1.2 $(\ell_M, \|\cdot\|_{(M)})$ bir Banach uzayıdır.

M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere, ℓ_M nin bir alt uzayı olan ve normu, ℓ_M nin $\|x\|_M$ normuyla verilebilen h_M uzayı

$$h_M = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1, \forall \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [25].

h_M alt uzayının bazı temel özellikleri aşağıdaki iki teorem ile verilmektedir.

Teorem 5.1.9 M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda, $(h_M, \|\cdot\|_{(M)})$ bir AK-BK uzayıdır [25].

Eğer M Orlicz fonksiyonu ise M nin uygun seçilişleriyle $\ell_M \approx \ell_{\infty}$, $\ell_M \approx \ell_1$ ve $h_M \approx c_0$ yapılabilir.

ℓ_M ve h_M uzaylarının tanımları, bir izomorfizme bağlı olarak, $t = 0$ noktasının bir komşuluğunda M nin davranışının nasıl olacağını gösterir. Eğer M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları $[0, t_0]$ aralığında çakışırsa, ℓ_{M_1} ve ℓ_{M_2} aynı dizileri içerir ve M_1 ile M_2 den indirgenen normlar denktir. Aynı şekilde h_{M_1} ve h_{M_2} için de bunlar doğrudur. Daha genel olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.10 M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $\ell_{M_1} \approx \ell_{M_2}$ dir (yani, her iki uzay aynı dizileri içerir) ve özdeşlik dönüşümü, ℓ_{M_1} ve ℓ_{M_2} uzayları arasında bir izomorfizmdir.

ii) h_{M_1} ve h_{M_2} nin birim vektör bazları denktir.

iii) M_1 ve M_2 denktir, yani her $t \in [0, t_0]$ için

$$K^{-1}M_2(k^{-1}t) \leq M_1(t) \leq KM_2(kt)$$

olacak şekilde $k > 0$, $K > 0$ ve $t_0 > 0$ sabitleri vardır [24].

M Orlicz fonksiyonunun sadece sıfırın bir komşuluğunda tanımlı olduğu bir çok örnek vardır. Bu durumda M fonksiyonu, pozitif reel sayılar cümlesinin tamamında bir Orlicz fonksiyonu olacak şekilde, $t > t_0$ için genişletilebilir. M nin bu şekilde genişlemesine karşılık gelen ℓ_M ve h_M uzayları ile yukarıdaki önermedeki ℓ_M ve h_M uzayları aynı olacaktır. Farklı genişlemelerden indirgenen normlar farklı olabilir, ama denk olmak zorundadır.

Teorem 5.1.11 M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. ℓ_{M_1} ve ℓ_{M_2} ayrılabilir ise M_1 Orlicz fonksiyonunun sıfırda M_2 ye denk olması için gerek ve yeter şart, ℓ_{M_1} ve ℓ_{M_2} uzaylarının birim vektör bazlarının denk olmasıdır [23].

Teorem 5.1.12 M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda h_M , ℓ_M nin kapalı bir alt uzayıdır ve h_M , birim vektör bazı içeren bir simetrik baza sahiptir. Ayrıca h_M uzayına kısıtlanan $\|\cdot\|_M$ normu, bir simetrik baz normudur [15].

5.2 $\ell_M(p)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, S.D.Parashar & B.Choudhary [26] tarafından tanımlanan ve bazı cebirsel-topolojik özellikleri incelenen $\ell_M(p)$ dizi uzayına yer verildi.

Şimdi bir M Orlicz fonksiyonu ve pozitif reel sayıların herhangi bir $p = (p_k)$ dizisi için

$$\ell_M(p) = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

olarak tanımlanan bu dizi uzayının bazı temel özelliklerini verelim. Bu bölümde ve sonraki bölümde $p = (p_k)$ dizisini sınırlı kabul edeceğiz.

Teorem 5.2.1 $\ell_M(p)$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır [26].

Teorem 5.2.2 $H = \max(1, \sup p_k)$ olmak üzere, $\ell_M(p)$

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} > 0 : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

paranormuyla total paranormlu uzaydır [26].

Uyarı $M(x) = x$ için $\ell_M(p)$ üzerindeki paranorm ile $\ell(p)$ üzerindeki paranorm aynıdır [26].

Teorem 5.2.3 $1 \leq p_k < \infty$ olsun. Bu durumda $\ell_M(p)$ yukarıda tanımlanan paranormla tam paranormlu uzaydır [8].

Teorem 5.2.4 Her bir k için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ şartını sağlayan (p_k) ve (q_k) dizileri için

$$\ell_M(p) \subseteq \ell_M(q)$$

dir [26].

6. BÖLÜM

6.1 $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1, [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ Uzaylarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde bir Orlicz fonksiyonu, bir yarı norm ve bir skalar $u = (u_k)$ dizisi kullanarak $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1, [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ dizi uzaylarını tanımlayacak ve bu uzayların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 6.1.1 M bir Orlicz fonksiyonu, q yarınorm olsun. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi ve $u = (u_k)$, $u_k \neq 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) olmak üzere herhangi bir dizi olsun.

$$\begin{aligned} [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1 &= \left\{ x \in w(X) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\} \\ [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0 &= \left\{ x \in w(X) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\} \\ [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty &= \left\{ x \in w(X) : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty, \right. \\ &\quad \left. \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\} \end{aligned}$$

Teorem 6.1.1 $p = (p_k)$ dizisi sınırlı bir dizi olsun. $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1, [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ dizi uzayları kompleks sayılar kümesi üzerinde birer lineer uzaydır.

İspat $x, y \in [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. İspat için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta (\alpha x_k + \beta y_k)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir ρ_3 bulmak yeterlidir. $\rho_3 = \max (2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olarak tanımlayalım.

M azalmayan ve konveks ve Δ operatörü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta (\alpha x_k + \beta y_k)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta (\alpha x_k) + u_k \Delta (\beta y_k)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\left(\frac{\alpha u_k \Delta x_k}{\rho_3} \right) + \left(\frac{\beta u_k \Delta y_k}{\rho_3} \right) \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha u_k \Delta x_k}{2|\alpha|\rho_1} \right) + q \left(\frac{\beta u_k \Delta y_k}{2|\beta|\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) + q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

$$\leq C \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + C \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için sağ taraf 0 a gideceğinden sol taraf da sıfıra gider, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta (\alpha x_k + \beta y_k)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.1.2 $H = \max(1, \sup_k p_k)$ olmak üzere $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1, [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$ ve $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ uzayları

$$g_\Delta(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_k \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1 \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right\}$$

ile paranormlu uzaylardır (Total paranormlu uzay olmayabilir).

İspat $[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ uzayını düşünelim. $g_\Delta(x) \geq 0, g_\Delta(x) = g_\Delta(-x), g_\Delta(\bar{\theta}) = 0$ olur. Burada $\bar{\theta} = \{\theta, \theta, \theta, \dots\}$ dir. $(x_k), (y_k) \in [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$ olsun. Bu durumda

$$\sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \leq 1$$

ve

$$\sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \leq 1$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. $\rho = \rho_1 + \rho_2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta (x_k + y_k)}{\rho} \right) \right) &\leq \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \\ + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) &\leq 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g_\Delta(x + y) \leq g_\Delta(x) + g_\Delta(y)$$

dır.

Son olarak skalar çarpımın sürekli olduğunu ispatlayalım. λ sıfırdan farklı bir sayı olsun, $r = \frac{\rho}{\lambda}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_{\Delta}(\lambda x) &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta(\lambda x_k)}{\rho} \right) \right) \leq 1, \rho > 0 \text{ ve } n \in N \right\} \\ &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \lambda \Delta(x_k)}{\rho} \right) \right) \leq 1, \rho > 0 \text{ ve } n \in N \right\} \\ &= \inf \left\{ (r \cdot |\lambda|)^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta(x_k)}{r} \right) \right) \leq 1, r > 0 \text{ ve } n \in N \right\} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.1.3 M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$[V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_0 \subset [V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_1 \subset [V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_{\infty}$$

dır.

İspat $[V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_0 \subset [V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_1$ kapsaması açıktır. $[V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_1 \subset [V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_0$ olduğunu gösterelim. $x \in [V_{\lambda}, M, \Delta, q, u]_1$ olsun. Bu durumda en az bir ℓ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right] = 0$$

olacak şekilde en az bir pozitif ρ_1 sayısı vardır. $\rho = 2\rho_1$ olarak tanımlayalım. M azalmayan ve konveks olduğundan önerme 1, 1, 1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] &= \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell + \ell}{\rho} \right) \right) \right] \\ &\leq \left\{ \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \frac{1}{2} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right] + \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \frac{1}{2} \left[M \left(q \left(\frac{\ell}{\rho_1} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right] + \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{\ell}{\rho_1} \right) \right) \right] \\
&< \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right] + \left[M \left(q \left(\frac{\ell}{\rho_1} \right) \right) \right] < \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $x \in [V_\lambda, M, \Delta, q, u]_\infty$ olur.

Teorem 6.1.4 M bir Orlicz fonksiyonu olsun.

- i) $[V_\lambda, M, q]_1 \subset [V_\lambda, \Delta, M, q]_1$
- ii) $[V_\lambda, M, q]_0 \subset [V_\lambda, \Delta, M, q]_0$
- iii) $[V_\lambda, M, q]_\infty \subset [V_\lambda, \Delta, M, q]_\infty$

İspat i) $x \in [V_\lambda, M, q]_1$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right] = 0$$

dır. Diğer taraftan M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{\Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right] &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{(x_k - x_{k+1}) - \ell}{\rho} \right) \right) \right] \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] \rightarrow 0
\end{aligned}$$

olur. O halde $x \in [V_\lambda, \Delta, M, q]_1$ dir.

ii) $x \in [V_\lambda, M, q]_0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] = 0$$

dır. Diğer taraftan M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{\Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{(x_k - x_{k+1})}{\rho} \right) \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in [V_\lambda, \Delta, M, q]_0$ olur.

iii) $x \in [V_\lambda, M, q]_\infty$ olsun. Bu takdirde

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] < \infty$$

dır. Diğer taraftan M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{\Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{(x_k - x_{k+1})}{\rho} \right) \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] < \infty \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in [V_\lambda, \Delta, M, q]_\infty$ olur.

Teorem 6.1.5 M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları olsunlar. O zaman

- i) $[V_\lambda, M_1, \Delta, p, q, u]_0 \cap [V_\lambda, M_2, \Delta, p, q, u]_0 \subset [V_\lambda, M_1 + M_2, \Delta, p, q, u]_0$
- ii) $[V_\lambda, M_1, \Delta, p, q, u]_1 \cap [V_\lambda, M_2, \Delta, p, q, u]_1 \subset [V_\lambda, M_1 + M_2, \Delta, p, q, u]_1$
- iii) $[V_\lambda, M_1, \Delta, p, q, u]_\infty \cap [V_\lambda, M_2, \Delta, p, q, u]_\infty \subset [V_\lambda, M_1 + M_2, \Delta, p, q, u]_\infty$ dır.

İspat. i) $x \in [V_\lambda, M_1, \Delta, p, q, u]_0 \cap [V_\lambda, M_2, \Delta, p, q, u]_0$ olsun. Bu takdirde $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

ve

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

dır. Burada önerme 1, 1, 1 deki eşitsizliği kullanırsak

$$\left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq C \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + C \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada $k \in I_n$ üzerinden her iki tarafın toplamı alınır ve $\frac{1}{\lambda_n}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n} C \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_n} C \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ii) $x \in [V_\lambda, M_1, \Delta, p, q, u]_1 \cap [V_\lambda, M_2, \Delta, p, q, u]_1$ olsun. Bu takdirde $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

ve

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

dır. Burada önerme 1, 1, 1 deki eşitsizliği kullanırsak

$$\left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq C \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + C \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada $k \in I_n$ üzerinden her iki tarafın toplamı alınır ve $\frac{1}{\lambda_n}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n} C \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &+ \frac{1}{\lambda_n} C \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

iii) $x \in [V_\lambda, M_1, \Delta, p, q, u]_\infty \cap [V_\lambda, M_2, \Delta, p, q, u]_\infty$ olsun. Bu takdirde

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olur. Burada önerme 1, 1, 1 deki eşitsizliği kullanırsak

$$\left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq C \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + C \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada $k \in I_n$ üzerinden her iki tarafın toplamı alınır ve $\frac{1}{\lambda_n}$ ile çarpılır ve iki tarafın n üzerinden supremumu alınır

$$\begin{aligned} \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \sup_n \frac{C}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &+ \sup_n \frac{C}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Önerme 6.1.1. $p = (p_k)$ ve $t = (t_k)$ pozitif reel sayıların herhangi iki dizisi ve X

üzerindeki herhangi iki q_1 ve q_2 yarınormu için

$$[V_\lambda, M, \Delta, p, q_1, u]_0 \cap [V_\lambda, M, \Delta, t, q_2, u]_0 \neq \emptyset$$

$$[V_\lambda, M, \Delta, p, q_1, u]_1 \cap [V_\lambda, M, \Delta, t, q_2, u]_1 \neq \emptyset$$

$$[V_\lambda, M, \Delta, p, q_1, u]_\infty \cap [V_\lambda, M, \Delta, t, q_2, u]_\infty \neq \emptyset$$

dır.

Önerme 6.1.2. M bir Orlicz fonksiyonu, q_1 ve q_2 yarınormlar olsun.

i) Eğer q_1, q_2 den daha kuvvetli ise

$$[V_\lambda, M, \Delta, p, q_1, u]_1 \subset [V_\lambda, M, \Delta, p, q_2, u]_1$$

ii)

$$[V_\lambda, M, \Delta, p, q_1, u]_1 \cap [V_\lambda, M, \Delta, p, q_2, u]_1 \subset [V_\lambda, M, \Delta, p, q_1 + q_2, u]_1$$

dır.

Teorem.6.1.6. $0 < p_k \leq r_k$ ve $\left(\frac{r_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu takdirde

i) $[V_\lambda, M, \Delta, r, q, u]_1 \subset [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1$

ii) $[V_\lambda, M, \Delta, r, q, u]_0 \subset [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_0$

iii) $[V_\lambda, M, \Delta, r, q, u]_\infty \subset [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_\infty$

dur.

İspat İspat sadece (i) şıkkı için verilecektir. Diğer şıklar benzer şekilde yapılabilir. $x \in [V_\lambda, M, \Delta, r, q, u]_1$ olsun. Bu takdirde $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - l}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k} \rightarrow 0$$

olur. $w_k = \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k}$ ve her bir k için $\lambda_k = \frac{p_k}{r_k}$ alalım. $p_k \leq r_k$ olduğundan $0 < \lambda_k \leq 1$ dir. $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$ alalım. (t_k) ve (s_k) dizilerini

$$t_k = \begin{cases} w_k, & w_k \geq 1 \\ 0, & w_k < 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad s_k = \begin{cases} 0, & w_k \geq 1 \\ w_k, & w_k < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre $w_k = t_k + s_k$ ve $w_k^{\lambda_k} = t_k^{\lambda_k} + s_k^{\lambda_k}$ ve böylece

$$t_k^{\lambda_k} \leq t_k < w_k \quad \text{ve} \quad s_k^{\lambda_k} \leq s_k$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} w_k^{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} (t_k^{\lambda_k} + s_k^{\lambda_k}) \leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} w_k + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} s_k^{\lambda_k}$$

olur. Şimdi her bir n için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} s_k^\lambda &= \sum_{k \in I_n} \left(\frac{1}{\lambda_n} s_k \right)^\lambda \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^{1-\lambda} \\
&\leq \left(\sum_{k \in I_n} \left[\left(\frac{1}{\lambda_n} s_k \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \right)^\lambda \left(\sum_{k \in I_n} \left[\left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^{1-\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{1-\lambda} \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} s_k \right)^\lambda
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} w_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} w_k + \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} s_k \right)^\lambda$$

olur. Buradan $x \in [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

7. BÖLÜM

$S_\lambda(\Delta_q, u)$ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde $S_\lambda(\Delta_q, u)$ istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacak ve $S_\lambda(\Delta_q, u)$ istatistiksel yakınsak dizilerin uzayının bazı özellikleri verilecek ve diğer uzaylarla ilişkisi incelenecektir.

Tanım 7.1.1 $x = (x_k) \in w(X)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $\ell \in X$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine $S_\lambda(\Delta_q, u)$ – istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda(\Delta_q, u) - \lim x = \ell$ veya $x_k \rightarrow L(S_\lambda(\Delta_q, u))$ yazılır.

Her k için $u_k = 1$ olursa $S_\lambda(\Delta_q, u) = S_\lambda(\Delta_q)$ olur. $\lambda_n = n$ olması durumunda $S_\lambda(\Delta_q, u)$ uzayı $S(\Delta_q, u)$ ile gösterilecektir. Bu bölümde aşağıdaki dizi uzayları sık sık kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\Delta, q, u) &= \left\{ x \in w(X) : \sup_k q(u_k \Delta x_k) < \infty \right\} \\ c(\Delta, q, u) &= \{x \in w(X) : q(u_k \Delta x_k - \ell) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \text{ enaz bir } \ell \text{ için}\} \\ [V, \lambda, \Delta, p, q, u] &= \left\{ x \in w(X) : \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ enaz bir } \ell \text{ için} \right\} \end{aligned}$$

Teorem 7.1.1 $\lambda \in \Lambda$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L[V, \lambda, \Delta, p, q, u] \implies x_k \rightarrow L(S_\lambda(\Delta_q, u))$ ve bu kapsama kesindir.
- ii) Eğer $x \in \ell_\infty(\Delta, q, u)$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda(\Delta_q, u))$ ise $x_k \rightarrow L[V, \lambda, \Delta, p, q, u]$ ve böylece $x_k \rightarrow L[V, \lambda, \Delta, p, q, u]$.

$$iii) \quad S_\lambda(\Delta_q, u) \cap \ell_\infty(\Delta, q, u) = [V, \lambda, \Delta, p, q, u] \cap \ell_\infty(\Delta, q, u)$$

İspat $i)$ $\varepsilon > 0$ verilsin ve $(x_k) \in [V, \lambda, \Delta, p, q, u]$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p \geq |\{k \leq n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazabiliriz. Böylece $x_k \rightarrow L(S_\lambda(\Delta_q, u))$ elde edilir.

$ii)$ $x \in \ell_\infty(\Delta, q, u)$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda(\Delta_q, u))$ olsun. $q(u_k \Delta x_k) + q(\ell) = M$ yazalım. $\varepsilon > 0$ verilsin $n_0(\varepsilon)$ olsun. Her $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \leq n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde seçelim.

$$L_n = \left\{ k \leq n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu takdirde $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \notin I_n} [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p \\ &< \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{\lambda_n \varepsilon}{2M^p} \right) M^p + \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Burdan $x_k \rightarrow L[V, \lambda, \Delta, p, q, u]$

$iii)$ ispatı; $i)$ ve $ii)$ kullanılarak elde edilir.

Teorem 7.1.2 $S(\Delta_q, u) \subset S_\lambda(\Delta_q, u) \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ dir (7.1.2)

İspat $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}$$

dır. Böylece

$$\frac{1}{\lambda_n} |\{k \leq n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}|$$

dır. $n \rightarrow \infty$ için limit alıp 7.1.2 yi kullanırsak

$$x_k \rightarrow L(\mathbf{S}(\Delta_q, u)) \text{ iken } x_k \rightarrow L(\mathbf{S}_\lambda(\Delta_q, u))$$

elde ederiz.

Tersine kabul edelim ki $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olsun. Bu takdirde $\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $(n(j))$ alt dizisi seçebiliriz. Her $k \in N$ için $u_k = 1$ ve $q(x) = |x|$ olsun. $x = (x_i)$ dizisini

$$\Delta x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)}, \quad j=1,2,3,\dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $x \in [C, \Delta]$ ve $x \in \mathbf{S}(\Delta)$ dır. Buradaki $[C, \Delta]$ uzayı;

$$[C, \Delta] = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - \ell| = 0 \right\}$$

dır. Fakat $x \notin [V, \lambda, \Delta, p, q, u]$ ve Teorem 7.1.1 (ii) den $x \notin \mathbf{S}_\lambda(\Delta_q, u)$ dır. Bu bir çelişkidir. O halde $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ değerleri için $\frac{\lambda_n}{n}$ sınırlı olduğunda $\mathbf{S}_\lambda(\Delta_q, u) \subset \mathbf{S}(\Delta_q, u)$ olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 7.1.3 M bir Orlicz fonksiyonu olsun.

$$[V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1 \subset \mathbf{S}_\lambda(\Delta_q, u)$$

dır.

İspat $x \in [V_\lambda, M, \Delta, p, q, u]_1$ olsun.

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) < \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [M(\varepsilon)]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \min \left\{ [M(\varepsilon)]^{\inf p_k}, [M(\varepsilon)]^H \right\} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| \\ &\quad \min \left\{ [M(\varepsilon)]^{\inf p_k}, [M(\varepsilon)]^H \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in S_\lambda(\Delta_q, u)$ olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 7.1.4 $S_\lambda(\Delta_q, u) \cap \ell_\infty(\Delta, q, u) = [V_\lambda, M, \Delta, q, u]_1 \cap \ell_\infty(\Delta, q, u)$

İspat Bir önceki teoremden dolayı

$$[V_\lambda, M, \Delta, q, u]_1 \cap \ell_\infty(\Delta, q, u) \subset S_\lambda(\Delta_q, u) \cap \ell_\infty(\Delta, q, u)$$

dır. Şimdi

$$S_\lambda (\Delta_q, u) \cap \ell_\infty (\Delta, q, u) \subset [V_\lambda, M, \Delta, q, u]_1 \cap \ell_\infty (\Delta, q, u)$$

olduğunu gösterelim. $t_k = (u_k \Delta x_k - \ell) \rightarrow \theta(S_\lambda)$ olsun. $x \in \ell_\infty (\Delta, q, u)$ olmak üzere

$$M \left[q \left(\frac{t_k}{\rho} \right) \right] \leq K$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(q \left(\frac{t_k}{\rho} \right) \right) \right] &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{t_k}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) < \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{t_k}{\rho} \right) \right) \right] \\ &\leq \frac{K}{\lambda_n} |\{k \in I_n : q(t_k) \geq \varepsilon\}| + M \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) \end{aligned}$$

buradan $x \in [V_\lambda, M, \Delta, q, u]_{11} \cap \ell_\infty (\Delta, q, u)$ elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Maddox, I.J., 1970, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London
- [2] Kreyszig E., 1978, *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney
- [3] Goes, G. and Goes S, 1970, *Sequence of variation and sequence of Fourier Coefficients*
1. Math. Z. 118, 93-102
- [4] Fast, H., 1951. *Sur la Convergence Statistique*, Colloq Math. (2) 241-244
- [5] Schoenberg, I.J., 1959, *The integrability of Certain Functions and Related Summability Methods*, Amer. Math. Monthly 66, 361-375
- [6] Salat, T., 1980, *On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers*, Math Slovaca., (2) 139-150
- [7] Connor, J.S., 1988. *The Statistical and Strong p -Cesaro Convergence of Sequences*, Analysis, (8) 47-63
- [8] Maddox, I.J., 1988, *Statistical Convergence in Locally Convex Space*, Math Proc. Phil. Soc. 104, 141-145
- [9] Savaş, E. ve Nuray, F., 1993., *On σ -Statistical Convergence and Lacunary σ -Statistical Convergence* Math Slovaca., 43(3) 309-315
- [10] Fridy, J.A., 1985. *On Statistical Convergence* Analysis, 5, 301-313
- [11] Fridy, J.A. ve Orhan, C., 1993, *Lacunary Statistical Convergence*, Pac. J. Math 160(1), 43-51
- [12] Kolk, E., 1991, *The Statistical Convergence in Banach Spaces*, Acta Et Commentationes Univ. Tartuensis 928, 41-52
- [13] Niven, I. ve Zuckerman, H.S., 1960. *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley Sons, New York.
- [14] Powell, R.E ve Shah, S.H, 1972, *Summability Theory and Applications*, V.N.R. Company London.

- [15] K.J.Lindberg, *Contractive projections in Orlicz sequence spaces and continuous function space*, Ph.D.Thesis university of California, Berkeley, 1971.
- [16] Mursaleen. λ -statistical convergence. Math. Slovaca 50 (2000), no. 1, 111–115. MR1764349 (2001g:40003)
- [17] Kızmaz, H., 1981. *On Certain Sequence Spaces*, Canad. Math. Bull
- [18] M. Et, and R. Çolak, *On some generalized difference sequence spaces*, Soochow J. Math., 21 (1995), 377–386
- [19] Çolak, R., 1989, *On Some Generalized Sequence Spaces*, Commun Fac. Sci. Üniv Ankara., Series A, V.38, 35–46
- [20] Başarır, M., *On the Δ -Statistical Convergence of Sequences*, F.Ü. Fen ve Müh Bilimleri Dergisi (1995), 7(2), 1–6
- [21] Et, M., Nuray, F., Δ^m -statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math. 32 (6) (2001), 961–969
- [22] Mazur, S.; Orlicz, W. On linear methods of summability. Studia Math. 14, (1954), 129–160 (1955)
- [23] K.J.Lindberg, *On subspaces of Orlicz sequence spaces*, Studia Mathematica 45(1973), 119–146.
- [24] J.Lindenstrauss and L.Tzafriri, *Classical Banach spaces, Vol.1, Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1978
- [25] P.K.Kamthan and M.Gupta, *Sequence Spaces and series*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981
- [26] S.D.Parashar and B.Choudhary, *Sequence spaces defined by Orlicz functions*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 25 (4)(1994), 419–428