

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
TEORİSİ VE BAZI UYGULAMALARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe ÖNER
(121121105)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı : Uygulamalı Matematik
Danışman: Doç. Dr. Erdal BAŞ
Ocak-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TEORİSİ VE BAZI
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe ÖNER
(121121105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Aralık 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 8 Ocak 2015

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Erdal BAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hasan BULUT

: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Ocak-2015

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Erdal BAŞ hocama üzerindeki emeklerinden dolayı şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN'a yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Tuğçe ÖNER

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
1.1. Kesirli Analizin Tarihsel Geçmişi	1
1.2. Kesirli Analizin Yakın Tarihi	2
1.3. Kesirli Hesaplamaların Bazı Fiziksel ve Biyolojik Uygulama Alanları	4
2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR	7
3. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK TEKLİK TEOREMLERİ	19
3.1. Lineer Kesirli Diferensiyel Denklemler	19
3.2. Kesirli Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı	28
4. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ	39
4.1. Kesirli Laplace Dönüşümü	39
4.2. Kesirli Diferensiyel Denklemler için Laplace Dönüşümü	46
4.3. Laplace Dönüşüm Metodunun Uygulamaları	50
SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	62

ÖZET

Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Teorisi ve Bazı Uygulamaları

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde kesirli analizin tarihsel geçmişi ve yakın tarihi verilmiştir. Ayrıca fiziksel ve biyolojik uygulamaları ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde temel tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde lineer kesirli diferensiyel denklemler için varlık teklik teoremleri ve ispatları verilmiştir. Ayrıca kesirli mertebeden sınır değer problemleri için varlık teklik teoremleri, ispatları ve uygulamaları ele alınmıştır. Tezin son bölümünde ise kesirli Laplace dönüşümü detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli diferensiyel denklem, Varlık teklik problemleri, Kesirli Laplace dönüşümü, Riemann-Liouville, Caputo.

SUMMARY

Fractional Differential Equations Theory and Its Some Applications

This study consists of four chapter and the history of fractional analysis is given in its first parts. Furthermore, physical and biological applications is given. In the second chapter, some fundamental concepts and definitions are given. Third chapter is deal with the existence and uniqueness theorems and their proofs. In addition existence and uniqueness theorems of boundary value problems for fractional degree and its applications are mentioned. Fractional Laplace transformation is examined in detail in the last chapter.

Key Words: Fractional differential equation, Existence and uniqueness theorems, Fractional Laplace transformation, Riemann-Liouville, Caputo.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi,
σ	:	Sigma,
∂	:	Türevlenebilir,
D	:	Türev operatörü,
$C[a, b]$	:	(a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı,
$\Gamma(z)$	:	Gamma fonksiyonu,
T	:	Daralma dönüşümü,
α	:	Alfa,
β	:	Beta,
L	:	Laplace operatörü,
${}_0D_t^{-\alpha} = I$	:	α . kattan integral,
${}_0D_t^{\alpha}$	:	α . mertebeden türev,
${}_0^C D_t^{\alpha}$	:	α . kattan Caputo türevi,
E_{α}	:	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,
$E_{\alpha, \beta}$	:	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

ŞEKİLLER LİSTESİ

Tablo 1.1. Gamma Fonksiyonunun Bazı Değerleri	9
Tablo 2.1. Mittag-Leffler fonksiyonunun Bazı Özel Değerleri	11
Tablo 2.2. Mittag-Leffler fonksiyonunun Diferensiyel Formülleri	12
Tablo 2.3. Mittag-Leffler fonksiyonunun Öteleme Formülleri.....	12
Tablo 4.1. Bazı Laplace Dönüşümlerinin Karşılıklar	50

1. GİRİŞ

Fizik, sosyal bilimler, mühendislik gibi birçok bilim dalındaki problemlerin çözümü için bu problemlerin önce matematiksel ifadelerle formüle edilmesi gerekir. Buradan doğadaki bir büyüklüğün diğer büyüklüklere göre değişim hızı matematikte türev olarak ifade edilir. Bu yüzden her sürecin farklı değişim hızları, değişik türevler bulunduran bağıntılar olarak karşımıza çıkar. Bu bağıntıları karakterize eden fonksiyonların yanı sıra bu fonksiyonların birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferensiyel denklem, kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere de kesirli diferensiyel denklem denir. Kesirli diferensiyel denklem de matematiksel analizin bir koludur. Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümleri için kesirli türev ve integral hesaplamalarının iyi bilinmesi gerekir.

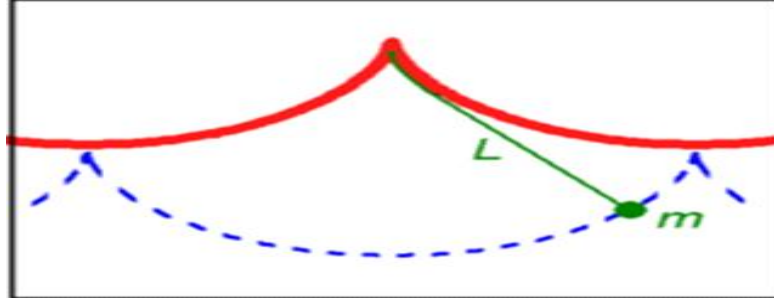
Kesirli analiz, klasik analizin tamsayı mertebeli türev ve integral kavramlarının reel, rasyonel ya da kompleks mertebeye bir genişlemesi olarak tanımlanır. Son yüzyıl boyunca kesirli analiz matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş uygulama alanı bulmuştur. Bunun temel sebebi, viskoelastiklik ve sönüm, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, kontrolör tasarımı gibi pek çok olgunun kesirli analiz kullanılarak daha gerçeğe uygun modellenebilmesi ve açıklanabilmesidir.

Kesirli analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışındır. Kesirli analizdeki birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesi fırsatını verir. Başlıcaları Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letnikov, Jumarie kesirli türevleridir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler.

1.1. Kesirli Analizin Tarihsel Geçmişi

1965 yılında L'Hospital, türev için $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunun mucidi olan Leibniz'e bir mektup yazar ve der ki " $n = \frac{1}{2}$ olduğunda $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonu ne anlama gelir? Leibniz ise daha sonra çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran " $\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ „ cevabını verir. Bu basit gibi görünen ama kesirli teoremin ortaya çıkışına sebep olan sorgulamaya Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Fourier (1822), 18. yy'daki ve 19. yy'daki pek çok matematikçinin çalışmaları eklenmiş ve yeni bir teoriler ortaya çıkmıştır.

Kesirli analiz kullanılarak formülize edilen ilk mühendislik problemi “Tautochrone” dur. Yerçekiminin etkisi altında, sürtünmesiz bir düzlemde yukarıdan aşağıya sarkıtılan bir cismin salınımı sonucunda oluşturduğu eğrinin bulunması problemidir. 1823’de Abel, Riemann-Liouville kesirli integrasyonu ile tanımlanan bir integral eşitliği biçiminde tautochrone probleminin çözümünü elde etmiştir.



O zamanda, kesirli analiz için yapılan tanımların bazen çelişmesi ve tamamlanmamış olması kesirli analizin mühendislik uygulamalarında daha yaygın kullanılmasına ket vurmuştur. Bu durum, 19.yy’ın ortalarına kadar devam etmiştir. Liouville (1834), Riemann (1847), Grünwald (1867) ve Letnikov (1868)’un kesirli analiz ile ilgili ortaya koydukları kesirli türev ve integral tanımları teoremin gelişimine hız kazandırmıştır. Ancak yine de bu tanımların kabulü ve uygulama problemlerinde kullanılmaları zaman almıştır. Kesirli türev ve integral için tek bir tanımın olmayışı ve cebirsel işlemlerde farklı tanımların kullanımı ile ortaya çıkan farklı sonuçlar pek çok zorluğa neden olmuştur. Ancak bu konuda yapılan çalışmalarla birlikte problem türleri daha iyi sınıflandırılmış ve hangi problemde ne tür bir tanım kullanmanın gerekliliği ortaya konmuştur.

1.2. Kesirli Analizin Yakın Tarihi

Kesirli analiz hem eski hem de yeni bir konu olarak düşünülebilir. Eski bir konudur çünkü G.W.Leibniz (1695,1697) ve L.Euler (1730) in bazı tahminleri ile günümüze kadar kademeli olarak geliştirilmiştir. Aynı zamanda yeni bir konu olarak da kabul edilebilir. Doktora tezini kesirli analiz üzerine yaptıktan sonra B.Rosa Temmuz 1974 de New Haven Üniversitesinde Kesirli Analiz ve Uygulamaları üzerine ilk konferansı vermiştir.

İlk olarak K.B.Oldham ve J.Spanier 1968 yılında başlayan işbirliği ile 1974 de fractional calculus adında bir kitap yayınlamıştır. Bir kimyager ve bir matematikçi arasın-

daki bu işbirliği yarı türev ve yarı integral açısından kütle ve ısı transferi problemlerini çözmede kullanılmıştır. 1987 de kesirli calculus ansiklopedisi olarak bilinen S.Samko, A.Kilbas ve O.Marichev in devasa kitabı ilk olarak Rusya da ortaya çıkmış ve sonrasında 1993 de ingilizce olarak basılmıştır. Günümüzde kesirli analiz ve uygulamaları üzerine kitap, dergi ve metin serileri çok sayıda başlık içermektedir ayrıca bu listenin önümüzdeki yıllarda daha fazla büyümesi beklenmektedir.

Her pozitif reel mertebeden integral ve türevlere imkan veren kesirli analiz, integro diferensiyel operatörler ve denklemleri ile ilgilenen matematiksel analizin bir dalı olarak ele alınmıştır. Burada integraller konvülsiyon tiptedir ve kuvvetsel tipten çekirdeği (zayıf singüler) göstermiştir.

Kesirli analiz konusunda pek çok çalışmalar yapılmış ve kitaplar yazılmıştır: M.M.Dzherbashyan (1996), A.M.Mathai ve R.K.Saxena (1973,1978), H.M.Srivastava, K.C.Gupta, S.P.Goyal (1982), H.M.Srivastava ve B.R.K.Kashyap (1982), A.Prudnikov, Y.Brychkov ve O.Marichev (1986,1990), A.Kilbas ve M.Saigo (2004), A.Kilbas, H.M. Srivastava ve J.Trujillo (2006), A.M. Mathai ve H.Haubold (2008), A.M.Mathai, R.K. Saxena ve H.Haubold (2010) v.b.

Lineer viskoelastisite kesirli calculus ortaya çıktığından beri kesinlikle bu konunun en kapsamlı alanı olmuştur. Daha detaylı olarak şu kitaplara bakılabilir: M.Caputo (1969), A.Carpinteri ve F.Mainardi (1997), I.Podlubny (1999), R.Hilfer (2000), B.West, M.Bologna ve P.Grigolini (2003), A.Kilbas, H.M.Srivastava ve J.Trujillo (2006). Ancak ekonomi, stokastik süreçler, uygulamalı bilimler ve mühendisliğin birçok dalında da rastlanmıştır. Kesirli analizi içeren makale, kongre ve tezlerin sayısının gittikçe artması bunu ispatlamıştır.

Son yıllarda sinyal işleme, modelleme ve kontrollü yayınların bir amacı olmuştur. Aslında öncelikli işi frekansın tepkisi açısından kesirsel türevin uygulaması A.Oustaloup (1991) ve I.Podlubny (1999) tarafından önemli bir kitapta incelenmiştir. Ancak geriye gidersek elektromanyetik teori (1920) hakkındaki kitabında kesirli türevleri tanıtan Oliver Heaviside ve daha sonra elastisite problemlerine kesirli türevi uygulayan A.Gemant (1936) kanıtlamıştır. Şimdilerde sayısı gittikçe artan makale ve dergilerdeki özel konularda gösterilen kesirli analiz kullanımının avantajı anlaşılmaktadır [26].

1.3 Kesirli Hesaplamaların Bazı Fiziksel Ve Biyolojik Uygulama Alanları

a- Elektrik iletim hatları

19. yüzyılın son yıllarında Heaviside başarıyla matematiksel argümanları vermeden yaptığı operasyonel hesabı geliştirdi. 1892 yılında elektrik iletim hatları çalışmasında kesirli türev fikrini tanıttı. Gregory (1846)' da ısı denkleminin sembolik operatör formunda çözümüne dayanan Heaviside $\frac{d}{dt}$ diferensiyel operatörünü p harfi ile tanıttı ve $\frac{d^2u}{dx^2} = a^2p$ difüzyon denkleminin çözümünü verdi. Isı dağılımı için A , B , $p \equiv \frac{d}{dx}$ sabit olmak üzere $u(x, t)$,

$$u(x, t) = A \exp(ax\sqrt{p}) + B \exp(-ax\sqrt{p})$$

şeklinde [17].

b- İnsanın süngerimsi kemiğindeki ultrasonik dalga yayılımı

Kesirli hesaplamaların bir başka kullanım alanı ise katı ve sıvı yapı arasındaki yapışkan etkileşimi tanımlamaktır. Blot teorisi kullanılarak esnek çerçeve içinde süngerimsi kemik için yansıma ve iletim operatörleri türetilmiştir. İnsanın süngerimsi kemik örnekleri üzerinden iletilen yavaş ve hızlı dalgalar için deneysel sonuçlar ve teorik tahminler karşılaştırılmıştır [32].

c- Kesirli hesaplamalar kullanılarak konuşma sinyallerinin modellenmesi

Bu çalışmada kesirli hesaplamalar kullanılarak konuşma sinyallerinin modellenmesi için yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşım tamsayı dereceden modellere dayalı yaklaşım genellikle lineer tahminli kodlamadan farklıdır.

Temel fonksiyonlar gibi kesirli yöntemlerin sayısal simülasyonları birkaç integral ile gösterilmiş ve konuşma sinyalleri doğru bir şekilde modellenmiştir [22].

d- Kesirli hesaplamalar kullanılarak Kardiyak doku elektrot arayüz modellemesi

Doku elektrot arayüzü biyopotansiyel kaydının (örneğin; EKG, EMG, EEG) ve fonksiyonel elektrik stimülasyonunun (örneğin; kalp pili, koklear implant, derin beyin stimülasyonu) tüm formları ortaktır. Elektrotlar Konvansiyonel toplu devre elemanları

modelleri genişletilebilmesiyle tanımlanan akım-voltaj ilişkisinin değiştirilip genelleştirilmesi ile farklılaşmanın sağlanması yeterlidir. Bu tür kesir dereceli modeller bi-electrota gözlenen davranışa gelişmiş bir formülizasyon sağlar ancak son deneysel çalışmalar kardiyak dokunun bu karmaşık sistemini tanımlamak için ek matematiksel araçlara ihtiyaç olabileceğini düşündürmektedir [36].

e- Bağımsız araçların yatay ve uzunlamasına kontrolü için kesirli hesaplamaların kullanımı

Burada kesirli mertebeden kontrollerin kullanımı gösterilmiş ve bağımsız bir elektrikli aracın yolunu izleme problemlerine uygulanmıştır. Endüstriyel bir aracın yatay dinamik modelinin konveksiyonel uygulaması dikkate alınmıştır. Bu kontrollerle birçok kontrol şemaları elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır [40].

f- Viskoelastisite teorisinde kesirli uygulaması

Viskoelastisite teorik olarak kesirli türev yönteminin avantajının sadece birkaç deneysel olarak belirlenen parametreler ile viskoelastik malzemelerin elastik kompleks modül ile yapısal denklemlerin elde edilmesi için olanak sağlıyor olmasıdır. Ayrıca kesirli türev yöntemi viskoelastik modellerin değişik modelleri için alternatif akım dirençleri ve kompleks modülünün çalışmaları kullanılmıştır [20].

g- Reoloji modelinin kesirli hesabı kullanılarak viskoelastik boyutlu dalga yayılımı

Malzemelerin karmaşık mekanik davranışı katı ve sıvı modeller ile kesirli hesaplama farklılıkları stres ve gerginlik alanlarının ilişkilendirilmesiyle belirlenmiştir. Kesirli türevlerin moleküler çözümleri polimer zincir teorisinden viskoelastik gerilimi tanımlamak için verilmiştir. Özel olarak lineer, konik, üstel ve catenoidal şekiller üzerinde çalışılmıştır. Frekansa karşı dalga genlikleri analitik olarak çözülmüştür ve matematiksel hesaplamalarla tahmin edilmiştir. Bagley kesir reolojisinin veri simülasyonları dahil edilmiştir [27].

h- Akışkanlar mekaniği için kesirli hesaplamaların uygulanması

Zaman-bağımlı çözümüne kesirli analizin uygulanması, viskoz-difüzyon akışkanlar mekaniği problemlerini göstermiştir. Kesirli hesaplamaların uygulanması Laplace dönüşüm methodu ile birlikte bir yarı-sonsuz uzayda klasik geçici yapışkan difüzyon

denklemleri kesme gerilmesi ve her yerde etki alanında sıvı hızının açık analitik çözümlerini elde etmek için verilmiştir. 1. ve 2. Stokes problemleri için mevcut analitik sonuçları, sınır kesme-gerilim ve sıvı hızı için kesirli sonuçlarının karşılaştırılması, kesirli metodoloji doğrulanmış ve bilinen tekniklerle çok daha basit ve daha güçlü olduğu gösterilmiştir [39].

Son yıllarda kesirli analiz matematik, fizik, kimya, mühendislik ve hatta ekonomi ve sosyal bilimleri içeren birçok alanda araştırmacıların ilgisini çekmiştir. *Kesirli analiz neden önemlidir?* Sorusunun cevabını aşağıda genel halde özetleyebiliriz.

Kesirli analiz son zamanlarda pek çok bilim dalı için ilgi odağı olmuştur ve özellikle son on yılda difüzyon fiziği ve adveksiyon olaylarından ekonomi kontrol sistemlerine kadar değişen birçok alanda kesirli calculus uygulaması üzerine yapılan araştırma faaliyetlerinde büyük bir patlama olmuştur. Gerçekten şu anda kesirli analiz ile ilgili çalışmalar ve uygulamaların bazılarını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

- Mühendislik sistemlerinin kesirli kontrolü
- Kesirli dinamik sistem için farklılıklar ve optimal kontrol hesabı gelişmesi
- Analitik ve sayısal araçlar ve teknikler
- Temel keşifler viscoelastic polimerler, köpükler, jeller ve hayvan dokuları ve mühendislik ve bilimsel uygulamalarını olarak varios mühendislik malzemelerinin, mekanik, elektrik ve termal bünye ilişkileri ve diğer özellikleri
- Dalga ve plazma fiziği uygulamaları
- Biyomühendislik ve biyomedikal uygulamaları
- Fren sistemi ve makine aletleri gibi mühendislik sistemlerinin termal modelleme
- Görüntü ve sinyal işleme [19].

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1. (Başlangıç Değer Problemi) Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altındaki probleme başlangıç değer problemi denir. Verilen şartlara da başlangıç değer şartları denir [3].

Tanım 2.1.2. (Sınır Değer Problemi) Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altındaki probleme sınır değer problemi, verilen şartlara da sınır değer şartları denir [3].

Tanım 2.1.3. (Analitik Fonksiyon) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunun her noktasında diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir [31].

Tanım 2.1.4. (Süreklilik Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir [31].

Yani bir f fonksiyonun bir a noktasında sürekli olması için;

- f fonksiyonu a noktasında tanımlı olmalı
- f fonksiyonunun a noktasında limiti olmalı
- fonksiyonun a noktasındaki limiti a noktasındaki fonksiyon değerine eşit olmalıdır.

Tanım 2.1.5. (Diferensiyellenebilir Fonksiyon) $f(x)$, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

limiti mevcutsa $f(x)$ e bir $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilirdir (diferensiyellenebilirdir) denir. Eğer $f(x)$ I aralığının her noktasında türevlenebilirse bu takdirde $f(x)$ türevlenebilirdir [31].

Tanım 2.1.6. (İntegrallenebilir Fonksiyon) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığının bir parçalanması P olsun.

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} A(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ddot{U}(f, P) = s$$

ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyondur. s sayısına da f fonksi-

yonun $[a, b]$ aralığındaki belirli integral denir [31].

Tanım 2.1.7. (Cauchy İntegral Formülü) G bölgesi genellikle tek irtibatlı olmayan bir bölge ve bu bölgenin L sınırında $f(z)$ birebir ve analitik bir fonksiyon olsun. O halde her $z_0 \in G$ için,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \quad (2.1.1)$$

eşitliği sağlanır. (2.1.1) formülüne Cauchy integral formülü denir [31].

Tanım 2.1.8. (Gama Fonksiyonu) Gama fonksiyonu en basit manada faktöriyelin reel sayılara genişletilmesidir. $\text{Re } z > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır [35].

Gama Fonksiyonunun En Temel Özellikleri

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

İspat: $\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$ kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$u = t^z \text{ ve } e^{-t} dt = dv \text{ olmak üzere}$$

$$\Gamma(z+1) = -e^{-\infty} \infty^z + -e^{-0} 0^z + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ elde edilir.}$$

2. $\mathbb{Z} = -n, (n = 0, 1, 2, \dots)$ noktalarında basit kutba sahiptir. Bunu göstermek için,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1.3)$$

(2.1.2) eşitliği (2.1.3) formunda yazılır.

3. $1 < p < \infty$ ve eşleniği q ile Hölder eşitsizliğini gama fonksiyonunun integraline uygulayabiliriz. Şöyle ki $0 < x, y < \infty$ olsun, $\Gamma(x)$ ve $\Gamma(y)$ fonksiyonları pozitif çıksım ki logaritmasını alabilelim. Buna göre,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p} - \frac{t}{q}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{p}} dt \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\ln$ i alınırsa,

$$\begin{aligned}
\ln \left(\Gamma \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right) \right) &\leq \ln \left(\Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \cdot \Gamma(y)^{\frac{1}{q}} \right) \\
\Gamma \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right) &\leq \frac{1}{p} \Gamma(x) + \frac{1}{q} \Gamma(y)
\end{aligned}$$

olur.

4- Gama fonksiyonunun limit gösterimi $\operatorname{Re} x > 0$ olmak üzere;

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

biçimindedir.

Gama fonksiyonunun bazı değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$\Gamma(0) =$	tanımsız
$\Gamma(-\frac{3}{2}) =$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$
$\Gamma(-\frac{1}{2}) =$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{1}{2}) =$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1) =$	$1!$
$\Gamma(\frac{3}{2}) =$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(2) =$	$2!$
$\Gamma(\frac{5}{2}) =$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
$\Gamma(\frac{7}{2}) =$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
$\Gamma(\infty) =$	∞

Tablo 1.1

Tanım 2.1.9. (Beta Fonksiyonu)

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0 \quad (2.1.4)$$

şeklinde tanımlanan Beta fonksiyonu Euler integralinin ilk halidir [35].

Beta Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

1. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
2. $\beta(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$
3. $\beta(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$
4. $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Tanım 2.1.10. (Hata Fonksiyonu)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır [35].

Hata Fonksiyonunun En Temel Özellikleri

1. $\operatorname{erf}(0) = 0$
2. $\operatorname{erf}(\infty) = 1$
3. erf ile tanımlanan tamamlayıcı hata fonksiyonu $\operatorname{erf}(cx) = 1 - \operatorname{erf}(x)$

şeklindedir.

Tanım 2.1.11. (Mittag-Leffler Fonksiyonu) Üstel fonksiyon olan e^z , tamsayı dereceden diferensiyel denklem teorisinde önemli bir role sahip olup bu fonksiyonun bir parametrelili genişletilmiş hali,

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

fonksiyonuna tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir [35].

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

seri açılımı şeklindedir. α ve β nın belli değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu temel fonksiyonlara indirgenebilir. Bazı Mittag-Leffler fonksiyonlarını

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$\begin{aligned}
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \\
E_{1,0}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)!} = ze^z \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \\
E_{0,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Mittag-Leffler Fonksiyonunun Özellikleri

1. Bazı Özel Değerleri

$E_t(0, a)$	=	e^{at}
$E_t(-1, a)$	=	$a^p E_t(0, a), \quad p = 0, 1, 2, \dots$
$E_t(\frac{1}{2}, a)$	=	$a^{-\frac{1}{2}} e^{at} \operatorname{erf}(at)^{\frac{1}{2}}$
$E_0(v, a)$	=	$0, \quad \operatorname{Re} v > 0$
$E_t(-1, a)$	=	$a E_t(0, a)$
$E_t(-\frac{1}{2}, a)$	=	$a E_t(\frac{1}{2}, a) + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$
$E_t(1, a)$	=	$\frac{[E_t(0, a) - 1]}{a}$
$E_t(v, 0)$	=	$\frac{t^v}{\Gamma(v+1)}$
$L\{E_t(v, a)\}$	=	$\frac{1}{s^v(s-a)}, \quad \operatorname{Re} v > -1$
$e_i(t)$	=	$\sum_{k=0}^{q-1} \alpha_i^{q-k-1} E_t(-kv, \alpha_i^q)$

Tablo-2.1

2. Diferensiyel Formülleri

$DE_t(v, a)$	=	$E_t(v - 1, a)$
$D^\mu E_t(v, a) = E_t(v - \mu, a)$	=	$a^\mu E_t(v, a) + \sum_{k=0}^{\mu-1} \frac{a^k t^{v+k-\mu}}{\Gamma(v+k+1-\mu)}, \mu \in \mathbb{R}$
$D^\mu e^{at}$	=	$E_t(-\mu, a), t > 0$
$D^\mu [tE_t(w, a)]$	=	$tE_t(w - \mu, a) + \mu E_t(w - \mu + 1, a), w > -2,$
$D[tE_t(v, a)]$	=	$tE_t(v - 1, a) + E_t(v, a)$
$D[t^\mu E_t(v, a)]$	=	$t^\mu E_t(v - 1, a) + \mu t^{\mu-1} E_t(v, a), \mu \in \mathbb{R}$
$D^p [t^\mu E_t(v, a)]$	=	$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+1)} t^{\mu-k} E_t(v + k - p, a), p = 0, 1, 2, \dots$

Tablo-2.2

3. Öteleme Formülleri

$E_t(v, a)$	=	$aE_t(v + 1, a) + \frac{t^v}{\Gamma(v+1)}$
$E_t(v, a)$	=	$a^p E_t(v + p, a) + \sum_{k=0}^{p-1} a^k \frac{t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)}, p = 0, 1, \dots$
$E_t(v, a) - E_t(v, b)$	=	$aE(v + 1, a) - bE(v + 1, b)$
$E_t(v, a) - E_t(v, b)$	=	$a^p E_t(v + p, a) - b^p E_t(v + p, b) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(a^k - b^k)t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)}, p = 0, 1, \dots$

Tablo-2.3

Tanım 2.1.12. (Mellin Ross Fonksiyonu) $E_t(v, a)$ ile gösterilen Mellin Ross fonksiyonu e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanılır. Bu fonksiyonun özelliği hem Gama fonksiyonu, hem de Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılmalıdır. Öyle ki,

$$\begin{aligned}
 E_t(v, a) &= t^v e^{at} \Gamma^*(v, at) \\
 E_t(v, a) &= t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + v + 1)} \\
 &= t^v E_{1, v+1}(at)
 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada,

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, v > 0$$

ifadesine tamamlanmış gama fonksiyonu denir [35].

Tanım 2.1.13. (Wright Fonksiyonu)

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyondur.

Tanım 2.1.14. (Anger Fonksiyonu)

$$J_{\gamma}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(\gamma \theta - z \sin \theta) d\theta$$

ifadesine denir.

Tanım 2.1.15. (Dawson Fonksiyonu)

$$\begin{aligned} Dawson_+(x) &= e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \frac{-i\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \operatorname{erf}(ix) \\ Dawson_-(x) &= e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \operatorname{erf}(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Dawson fonksiyonu veya Dawson integrali denir.

Tanım 2.1.16. (Fresnel Fonksiyonu)

$$\begin{aligned} FresnelS(x) &= \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \\ FresnelC(x) &= \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara Fresnel fonksiyonları denir. FresnelS(x) fonksiyonuna Fresnel sinüs integrali ve FresnelC(x) fonksiyonuna da Fresnel kosinüs integrali denir.

Tanım 2.1.17. (Laplace Dönüşümü) $f, t > 0$ zaman değişkenli bir fonksiyon ve s bir parametre (reel veya kompleks) olsun. $f(t)$ nin Laplace dönüşümü,

$$f(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır [30].

Tanım 2.1.18. (Grunwald-Letnikov Kesirli Türevi)

m , $m < \sigma < m + 1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, ..m+1)$ türevleride $[a, t]$ aralığında sürekli olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun σ . mertebeden Grunwald- Letnikov kesirli türevi,

$${}_a D_t^\sigma f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\sigma} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\sigma}{r} f(t - rh)$$

$${}_a^{G.L} D_t^\sigma f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\sigma}}{\Gamma(k-\sigma+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\sigma+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\sigma} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\binom{\sigma}{r} = \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2) \dots (\sigma-r+1)}{r!}$$

olarak alınmıştır [35].

$f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ aralığında sürekli olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun σ . mertebeden Grunwald-Letnikov kesirli integrali,

$$\left[\begin{matrix} \sigma \\ r \end{matrix} \right] = \frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2) \dots (\sigma+r+1)}{r!}$$

olmak üzere

$${}_a D_t^{-\sigma} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^\sigma \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} \sigma \\ r \end{matrix} \right] f(t - rh),$$

$${}_a^{G.L} D_t^{-\sigma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^t (t-\tau)^{\sigma-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır [35].

Eğer $f'(t)$ türevi $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ise o zaman (2.1.6) denkleminde bir defa kısmi integrasyon uygularsak

$${}_a D_t^{-\sigma} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_a^t (t-\tau)^\sigma f'(\tau) d\tau$$

elde edilir. $f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında $m+1$ defa sürekli diferensiyellenebilir ise bu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir

$${}_a D_t^{-\sigma} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\sigma+k}}{\Gamma(\sigma+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\sigma+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau.$$

Tanım 2.1.19. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) f fonksiyonu her sonlu (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \sigma < m$ olmak üzere $t > a$ için reel bir f fonksiyonunun σ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$${}_a^{R.L}D_t^\sigma f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \sigma)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t - \tau)^{m-\sigma-1} f(\tau) d\tau \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanır [35].

Kesirli integral tanımında $\sigma > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$${}_a^{R.L}D_t^{-\sigma} f(t) = I_{0+}^\sigma(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^t (t - \tau)^{\sigma-1} f(\tau) d\tau$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.1.20. (Caputo Kesirli Türevi) m , $m - 1 < \sigma \leq m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, σ herhangi bir pozitif sayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun σ . mertebeden Caputo kesirli türevi,

$${}_a^C D_t^\sigma f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \sigma)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\sigma-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.1.7)$$

olarak tanımlanır [35]. Bu Caputo kesirli türevini Riemann-Liouville kesirli integrali türünden

$${}_a^C D_t^\sigma f(t) = I_{a+}^{m-\sigma}(f^{(m)}(x))$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Tanım 2.1.21. (Jumarie Kesirli Türevi) m , $m - 1 < \sigma < m$ ve $m \geq 1$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, σ herhangi bir pozitif sayı, $t \in [0, 1]$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun σ . mertebeden Jumarie kesirli türevi,

$${}_a^J D_t^\sigma f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \sigma)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t - \tau)^{m-\sigma} [f(\tau) - f(a)] d\tau \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanır [19].

Tanım 2.21. (Polinom fonksiyonlar için kesirli türev) (L.Euler-1730) k pozitif bir tam sayı olmak üzere $f(x) = x^k$ şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonun

σ . mertebeden klasik türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^k, \\
f'(x) &= kx^{k-1}, \\
f''(x) &= k(k-1)x^{k-2}, \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \\
&\dots \\
f^{(\sigma)}(x) &= k(k-1)(k-2)\dots(k-\sigma+1)x^{k-\sigma}, \\
&= \frac{k!}{(k-\sigma)!}x^{k-\sigma}
\end{aligned}$$

olacaktır. $\Gamma(n) = (n-1)!$ olmak üzere,

$$f^{(\sigma)}(x) = \frac{d^\sigma f(x)}{dx^\sigma} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\sigma+1)}x^{k-\sigma}$$

eşitliği ifade edilir [35]. Gama fonksiyonu yardımıyla σ sayısının herhangi bir pozitif sayı olması durumunda verilen bir fonksiyonun kesirli türevini hesaplamak mümkündür.

Tanım 2.1.23. (Dışbükey) X bir vektör uzayı Y de X vektör uzayının bir alt kümesi olsun. $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi dışbükey(konveks)dir [31].

Tanım 2.1.24. (Sınırlı küme) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve A bunun bir alt kümesi olsun.

$$d(A) = \sup \{\|x - y\| : x \in A, y \in A\} \geq 0$$

sayısına A kümesinin çapı denir. Eğer $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine sınırlı küme denir [31].

Tanım 2.1.25. (Banach uzayı) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [31].

Tanım 2.1.26. (Kompakt küme) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir alt kümesi E olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X de kompakt bir küme adı verilir [31].

Tanım 2.1.27. (Genelleştirilmiş integral) Bir f fonksiyonunun bir aralıkta integrelenebilmesi için o fonksiyonun verlen aralıkta sınırlı olması gerekir. Ancak bazı

fonksiyonlar sonsuz aralıklarda tanımlı ve sınırsızdır. İntegral hesabı yapıldığında elde edilen negatif alanlar veya sonlu olmayan alanların hesaplanmasında farklı tip genelleştirilmiş integraller ortaya çıkar.

a) 1. tip genelleştirilmiş integral $k \in \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu $t \geq k$ için $[k, t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_k^t f(x) dx$$

integraline 1. tip genelleştirilmiş integral denir. $\int_k^\infty f(x) dx$ ile gösterilir.

b) 2. tip genelleştirilmiş integral f fonksiyonu bir $[a, b)$ aralığının her kapalı alt aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$$

iken b noktası integralin singüler noktası olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ integraline 2. tip genelleştirilmiş integral denir.

c) 3. tip genelleştirilmiş integral Bir f fonksiyonu sınırsız aralıkta tanımlı ve aynı zamanda bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız ise bu tip integrallere 3. tip genelleştirilmiş integral denir.

Tanım 2.1.28. (Eş sürekli) $(C(\Omega; K), \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayının, E alt kümesi verilmiş olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0, \forall t_1, t_2 \in \Omega$ ve $\forall x \in E$ için

$$\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, E kümesine eş sürekli dir denir [31].

Tanım 2.1.29. (Düzgün sınırlı) $(C(\Omega; K), \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayının, E alt kümesi verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in E$ ve $\forall t \in \Omega$ için $|x(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa E kümesi düzgün sınırlıdır [31].

Teorem 2.1.30. (Arzela-Ascoli teoremi) Sınırlı ve kapalı $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ve $C(\Omega; K)$ uzayının bir E alt kümesi verilsin. E kümesinin $C(\Omega; K)$ de kompakt olması için gerek ve yeter koşul E nin düzgün sınırlı ve eş sürekli olmasıdır [31].

Tanım 2.1.31. (Daralma dönüşümü) X Banach uzayının D alt kümesinde tanımlı $T : D \rightarrow X$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in D$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|$$

olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sayısı varsa T operatörüne daralma dönüşümü denir [31].

Teorem 2.1.32. (Schauder sabit nokta teoremi) F operatörü X normlu uzayının dışbükey kapalı D alt kümesini kendisine dönüştürür yani $F(D) \subset D$. Eğer F operatörü D üzerinde tamamen sürekli ise onun D üzerinde sabit noktası vardır [31].

Tanım 2.1.33. (Tamamen sürekli) X ve Y birer normlu uzay, $F : X \rightarrow Y$ tanım kümesi $D(F) \subset X$ olan lineer olmayan bir operatör ve $x_0 \in D(F)$ olsun. Eğer F operatörü $D(F)$ üzerinde sürekli ve $D(F)$ içinde her sınırlı alt kümeye Y nin kompakt bir alt kümesini karşılık getiriyorsa F ye tamamen sürekli bir operatör denir [31].

Tanım 2.1.34. (Kompakt lineer operatör) X, Y Banach uzayları ve $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer A operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir kompakt kümesine çeviriyorsa, A ya kompakt lineer operatör (veya tamamen sürekli lineer operatör) denir [31].

3. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK TEKLİK TEOREMLERİ

3.1. Lineer Kesirli Diferensiyel Denklemler

Lineer kesirli diferensiyel denklemler için varlık teklilik teoremi,

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{j=0}^n p_j(t){}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t) + p_n(t)y(t) = f(t), \quad (3.1.1)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_{k-1}}y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (0 < t < T < \infty), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlı bir başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\left. \begin{aligned} {}_aD_t^{\sigma_k} &\equiv_a D_t^{\alpha_k} {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1} \\ {}_aD_t^{\sigma_{k-1}} &\equiv_a D_t^{\alpha_{k-1}} {}_aD_t^{\alpha_{k-2}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1} \end{aligned} \right\}$$

$\sigma_k = \sum_{j=0}^k \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad 0 < \alpha_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$ ve $f(t) \in L_1(0, T)$ yani $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ dir. Burada $f(t) \equiv 0, t > T$ olduğunu varsayalım. İlk olarak $p_k(t) \equiv 0, (k = 1, 2, \dots, n)$ göz önüne alalım [35].

Teorem 3.1.1. $f(t)$ fonksiyonu $L_1(0, T)$ aralığında integrallenebilir fonksiyon olsun.

O halde;

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) = f(t), \quad (3.1.3)$$

denklemini (3.1.2) başlangıç koşulunu sağlayan tek bir $y(t) \in L_1(0, T)$ çözümü mevcuttur.

İspat.

$$\begin{aligned} L\{{}_0D_t^{\sigma_n}f(t) : s\} &= s^{\sigma_n}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s_0^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{m-k-1}}f(t) \right]_{t=0}, \\ {}_aD_t^{\sigma_{m-k-1}} &= {}_aD_t^{\alpha_{m-k-1}} {}_aD_t^{\alpha_{m-k-2}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \end{aligned}$$

yukarıdaki gibi ardışık kesirli türevlerin Laplace dönüşüm formülünü (3.1.3) denkleminde uygularsak

$$s^{\sigma_n}Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{n-k-1}}f(t) \right]_{t=0} = F(s), \quad (3.1.4)$$

elde edilir. $Y(s)$ ve $F(s)$ sırasıyla $y(t)$ ve $f(t)$ nin Laplace dönüşümünü göstermektedir.

Başlangıç koşulları kullanılarak

$$Y(s) = s^{-\sigma_n}F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} s^{-\sigma_{n-k}} \quad (3.1.5)$$

olur. Buradan ters Laplace dönüşümü yardımıyla

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{s^{-\sigma_n}F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}s^{-\sigma_{n-k}}\right\},$$

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} t^{\sigma_{n-k}-1} \quad (3.1.6)$$

denklemini verir veya $i = n - k$ alınırsa

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} \quad (3.1.7)$$

${}_a D_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p}$ kuvvet fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli diferansiyel denklemini uygularsak ve $\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0$, $m = 1, 2, \dots$ olduğunu göz önüne alırsak

$${}_0 D_t^{\sigma_k} \left(\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{t^{\sigma_i-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_i-\sigma_k)}, & k < i \\ 0, & k \geq i \end{cases} \quad (3.1.8)$$

$${}_0 D_t^{\sigma_{k-1}} \left(\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{t^{\sigma_i-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_i-\sigma_k)}, & k < i \\ 1, & k = i \\ 0, & k \geq i \end{cases} \quad (3.1.9)$$

elde ederiz. Burada $k = 1, 2, \dots, n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir.

(3.1.7) deki formülden $y(t) \in L_1(0, T)$ dir. (3.1.8) ve (3.1.9) kullanılarak (3.1.2) başlangıç şartlarıyla (3.1.7) tarafından tanımlanan $y(t)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa $y(t)$ fonksiyonu bu şartları sağlar. Dolayısıyla buradan çözümün varolduğunu söyleyebiliriz. Laplace dönüşüm özelliğinden ve kesirli türevin lineerliğinden çözümün tekliğinin varolduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten problemin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ gibi iki tane çözümünün olduğunu varsayarsak

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

fonksiyonu da ${}_0 D_t^{\sigma_n} z(t) = 0$ denklemini ve sıfır başlangıç koşulunu sağlamalıdır. Bu taktirde $z(t)$ nin Laplace dönüşümü $Z(s) = 0$ ve böylece $z(t) = 0$ dir. O halde hemen hemen her yerde verilen aralıktadır. Dolayısıyla $y_1 = y_2$ olur ve buradan $L_1(0, T)$ de çözümü tektir.

Teorem 3.1.2. Eğer $f(t) \in L_1(0, T)$ ve $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), her kapalı $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyon ise bu taktirde (3.1.1) ve (3.1.2) de verilen başlangıç değer problemi $y(t) \in L_1(0, T)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

İspat. Varsayalım ki (3.1.1), (3.1.2) problemi $y(t)$ çözümüne sahip olsun. O halde

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) = \Psi(t), \quad (3.1.10)$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.1.1 kullanılarak

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \Psi(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n b_j \frac{t^{\sigma_j-1}}{\Gamma(\sigma_j)} \quad (3.1.11)$$

elde edilir. (3.1.11) denklemi (3.1.1) de yerine yazılarak

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) {}_0D_t^{\sigma_k}y(t) + p_n(t)y(t) = f(t)$$

olur. (3.1.8) kullanılarak $\Psi(t)$ fonksiyonu için 2. türden Volterra integral denklemi elde edilir. Öyle ki

$$\Psi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \Psi(\tau) d\tau = g(t) \quad (3.1.12)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= p_n(t) \frac{(t-\tau)^{\sigma_n-1}}{\mu(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \frac{(t-\tau)^{\sigma_n-\sigma_k-1}}{\mu(\sigma_n - \sigma_k)} \\ g(t) &= f(t) - p_n(t) \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \sum_{i=k+1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)} \end{aligned}$$

$p_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları $[0, T]$ aralığında sürekli oldukları için $K(t, \tau)$ çekirdeği zayıf singüler çekirdek formunda

$$K(t, \tau) = \frac{K^*(t, \tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} \quad (3.1.13)$$

yazılabilir. Burada $K^*(t, \tau)$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq T$ için sürekli ve

$$\mu = \min \{ \sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_n - \sigma_1 \} = \min \{ \sigma_n, \alpha_n \}$$

dir. Benzer şekilde $g(t)$ fonksiyonu

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{t^{1-\gamma}} \quad (3.1.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g^*(t)$ ler $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \nu &= \min \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_n - \sigma_1; \sigma_3 - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_2; \dots; \sigma_n - \sigma_{n-1} \} \\ &= \min \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2, \dots, \sigma_n \} \\ &= \min \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \} \end{aligned} \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

dir. (3.1.13) denklemindeki zayıf singüler çekirdeği ile tanımlı (3.1.12) denkleminin ve $g(t) \in L_1(0, T)$ 'nin sağ tarafının, $\Psi(t) \in L_1(0, T)$ şeklinde tek bir çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Bu taktirde Teorem 3.1.1'e göre (3.1.10) un tek çözümü $y(t) \in L_1(0, T)$, aynı zamanda (3.1.1)-(3.1.2) probleminin çözümü olan (3.1.2), (3.1.11) formülü kullanılarak elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Genellikle pek çok uygulama probleminde $y(t)$ fonksiyonu için sıfır başlangıç koşulu ve onun tamsayı basamaktan türevleri kullanılmıştır. Varsayalım ki $m - 1 \leq \sigma_n < m$ ve

$$y^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m - 1) \quad (3.1.15)$$

olsun. Bu durumda Riemann-Liouville türevleri için ardışık kesirli türev alınırsa, aynı σ_k mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevlerle (3.1.1) denklemindeki sıralı kesirli türevler yer değiştirebilir. Bu takdirde

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t){}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t) + p_n(t)y(t) = f(t) \quad (3.1.16)$$

olur. Burada ardışık kesirli türev

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t) \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

dir. (3.1.15) deki başlangıç koşullarından (3.1.2) deki tüm şartlar sıfır olur.

$(b_k = 0, k = 1, 2, \dots, n)$ $f(t)$ fonksiyonunu sürekli alırsak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.3. $f(t), p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ler $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyon olmak üzere (3.1.16) daki başlangıç değer problemi

$$\sigma_n > \sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \dots > \sigma_2 > \sigma_1 > 0, m - 1 \leq \sigma_n \leq m$$

olmak üzere $[0, T]$ aralığında sürekli olan tek $y(t)$ çözümüne sahiptir.

Şimdi genel formda kesirli diferensiyel denklemlerin başlangıç değer problemini ele alalım.

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) = f(t, y) \quad (3.1.17)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0} = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{\sigma_k} &= {}_0D_t^{\alpha_k} {}_0D_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_0D_t^{\alpha_1} \\
{}_0D_t^{\sigma_{k-1}} &= {}_0D_t^{\alpha_{k-1}} {}_0D_t^{\alpha_{k-2}} \dots {}_0D_t^{\alpha_1} \\
\sigma_k &= \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\
0 &< \alpha_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

Varsayalım ki $f(t, y)$ fonksiyonu (t, y) düzleminin G çevresinde ve aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $(t, y) \in G$ noktalarından oluşan $R(h, k) \subset G$ bölgesinde tanımlı olsun. Burada h ve K sabitler olmak üzere

$$\left| t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - \alpha_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K, \quad 0 < t < h \quad (3.1.19)$$

dir.

Teorem 3.1.4. $f(t, y)$ reel değerli sürekli fonksiyonu G çevresinde tanımlı olsun. Ayrıca $f(t, y)$, y 'ye göre Lipschitz şartını sağlasın. Yani

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|$$

olsun. Öyle ki, tüm $(t, y) \in G$ için, $|f(t, y)| \leq M \leq \infty$ olsun. Ayrıca

$$K \geq \frac{mh^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}$$

alalım. Bu taktirde (3.1.17)-(3.1.18) probleminin tek ve sürekli $y(t)$ çözümü $R(h, k)$ bölgesinde mevcuttur..

İspat. (3.1.17) ve (3.1.18) problemini (3.1.7) yi kullanarak birleşme kuralı yardımı ile $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ basamaktan kesirli integralin sıralı olarak uygulanmasıyla

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.1.20)$$

olur. Eğer $y(t)$ (3.1.17) ve (3.1.18)' i sağlıyorsa (3.1.20) denklemini de sağlar. Diğer taraftan eğer $y(t)$ (3.1.20)' nin bir çözümü ise bu taktirde (3.1.8) formülü ve ${}_0D_t^{\sigma_n}$ kesirli türev operatörünün ardışık olarak uygulanmasıyla $y(t)$ için (3.1.17) kesirli diferensiyel denklemini elde ederiz. Böylece (3.1.20) denklemi (3.1.17)-(3.1.18) başlangıç değer problemine eşdeğerdir.

Şimdi ardışık $y_0(t), y_1(t), \dots$ fonksiyonlar dizisi

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} \quad (3.1.21)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1.22)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t)$ limitinin mevcuttur ve (3.1.20) denkleminin çözümlerini verir. Öncelikle $0 < t \leq h$ olmak üzere her m için $y_m(t) \in R(h, K)$ olduğunu tümevarım metodunu kullanarak gösterelim.

$$\begin{aligned} \left| t^{1-\sigma_1} y_m(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| &= \left| \frac{t^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \quad (3.1.23) \\ &\leq M \frac{t^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \\ &\leq \frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \\ &\leq K \end{aligned}$$

ve $m = 1$ için de aynı eşitsizlik elde edilir. Yani y_1 içinde

$$\left| t^{1-\sigma_1} y_1(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq \frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(\sigma_n+1)} \leq K$$

olur.

Buradan her m için

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{MA^{m-1}t^{m\sigma_m}}{\Gamma(m\sigma_m+1)} \quad (3.1.24)$$

olduğunu gösterebiliriz. (3.1.23) ü kullanarak $m = 1$ için

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{Mt^{\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n+1)} \quad (0 < t \leq h) \quad (3.1.25)$$

olur. Varsayalım ki

$$|y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| \leq \frac{MA^{m-2}t^{(m-1)\sigma_m}}{\Gamma((m-1)\sigma_m+1)} \quad (3.1.26)$$

olsun. (3.1.22) ve (3.1.26) dan

$${}_0D_t^p((t-a)^v) = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)} (t-a)^{v-p}$$

formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
|y_m(t) - y_{m-1}(t)| &\leq \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n} |y_{m-1}(\tau) - y_{m-2}(\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \tau^{(m-1)\sigma_n} d\tau \\
&= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} {}_0D_t^{-\sigma_n} t^{(m-1)\sigma_n} \\
&= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{\Gamma((m-1)\sigma_n+1)t^{(m-1)\sigma_n+\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n+\sigma_n)} \\
&= \frac{MA^{m-1}t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)} \tag{3.1.27}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize (3.1.24) ün her m için geçerli olduğunu gösterir. Şimdi

$$y^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m(t) - y_0(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j(t) - y_{j-1}(t)) \tag{3.1.28}$$

serisini alalım. (3.1.24) deki eşitsizliğe göre $0 \leq t \leq h$ için terimlerinin gerçek değeri buna denk gelen yakınsak sayısal serinin terimlerinden daha küçüktür.

$$M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{MA^{j-1}h^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+j\sigma_n)} = \frac{M}{A} (E_{\sigma_n,1}(Ah_n^\sigma) - 1) \tag{3.1.29}$$

Burada $E_{\lambda,\mu}(z)$ iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur. O halde (3.1.28) serisi düzgün yakınsaktır. (3.1.28) serisinin her bir terimi $(y_j(t) - y_{j-1}(t))$, $0 \leq t \leq h$ aralığında t nin sürekli bir fonksiyondur. O halde (3.1.28) de ki $y^*(t)$ serisinin toplamı $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyondur ve

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y_0(t) + y^*(t)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $y(t)$ nin $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyon olduğu elde edilir. $y_m(t)$ dizisinin düzgün yakınsak olması (3.1.22) ifadesinde $m \rightarrow \infty$ iken limit almamıza olanak sağlar. Bu ise (3.1.21) ve (3.1.22) tarafından tanımlanan $y(t)$ limit fonksiyonunun (3.1.20) nin çözümü olduğunu gösterir.

Son olarak çözümün tekliğini ispatlayalım. $\tilde{y}(t)$, (3.1.20) denkleminin $0 \leq t \leq h$ aralığında sürekli olan bir başka çözümü olsun. Buna göre $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ olarak alırsak (3.1.20) ye göre

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(t, z(\tau)) d\tau \tag{3.1.30}$$

denklemini sağlar. Burada $z(0) = 0$ dır. Böylece $z(t)$, $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyon olur. Ayrıca $|z(t)| < B$, $0 \leq t \leq h$ olsun. (3.1.30) denkleminde

$$|z(t)| \leq \frac{ABt^{\sigma_n}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}, \quad (0 \leq t \leq h) \quad (3.1.31)$$

olur. Bu hesaplamalara j kez devam ettiğimizde

$$|z(t)| \leq \frac{A^j B t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.1.32)$$

bulunur. Burada $j \rightarrow \infty$ iken *limit* alınırsa $z(t) = 0$ olur. Dolayısıyla $0 \leq t \leq h$ için $\tilde{y}(t) \equiv y(t)$ elde edilir. Yani çözüm tektir.

Uygulama 3.1.5

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \lambda y(t) \quad (3.1.33)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.34)$$

Başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu durumda $f(t, y) = \lambda y$ dir. Teorem 3.1.4 ün ispatını göz önüne alırsak

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (3.1.35)$$

$$\begin{aligned} y_m(t) &= y_0(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} y_{m-1}(\tau) d\tau \\ &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} y_{m-1}(t), \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

(3.1.35) ve (3.1.36) yı kullanırsak ve kuvvet fonksiyonunun kesirli diferensiyeli için olan formülü uygularsak

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0(t) + {}_0D_t^{-\sigma_n} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right\}, \\ &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)}, \\ y_2(t) &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} y_1(t), \\ &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} \left\{ y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} \right\}, \\ &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} + \lambda^2 \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{2\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(2\sigma_n + \sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.1.37)$$

şeklinde gösterilebilir. (3.1.37) de $m \rightarrow \infty$ için *limit* alınırsa (3.1.33)-(3.1.34) probleminin çözümleri elde edilir.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i t^{\sigma_i - 1} E_{\sigma_n, \sigma_i}(\lambda t^n) \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Burada $E_{\sigma_n, \sigma_i}(\lambda t^n)$, $E_{\alpha, \beta}(z)$ şeklinde Mittag-Leffler fonksiyonudur.

$n = 1$ ve $\sigma_1 = 1$ için (3.1.33) ve (3.1.34) başlangıç değer problemi

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = b_1 \quad (3.1.39)$$

şeklinde ifade edilir. (3.1.38) formülü (3.1.39) probleminin

$$y(t) = b_1 E_{1,1}(\lambda t) = e^{\lambda t}$$

klasik çözümünü verir.

Uygulama 3.1.6 Terimleri Riemann-Liouville kesirli türevler olan başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\sigma y(t) &= t^\sigma y(t) \\ [{}_0D_t^{\sigma-1} y(t)]_{t=0} &= b, \quad (0 < \sigma < 1) \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Bu durumda $f(t, y) = t^\sigma y$ dir. Teorem 3.1.4 ün ispatından

$$y_0(t) = \frac{bt^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \quad (3.1.41)$$

$$y_m(t) = \frac{bt^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma-1} \tau^\sigma y_{m-1}(\tau) d\tau, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.1.42)$$

elde edilir. (3.1.35) ve (3.1.36) yı kullanalım ve kuvvet fonksiyonunun kesirli diferensiyeli için olan formülü uygulayalım

$$y_m(t) = \frac{bt^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + b \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(2\sigma)\Gamma(4\sigma)\dots\Gamma(2k\sigma)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(3\sigma)\dots\Gamma(2k\sigma + \sigma)} t^{\sigma(2k+1)-1}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ve $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$y(t) = \frac{bt^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k \Gamma(2j\sigma)}{\prod_{j=1}^k \Gamma(2j\sigma + \sigma)} t^{\sigma(2k+1)-1} \quad (3.1.43)$$

çözümünü verir.

3.2. Kesirli Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı

Teorem 3.2.1 (Nonlineer alternatif) U nun, E Banach uzayındaki konveks V kümesinin nispeten açık alt kümesi olduğunu varsayalım. $G : \bar{U} \rightarrow V$, kompakt bir görüntü olsun. $p \in U$ ve $N_\lambda(u) = N(u, \lambda) : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow K$ kompakt görüntülerin ailesi (yani $N(U \times [0, 1])$ V nin kompakt bir alt kümesinde yer alsın ve $N_\lambda : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow V$ sürekli. $N_1 = G$ ile $N_0 = p$, p ye göre sabit bir görüntü olsun. O zaman ya

- (i) $G, \bar{U}$ da sabit bir noktaya sahiptir. Yada
- (ii) $u \in \partial U$ noktası vardır ve $\lambda \in (0, 1)$ için $u = N_\lambda u$ dir [38].

Kesirli sınır değer problemi

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\sigma u(t) &= g(t, u(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \sigma < 2 \\ u(0) &= \alpha \neq 0, \quad u(1) = \beta \neq 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu sınır değer problemi için çözümün varlığını göz önüne alalım. $g(t, u(t))$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Caputo kesirli türevi için Laplace dönüşümünü inceleyelim. (2.1.7) tanımından Caputo kesirli türevine Laplace dönüşümünü uygulanırsa

$$\begin{aligned} L \{ {}^C_a D_t^\sigma f(t) \} &= L \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\sigma)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\sigma-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right\}, \\ L \{ {}^C_a D_t^\sigma f(t) \} &= \frac{1}{\Gamma(n-\sigma)} L \{ (t-\tau)^{n-\sigma-1} \} L \{ f^{(n)}(\tau) \}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\sigma)} \frac{(n-\sigma-1)!}{s^{n-\sigma}} \left(s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} u^{(k)}(0) \right), \\ &= s^\sigma U(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\sigma-k-1} u^{(k)}(0), \quad n-1 < p \leq n \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Burada L Laplace operatörü, $U(s)$ de $u(t)$ nin Laplace dönüşümü olarak tanımlanır.

İlk olarak kesirli diferansiyel denklemler için homojen olmayan başlangıç değer probleminin bir $u_1(t)$ çözümünü bulalım.

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\sigma u(t) &= f(t), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \sigma < 2 \\ u(0) &= \alpha, \quad u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

(3.2.3) ün Laplace dönüşümü alınır

$$\begin{aligned} L \{ {}^C_0 D_t^\sigma u(t) \} &= L \{ f(t) \}, \\ s^\sigma U(s) - \sum_{k=0}^1 s^{\sigma-k-1} u^{(k)}(0) &= F(s), \\ s^\sigma U(s) - s^{\sigma-1} u^{(0)}(0) - s^{\sigma-2} u^{(1)}(0) &= F(s), \\ s^\sigma U(s) - s^{\sigma-1} u(0) - s^{\sigma-2} u'(0) &= F(s), \\ s^\sigma U(s) - s^{\sigma-1} \alpha &= F(s), \\ s^\sigma U(s) &= F(s) + s^{\sigma-1} \alpha, \\ U(s) &= s^{-\sigma} F(s) + \alpha s^{-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan ters Laplace dönüşümü alınarak

$$\begin{aligned} L^{-1} \{ U(s) \} &= L^{-1} \{ s^{-\sigma} F(s) \} + L^{-1} \{ \alpha s^{-1} \} \\ u_1(t) &= \frac{t^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} f(t) + \alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int_0^t E_{t-s}(\sigma-1, 0) f(s) ds + \alpha E_t(0, 0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} f(s) ds + \alpha \end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada $E_{t-s}(\sigma-1, 0)$ ve $E_t(0, 0)$, $E_t(v, a)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun özel halleridir. [29] dan $E_t(\sigma-1, 0) = \frac{t^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}$ ve $E_t(0, 0) = 1$ olduğunu biliyoruz.

İkinci olarak kesirli diferansiyel denklemler için homojen olan başlangıç değer probleminin $u_2(t)$ çözümünü bulalım.

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\sigma u(t) &= 0, \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \sigma < 2 \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = \beta \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

(3.2.4) de Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
L \{ {}^C D_t^\sigma u(t) \} &= L \{ 0 \}, \\
s^\sigma U(s) - \sum_{k=0}^1 s^{\sigma-k-1} u^{(k)}(0) &= 0, \\
s^\sigma U(s) - s^{\sigma-1} u^{(0)}(0) - s^{\sigma-2} u^{(1)}(0) &= 0, \\
s^\sigma U(s) - s^{\sigma-1} u(0) - s^{\sigma-2} u'(0) &= 0, \\
s^\sigma U(s) - s^{\sigma-2} \beta &= 0, \\
s^\sigma U(s) &= s^{\sigma-2} \beta, \\
U(s) &= \beta s^{-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
L^{-1} \{ U(s) \} &= L^{-1} \{ \beta s^{-2} \}, \\
u_2(t) &= \beta \frac{t}{\Gamma(2)}, \\
u_2(t) &= \beta t
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$u_2(t) = \beta E_t(1, 0)$$

olur. Burada $E_t(1, 0) = t$ dir. Böylece c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

$g(t, u(t)) = f(t)$ ile (3.2.1) kesirli diferansiyel denklemi için homojen olmayan sınır değer probleminin bir çözümüdür.

Gerçekten $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$ sınır değer şartlarıyla

$$\begin{aligned}
u(0) &= c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) \\
\alpha &= c_1 \alpha \Rightarrow c_1 = 1
\end{aligned}$$

diğer yandan,

$$\begin{aligned}
u(1) &= c_1 u_1(1) + c_2 u_2(1) \\
\beta &= u_1(1) + c_2 u_2(1) \\
c_2 &= \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle (3.2.1) kesirli diferansiyel denklemi için homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_1(t) + \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)} u_2(t) \\
&= u_1(t) + (\beta - u_1(1)) \frac{u_2(t)}{u_2(1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} f(s) ds + \alpha + \left(\beta - \alpha - \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} f(s) ds \right) t
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$X \in C[0, 1]$ bir Banach uzayıdır.

(H_1) $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur.

Yukarıda belirtilen şartlar göz önüne alındığında (3.2.1) probleminin $u(t)$ çözümü

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds + \alpha + \left(\beta - \alpha - \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right) t \\
&= \alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds
\end{aligned}$$

integral denkleminde denktir. Buradan

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\sigma u(t) &= \lambda g(t, u(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < \sigma < 2 \\
u(0) &= \alpha, \quad u(1) = \beta
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

problemini göz önüne alalım. Burada $\lambda \in (0, 1)$ dir. O halde (3.2.5) sınır değer probleminin $u(t)$ çözümü

$$\begin{aligned}
u(t) &= \lambda \left[\alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right]
\end{aligned}$$

integral denkleminde karşılık gelir. Buradan $T_\lambda : X \rightarrow X$ tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
T_\lambda u(t) &= \lambda \left[\alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right]
\end{aligned}$$

olur. T_λ operatörü aşağıdaki sonuca sahiptir

Lemma 3.2.2 (H_1) şartı sağlanıyorsa T_λ kompakt operatördür [38].

İspat (H_1) şartı göz önüne alınırsa $T_\lambda : X \rightarrow X$ süreklidir.

$u \in M = \{u \in X : \|u\| \leq l, l > 0\}$ için

$$\begin{aligned}
|T_\lambda u(t)| &= \left| \lambda \left(\alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right) \right| \\
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} |g(s, u(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} |g(s, u(s))| ds \\
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{L}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} ds + \frac{L}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} ds \\
&= |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{L}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma + \frac{L}{\Gamma(\sigma+1)} \\
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{L}{\Gamma(\sigma+1)} + \frac{L}{\Gamma(\sigma+1)}
\end{aligned}$$

olur. Burada $L = \max_{0 \leq t \leq 1, \|u\| \leq l} |g(t, u(t))| + 1$ dir. O halde T_λ sınırlıdır. Şimdi de T_λ nın eş sürekli olduğunu gösterelim. $\forall u \in M, \forall \varepsilon > 0, t_1 < t_2 \in [0, 1]$ için $\eta < \left\{ \frac{\varepsilon}{3|\beta-\alpha|+1}, \frac{\varepsilon\Gamma(1+\sigma)}{3L}, \left(\frac{\varepsilon\Gamma(\sigma)}{6L} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \right\}$ olduğundan $t_2 - t_1 < \eta$ dir.

$$\begin{aligned}
|T_\lambda u(t_2) - T_\lambda u(t_1)| &= \lambda \left| (\beta - \alpha)(t_2 - t_1) + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-1} g(t_2 - t_1, u(t_2) - u(t_1)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right| \\
&= \lambda \left| (\beta - \alpha)(t_2 - t_1) + I_{0+}^\sigma g(t_2, u(t_2)) - I_{0+}^\sigma g(t_1, u(t_1)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right| \\
&= \lambda \left| (\beta - \alpha)(t_2 - t_1) + I_{0+}^{\sigma-1} I_{0+}^1 g(t_2, u(t_2)) - I_{0+}^{\sigma-1} I_{0+}^1 g(t_1, u(t_1)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left| (\beta - \alpha)(t_2 - t_1) + \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-2} \int_0^s g(\tau, u(\tau)) d\tau ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\sigma-2} \int_0^s g(\tau, u(\tau)) d\tau ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right| \\
&= \lambda \left| (\beta - \alpha)(t_2 - t_1) + \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\sigma-2} \int_0^s g(\tau, u(\tau)) d\tau ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\sigma-2} \int_0^s g(\tau, u(\tau)) d\tau ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-2} \int_0^s g(\tau, u(\tau)) d\tau ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right| \\
&\leq |\beta - \alpha| (t_2 - t_1) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\sigma-2} - (t_1 - s)^{\sigma-2}| \int_0^s |g(\tau, u(\tau))| d\tau ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-2} \int_0^s |g(\tau, u(\tau))| d\tau ds \\
&\quad + \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} |g(s, u(s))| ds \\
&\leq |\beta - \alpha| (t_2 - t_1) + \frac{L}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\sigma-2} - (t_1 - s)^{\sigma-2}| \int_0^s d\tau ds \\
&\quad + \frac{L}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-2} \int_0^s d\tau ds + \frac{L(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} ds \\
&= |\beta - \alpha| (t_2 - t_1) + \frac{L}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\sigma-2} - (t_2 - s)^{\sigma-2}) s ds \\
&\quad + \frac{L}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-2} s ds + \frac{L(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\beta - \alpha| (t_2 - t_1) + \frac{L}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\sigma-2} - (t_2 - s)^{\sigma-2}) ds \\
&\quad + \frac{L}{\Gamma(\sigma - 1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\sigma-2} ds + \frac{L(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} ds \\
&= |\beta - \alpha| (t_2 - t_1) + \frac{L}{\Gamma(\sigma)} (t_1^{\sigma-1} + (t_2 - t_1)^{\sigma-1} - t_2^{\sigma-1} + (t_2 - t_1)^{\sigma-1}) \\
&\quad + \frac{L(t_2 - t_1)}{\Gamma(\sigma + 1)} \\
&\leq |\beta - \alpha| \eta + \frac{L}{\Gamma(\sigma)} (t_2^{\sigma-1} + 2(t_2 - t_1)^{\sigma-1} - t_2^{\sigma-1}) + \frac{L\eta}{\Gamma(\sigma + 1)} \\
&\leq |\beta - \alpha| \eta + \frac{2L}{\Gamma(\sigma)} \eta^{\sigma-1} + \frac{L\eta}{\Gamma(\sigma + 1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Buradan T_λ düzgün sınırlıdır. Böylece $\overline{T_\lambda(M)}$ eş süreklidir. Arzela-Ascoli teoreminden dolayı T_λ 'nin kompakt operatör olduğu ortaya çıkar.

Teorem 3.2.3 (H_1) ve (H_2) $0 < c_1 < \frac{\Gamma(\sigma+1)}{6}$, $c_2 > 0$ sabitler olmak üzere tüm $t \in [0, 1]$ ve $u \in \mathbb{R}$ için $|g(t, u(t))| \leq c_1 |u|^\mu + c_2$, $0 < \mu \leq 1$, şartları sağlansın. Bu takdirde (3.2.1) sınır değer problemi bir çözüme sahiptir [38].

İspat Bunu ispatlamak için T nin sabit noktasının olduğunu göstermeliyiz. X in açık alt kümesi $\Omega = \{u \in X; \|u\| < R\}$ olsun. Burada $R > \left\{1, 3(|\alpha| + |\beta - \alpha|), \frac{6c_2}{\Gamma(1+\sigma)}\right\}$ dir. $u = T_\lambda$ olacak şekilde bir $u \in \partial\Omega$ noktasının ve $\lambda \in (0, 1)$ nin olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
|T_\lambda u(t)| &= \lambda \left| \alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right| \\
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t - s)^{\sigma-1} |g(s, u(s))| ds \\
&\quad - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - s)^{\sigma-1} |g(s, u(s))| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} (c_1 |u(s)|^\mu + c_2) ds \\
&\quad - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} (c_1 |u(s)|^\mu + c_2) ds \\
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} (c_1 \|u(s)\|^\mu + c_2) ds \\
&\quad - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} (c_1 \|u(s)\|^\mu + c_2) ds \\
&< |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} (c_1 R^\mu + c_2) ds \\
&\quad - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} (c_1 R^\mu + c_2) ds \\
&= |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{2c_1}{\Gamma(\sigma+1)} R^\mu t^\sigma + \frac{c_2}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma + \frac{c_1}{\Gamma(\sigma+1)} R^\mu + \frac{c_2}{\Gamma(\sigma+1)} \\
&\leq |\alpha| + |\beta - \alpha| + \frac{2c_1}{\Gamma(\sigma+1)} R + \frac{2c_2}{\Gamma(\sigma+1)} \\
&\leq \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = R
\end{aligned}$$

olur. Burada $\|T_\lambda\| \neq R = \|u\|$ olur ki bu bir daralma dönüşümüdür. Teorem 3.2.1 T_1 ' in $u \in \bar{\Omega}$ şeklinde sabit bir noktaya sahip olduğunu gösterir. Buda $u \in \bar{\Omega}$ (3.2.1) probleminin tek bir çözüme sahip olduğunu verir.

Açıklama Şimdi ε, k pozitif sayılar, σ (3.2.1) problemindeki parametre ve

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, x \in Y \quad (3.2.7)$$

olmak üzere, $Y \in C[0, 1]$ Banach uzayı

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{0 \leq t \leq 1} e^{-\varepsilon k t^{\sigma-1}} \|x\| \quad (3.2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.4. (H_3) $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbb{R}$ için $|g(t, u(t))| \leq a |u|^\nu + b$ olacak şekilde $a > 0$, $\nu \geq 1$, $0 < b \leq \frac{\Gamma(1+\sigma)}{8}$ sabitleri vardır.

(H'_3) $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbb{R}$ için $|g(t, u(t))| \leq a |u|^\nu + b$ olacak şekilde $a > 0$, $b > 0$, $0 < \nu \leq 1$ sabitleri vardır. Buna göre (H_1) (H_3) ve (H'_3) şartlarından biri sağlansın.

Bu taktirde (3.2.1) problemi bir tek çözüme sahiptir [38].

İspat Teoremi Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ispatlayalım. (3.2.1) problemi

$$u(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds$$

integral denkleminde denktir. Y uzayı için $k = \frac{2a}{\Gamma(\sigma+1)}$ alalım. $F : Y \rightarrow Y$ tanımlansın. O halde

$$Fu(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds$$

olur. Lemma 3.2.2' den faydalanılırsa F operatörünün tamamen sürekli olduğu görülür.

Şimdi, ilk önce (H_3) şartının sağlandığını kabul edelim.

$\frac{1}{2} \leq R \leq 1$ olmak üzere $B_R = \{u \in Y; \|u - (\alpha + (\beta - \alpha)t)\|_\varepsilon \leq R\}$ kümesi Y uzayının kapalı ve dış bükey alt kümesidir. $u \in B_R$ için

$$\begin{aligned} |Fu(t) - (\alpha + (\beta - \alpha)t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right|, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} (a|u(s)|^\nu + b) ds \\ &\quad + \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} (a|u(s)|^\nu + b) ds, \\ &\leq \frac{a}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} \|u(s)\|^\nu ds + \frac{b}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} ds \\ &\quad + \frac{at}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} \|u(s)\|^\nu + \frac{bt}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} ds, \\ &= \frac{a}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma \|u(s)\|^\nu + \frac{b}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma + \frac{at}{\Gamma(\sigma+1)} \|u(s)\|^\nu \\ &\quad + \frac{bt}{\Gamma(\sigma)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{\Gamma(\sigma+1)} t^{\sigma-1} t \|u(s)\|^\nu + \frac{b}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma + \frac{at}{\Gamma(\sigma+1)} \|u(s)\|^\nu + \frac{bt}{\Gamma(\sigma)}, \\
&\leq \frac{2a}{\Gamma(\sigma+1)} t^{\sigma-1} \|u\|^\nu + \frac{2b}{\Gamma(\sigma+1)}, \\
&\leq \frac{2a}{\Gamma(\sigma+1)} t^{\sigma-1} \|u\|^\nu + \frac{1}{4}, \\
&\leq \frac{2a}{\Gamma(\sigma+1)} t^{\sigma-1} \|u\|^\nu + \frac{R}{2}
\end{aligned}$$

olur. (3.2.6) ve (3.2.7) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\leq kv(\sigma-1) \int_0^t s^{\sigma-2} e^{-\nu \varepsilon ks^{\sigma-1}} e^{\nu \varepsilon ks^{\sigma-1}} \|u\|^\nu ds + \frac{R}{2} \\
&\leq kv(\sigma-1) \int_0^t s^{\sigma-2} e^{\nu \varepsilon ks^{\sigma-1}} \|u\|_\varepsilon^\nu ds + \frac{R}{2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\nu \varepsilon ks^{\sigma-1}} \|u\|_\varepsilon^\nu d(\nu \varepsilon ks^{\sigma-1}) + \frac{R}{2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} (e^{\nu \varepsilon kt^{\sigma-1}} - 1) \|u\|_\varepsilon^\nu + \frac{R}{2} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} e^{\nu \varepsilon kt^{\sigma-1}} R^\nu + \frac{R}{2} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} e^{\nu \varepsilon kt^{\sigma-1}} R + \frac{R}{2}
\end{aligned}$$

yazılabilir ve

$$\|Fu(t) - (\alpha + (\beta - \alpha)t)\|_\varepsilon \leq \frac{R}{\varepsilon} + \frac{R}{2} \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

$\varepsilon \geq 2$ için elde edilir.

Aynı şekilde (H'_3) şartına sahipse,

$R > \left\{1, \frac{4b}{\Gamma(\sigma+1)}\right\}$ olmak üzere $B_R = \{u \in Y; \|u - (\alpha + (\beta - \alpha)t)\|_\varepsilon \leq R\}$, Y uzayının kapalı ve dış bükey alt kümesidir. $u \in B_R$ için

$$\begin{aligned}
|Fu(t) - (\alpha + (\beta - \alpha)t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} g(s, u(s)) ds \right|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} (a|u(s)|^\nu + b) ds \\
&\quad + \frac{t}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} (a|u(s)|^\nu + b) ds, \\
&\leq \frac{a}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} \|u(s)\|^\nu ds + \frac{b}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} ds \\
&\quad + \frac{at}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} \|u(s)\|^\nu + \frac{bt}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-1} ds, \\
&\leq \frac{a}{\Gamma(\sigma+1)} \|u(s)\|^\nu t^\sigma + \frac{b}{\Gamma(\sigma+1)} t^\sigma + \frac{at}{\Gamma(\sigma+1)} \|u(s)\|^\nu \\
&\quad + \frac{bt}{\Gamma(\sigma+1)}, \\
&\leq \frac{2a}{\Gamma(\sigma+1)} \|u\|^\nu t^{\sigma-1} + \frac{2b}{\Gamma(\sigma+1)}, \\
&= k(\sigma-1) \int_0^t s^{\sigma-2} e^{\nu \varepsilon k s^{\sigma-1}} e^{-\nu \varepsilon k s^{\sigma-1}} \|u\|^\nu ds + \frac{R}{2}, \\
&\leq k(\sigma-1) \int_0^t s^{\sigma-2} e^{\nu \varepsilon k s^{\sigma-1}} \|u\|_\varepsilon^\nu ds + \frac{R}{2}, \\
&\leq R^\nu k(\sigma-1) \int_0^t s^{\sigma-2} e^{\varepsilon k s^{\sigma-1}} \|u\|_\varepsilon^\nu ds + \frac{R}{2}, \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon k s^{\sigma-1}} R + \frac{R}{2}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|Fu(t) - (\alpha + (\beta - \alpha)t)\|_\varepsilon \leq \frac{R}{\varepsilon} + \frac{R}{2} \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

$\varepsilon \geq 2$ için elde edilir.

Yani $F(B_R) \subseteq B_R$ ve $F : B_R \rightarrow B_R$ tamamen süreklidir. Schauder sabit nokta teoreminden dolayı (3.2.1) problemi bir çözüme sahiptir.

4. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

4.1. Kesirli Laplace Dönüşümü

Bu bölümde, Laplace dönüşüm yöntemi sabit ve değişken katsayılı kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmış ve çözümler elde edilmiştir. Çözümler sadeleştirilmiş kompakt formda ifade edilebilir veya Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılabilir.

Laplace dönüşümünde integral her f fonksiyonu için yakınsak değildir. Yani Laplace dönüşümü mevcut değildir. Örneğin $\frac{1}{x}$, e^{x^2} gibi fonksiyonların Laplace dönüşümü mevcut değildir. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde parçalı sürekli ve $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ (α .mertebeden üstel) ise $s > \alpha$ için $L\{f(t)\}$ mevcuttur. $L\{f(t)\}$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^t e^{-st} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. $F(s)$ in tek ters Laplace dönüşümü ise $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ şeklindedir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözmek için $E(t, \alpha, a)$ fonksiyonu

$$E(t, \alpha, a) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \alpha + 1)} = t^\alpha E_{1, \alpha+1}(at) \quad (4.1.1)$$

şeklinde göz önüne alalım [21].

Teorem 4.1.1. $E(t, \alpha, a)$ fonksiyonu,

$$E(t, \alpha, a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{a(t-\tau)} d\tau \quad (4.1.2)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (4.1.2) denkleminin sağındaki integrali ele alalım.

$$e^{a(t-\tau)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k (t-\tau)^k}{k!} \text{ eşitliği yerine yazılırsa}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{a(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k (t-\tau)^k}{k!} \right) d\tau$$

elde edilir. Düzgün yakınsak olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a^k t^k}{k!} \left(\int_0^t \tau^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^k d\tau \right) \right]$$

şeklinde yazabiliriz.

$$I = \int_0^t \tau^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^k d\tau \quad (4.1.3)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a^k t^k}{k!} I \right] \quad (4.1.4)$$

bulunur.

İspatı tamamlamak için I ile verilen integrali hesaplayalım. (4.1.3) de $\frac{\tau}{t} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\tau = ut \Rightarrow d\tau = t du$$

ve sınırlar $\tau = 0$ için $u = 0$, $\tau = t$ için $u = 1$ olarak değişir. Bunları (4.1.3) denkleminde yerlerine yazar ve belli işlemler yaparsak,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t^{\alpha-1} u^{\alpha-1} (1-u)^k t du \\ &= t^{\alpha} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^k du \\ &= t^{\alpha} \beta(\alpha, k+1) \end{aligned}$$

olur. Sonuçta $\beta(\alpha, k+1)$ beta fonksiyonunu gama fonksiyonu türünden yazarsak

$$I = t^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

bulunur. Bunu (4.1.4) de yerine koyarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{a(t-\tau)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \frac{t^{\alpha} \Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \frac{t^{\alpha} \Gamma(\alpha) k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\ &= t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.1.1) deki tanımdan dolayı aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{a(t-\tau)} d\tau = t^{\alpha} E_{1,\alpha+1}(at) = E(t, \alpha, a)$$

Sonuç 4.1.2.**(i)**

$$E_{1,\frac{3}{2}}(at) = \frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \quad (4.1.5)$$

şeklindedir.

ispat (i). (4.1.2) kullanılarak $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned} E(t, \frac{1}{2}, a) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \tau^{\frac{1}{2}-1} e^{a(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} e^{a(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{e^{at}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-a\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

olur. $a\tau = u^2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\tau = \frac{u^2}{a} \Rightarrow d\tau = \frac{2udu}{a}$$

sınırlar da $\tau = 0 \Rightarrow u = 0$ ve $\tau = t \Rightarrow u = \sqrt{at}$ olur. Bunlar (4.1.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E(t, \frac{1}{2}, a) &= \frac{e^{at}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\sqrt{at}} \frac{\sqrt{a}}{u} e^{-u^2} \frac{2udu}{a} \\ &= \frac{2e^{at}}{\sqrt{a\pi}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

bulunur. Tanım 2.1.10 daki hata fonksiyonu tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} E(t, \frac{1}{2}, a) &= \frac{e^{at}}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \\ \sqrt{t} E_{1,\frac{3}{2}}(at) &= \frac{e^{at}}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \\ E_{1,\frac{3}{2}}(at) &= \frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

(ii)

$$E_{1,\frac{1}{2}}(at) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at} e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}).$$

ispat (ii). Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımından

$$E_{1,\frac{1}{2}}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{1}{2})}$$

dir. Burada k ile $k + 1$ yer değiştirirse

$$\begin{aligned} E_{1,\frac{1}{2}}(at) &= \sum_{k=0-1}^{\infty} \frac{(at)^{k+1}}{\Gamma(k + 1 + \frac{1}{2})}, \\ &= (at) \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}, \\ &= (at) \left[\frac{(at)^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} + (at) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

burada $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} = atE_{1,\frac{3}{2}}(at)$ olduğu göz önüne alınır

$$E_{1,\frac{1}{2}}(at) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + atE_{1,\frac{3}{2}}(at)$$

(4.1.5) dikkate alınır

$$E_{1,\frac{1}{2}}(at) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at}e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$$

elde edilir.

(iii)

$$E_{1,\frac{5}{2}}(at) = \frac{1}{at} \left[\frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.1.8)$$

şeklindedir.

İspat (iii). Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımından

$$E_{1,\frac{5}{2}}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{5}{2})}$$

dir. Burada k ile $k - 1$ yer değiştirirse

$$\begin{aligned} E_{1,\frac{5}{2}}(at) &= \sum_{k=0+1}^{\infty} \frac{(at)^{k-1}}{\Gamma(k - 1 + \frac{5}{2})}, \\ &= (at)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}, \\ &= (at)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} - \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right] \end{aligned}$$

olur. Burada $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğu dikkate alınır

$$E_{1, \frac{5}{2}}(at) = (at)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right]$$

ve $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} = atE_{1, \frac{3}{2}}(at)$ olduğundan

$$E_{1, \frac{5}{2}}(at) = (at)^{-1} \left[E_{1, \frac{3}{2}}(at) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right]$$

dir. Son eşitlikte (4.1.5) eşitliğini kullanılarak

$$E_{1, \frac{5}{2}}(at) = \frac{1}{at} \left[\frac{e^{at}}{\sqrt{at}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right]$$

elde edilir.

(iv)

$$E_{1, -\frac{1}{2}}(at) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + (at) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at}e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \right] \quad (4.1.9)$$

şeklindedir.

ispat (iv). Mittag-Leffler fonsiyonunun tanımından

$$E_{1, -\frac{1}{2}}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k - \frac{1}{2})}$$

dir. Burada k yerine $k + 2$ alınır

$$\begin{aligned} E_{1, -\frac{1}{2}}(at) &= \sum_{k=0-2}^{\infty} \frac{(at)^{k+2}}{\Gamma(k - \frac{1}{2} + 2)} \\ &= (at)^2 \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \\ &= (at)^2 \left[\frac{(at)^{-2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + \frac{(at)^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \right] \end{aligned}$$

olur. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğu göz önüne alınır

$$E_{1, -\frac{1}{2}}(at) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{(at)}{\sqrt{\pi}} + (at)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}$$

olur.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} = atE_{1, \frac{3}{2}}(at) \text{ olduğundan}$$

$$E_{1, -\frac{1}{2}}(at) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{(at)}{\sqrt{\pi}} + (at)^2 E_{1, \frac{3}{2}}(at)$$

ve (4.1.5) den

$$E_{1,-\frac{1}{2}}(at) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + (at) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{at}e^{at} \operatorname{erf}(\sqrt{at}) \right]$$

elde edilir.

Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü formundaki eşiti aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 4.1.3. L bir Laplace dönüşümü olsun. Bu takdirde L^{-1} kesirli ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1} \left[\frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^\beta - a} \right] = t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta), \quad |s^\beta - a| < 1 \quad (4.1.10)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat Laplace dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$L \{ t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta) \} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta) dt$$

yazılır.

$$E_{\beta,\alpha}(at^\beta) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(at^\beta)^k}{\Gamma(k\beta + \alpha)} \text{ olduğundan}$$

$$L \{ t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta) \} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(at^\beta)^k}{\Gamma(k\beta + \alpha)} dt$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} L \{ t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta) \} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(k\beta + \alpha)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} t^{k\beta} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(k\beta + \alpha)} \int_0^\infty e^{-st} t^{k\beta + \alpha - 1} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(k\beta + \alpha)} L \{ t^{k\beta + \alpha - 1} \} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(k\beta + \alpha)} \frac{\Gamma(k\beta + \alpha)}{s^{k\beta + \alpha}} \\ &= \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{a}{s^\beta} \right)^k \end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{a}{s^\beta} \right)^k$ seri toplamından

$$\begin{aligned} L \{ t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta) \} &= \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{1 - \frac{a}{s^\beta}} \\ &= \frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^\beta - a} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^\beta - a} \right\} = t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta)$$

demektir. Eğer $\beta = 1$ ise

$$L^{-1} \left[\frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^\beta - a} \right] = t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(at^\beta) = E(t, \alpha - 1, a) \quad (4.1.11)$$

sonucu elde edilir. L^{-1} kesirli ters Laplace dönüşümü olmak üzere aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.1.4.

(i)

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha(s-a)^2} \right\} = tE(t, \alpha, a) - \alpha E(t, \alpha + 1, a) \quad (4.1.12)$$

şeklindedir.

İspat (i). (4.1.12) eşitliğinin sağ tarafının Laplace dönüşümü alınrsa

$$\begin{aligned} L \{tE(t, \alpha, a) - \alpha E(t, \alpha + 1, a)\} &= -\frac{d}{ds} L \{E(t, \alpha, a)\} - \alpha L \{E(t, \alpha + 1, a)\} \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{s^{-\alpha}}{s-a} \right] - \alpha \left[\frac{s^{-(\alpha+1)}}{s-a} \right] \\ &= -\left[\frac{-\alpha s^{-(\alpha+1)}(s-a) - s^{-\alpha}}{(s-a)^2} \right] - \alpha \frac{s^{-(\alpha+1)}}{s-a} \\ &= \frac{1}{s^\alpha(s-a)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte ters Laplace dönüşümü alınrsa

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha(s-a)^2} \right\} = tE(t, \alpha, a) - \alpha E(t, \alpha + 1, a)$$

bulunur.

(ii)

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha(s-a)^3} \right\} = \frac{1}{2} t^2 E(t, \alpha, a) - \alpha t E(t, \alpha + 1, a) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} E(t, \alpha + 2, a) \quad (4.1.13)$$

şeklindedir.

İspat (ii). (4.1.13) eşitliğinin sağ tarafının Laplace dönüşümünü alınrsa

$$L \left\{ \frac{1}{2} t^2 E(t, \alpha, a) - \alpha t E(t, \alpha + 1, a) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} E(t, \alpha + 2, a) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} L \{E(t, \alpha, a)\} + \alpha \frac{d}{ds} L \{E(t, \alpha + 1, a)\} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} L \{E(t, \alpha + 2, a)\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s^{-\alpha}}{s-a} \right) + \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{s^{-(\alpha+1)}}{s-a} \right) + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \left(\frac{s^{-(\alpha+2)}}{s-a} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{-\alpha s^{-(\alpha+1)}(s-a) - s^{-\alpha}}{(s-a)^2} \right) + \alpha \left(\frac{-(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}(s-a) - s^{-(\alpha+1)}}{(s-a)^2} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}}{2(s-a)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{-\alpha s^{-(\alpha+1)}}{(s-a)} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{s^{-\alpha}}{(s-a)^2} \right) + \left(\frac{-\alpha(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}}{(s-a)} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\alpha s^{-(\alpha+1)}}{(s-a)^2} \right) + \frac{\alpha(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}}{2(s-a)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}(s-a) - \alpha s^{-(\alpha+1)}}{(s-a)^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{-\alpha s^{-(\alpha+1)}(s-a)^2 - 2(s-a)s^{-\alpha}}{(s-a)^4} \right) + \left(\frac{-\alpha(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}}{(s-a)} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\alpha s^{-(\alpha+1)}}{(s-a)^2} \right) + \frac{\alpha(\alpha + 1)s^{-(\alpha+2)}}{2(s-a)} \\
&= \frac{1}{s^\alpha(s-a)^3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha(s-a)^3} \right\} = \frac{1}{2} t^2 E(t, \alpha, a) - \alpha t E(t, \alpha + 1, a) + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} E(t, \alpha + 2, a)$$

bulunur.

4.2. Kesirli Diferensiyel Denklemler için Laplace dönüşümü

$f(t)$ ve $g(t)$ fonsiyonları için $L \{f(t)\}$ ve $L \{g(t)\}$ mevcut olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
L \{f(t) + g(t)\} &= \int_0^t e^{-st} [f(t) + g(t)] dt \\
&= \int_0^t e^{-st} f(t) dt + \int_0^t e^{-st} g(t) dt \\
&= L \{f(t)\} + L \{g(t)\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
L\{cf(t)\} &= \int_0^t e^{-st} [cf(t)] dt \\
&= c \int_0^t e^{-st} f(t) dt \\
&= cL\{f(t)\}
\end{aligned}$$

olduğundan Laplace dönüşümü lineer bir operatördür [30].

Kesirli integralin Laplace dönüşümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$y(t)$ nin σ . mertebeden kesirli integrali

$$D^{-\sigma}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-z)^{\sigma-1} y(z) dz \quad (4.2.1)$$

şeklindedir. (4.2.1) de her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır

$$\begin{aligned}
L\{D^{-\sigma}y(t)\} &= L\left\{\frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-z)^{\sigma-1} y(z) dz\right\}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} L\{t^{\sigma-1}\} L\{y(t)\}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(\sigma)}{s^\sigma} Y(s), \\
&= s^{-\sigma} Y(s), \quad \sigma > 0
\end{aligned} \quad (4.2.2)$$

olur ki (4.2.2) deklemini kesirli integralin Laplace dönüşümüdür.[29]

$y(t) = t^\mu$ olarak alınır

$$\begin{aligned}
L\{D^{-\sigma}t^\mu\} &= L\left\{\frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-z)^{\sigma-1} t^\mu dz\right\}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} L\{t^{\sigma-1}\} L\{t^\mu\}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \frac{\Gamma(\sigma)}{s^\sigma} \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\sigma+\mu+1}}
\end{aligned}$$

olur [30].

$y(t) = e^{at}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
L\{D^{-\sigma}e^{at}\} &= L\left\{\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^t(t-z)^{\sigma-1}e^{az}dz\right\}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}L\{t^{\sigma-1}\}L\{e^{at}\}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\frac{\Gamma(\sigma)}{s^\sigma}\frac{1}{(s-a)}, \\
&= \frac{1}{s^\sigma(s-a)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Kesirli türevin Laplace dönüşümü aşağıdaki şekilde elde edilir. Tam sayılı mertebeden $y^{(n)}$ in Laplace dönüşümünün

$$\begin{aligned}
L\{y^{(n)}\} &= s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \\
&= s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}y^{(k)}(0)
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. $y(t)$ nin σ . mertebeden kesirli türevini

$$D^\sigma y(t) = D^n [D^{-u}y(t)] \tag{4.2.4}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Burada $n, \sigma > 0$ dan büyük en küçük tam sayı ve $u = n - \sigma$ dır. (4.2.4) denklemini

$$D^\sigma y(t) = D^n [D^{-(n-\sigma)}y(t)] \tag{4.2.5}$$

şeklinde yazabilir. Eğer $y(t)$ nin Laplace dönüşümünün olduğunu varsayarsak (4.2.3) eşitliği göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
L\{D^\sigma y(t)\} &= L\{D^n [D^{-(n-\sigma)}y(t)]\}, \\
&= s^n L\{D^{-(n-\sigma)}y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^k [D^{-(n-\sigma)}y(t)]_{t=0}, \\
&= s^n [s^{-(n-\sigma)}Y(s)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-(n-\sigma)}y(0), \\
&= s^\sigma Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-(n-\sigma)}y(0)
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Özel olarak

$n = 1$ için

$$L\{D^\sigma y(t)\} = s^\sigma Y(s) - D^{-(1-\sigma)}y(0), \quad 0 < \sigma \leq 1 \tag{4.2.7}$$

ve $n = 2$ için

$$L \{D^\sigma y(t)\} = s^\sigma Y(s) - sD^{-(2-\sigma)}y(0) - D^{-(1-\sigma)}y(0), \quad 1 < \sigma \leq 2 \quad (4.2.8)$$

şeklinde ifade edilir.

Kesirli lineer bir adi diferensiyel denklemin genel formu

$$[D^{\sigma n} + a_{n-1}D^{\sigma(n-1)} + \dots + a_1D^1 + a_0D^0]x(t) = h(t), \quad t \geq 0 \quad (4.2.9)$$

şeklinde dir. Burada $\sigma = \frac{1}{q}$ dur. $q = 1$ ise bu takdirde $\sigma = 1$ ve (4.2.9) denklemi n. mertebeden basit bir adi diferensiyel denklemdir. (4.2.9) denklemi sembolik olarak $f(D^\sigma)x(t) = h(t)$ şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$D^\sigma = [D^{\sigma n} + a_{n-1}D^{\sigma(n-1)} + \dots + a_1D^1 + a_0D^0]$$

ve $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ de t bağımsız değişkeninin fonksiyonlarıdır.

(4.2.9) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L \{ [D^{\sigma n} + a_{n-1}D^{\sigma(n-1)} + \dots + a_1D^1 + a_0D^0] x(t) \} = L \{ h(t) \}$$

$$L \{ D^{\sigma n} x(t) \} + a_{n-1} L \{ D^{\sigma(n-1)} x(t) \} + \dots + a_1 L \{ D^1 x(t) \} + a_0 L \{ D^0 x(t) \} = L \{ h(t) \}$$

$$\left[s^{n\sigma} X(s) - \sum_{k=1}^n c_k s^{nk} \right] + a_{n-1} \left[s^{n(\sigma-1)} X(s) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k s^{(n-1)k} \right] + \dots + a_0 X(s) = H(s)$$

$$[s^{n\sigma} + a_{n-1}s^{\sigma(n-1)} + \dots + a_1s^\sigma + a_0] X(s) = \Phi(s)$$

olur. Buradan

$$X(s) = \frac{\Phi(s)}{[s^{n\sigma} + a_{n-1}s^{\sigma(n-1)} + \dots + a_1s^\sigma + a_0]} \quad (4.2.10)$$

olur. (4.2.10) denklemini değişkenlerine ayırarak

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{r=1}^k \frac{\Phi_r(s)}{(\sqrt{s} - \beta_r)^{m_r}} \\ &= \sum_{r=1}^k \frac{\Phi_r(s)(\sqrt{s} + \beta_r)^{m_r}}{(s - \beta_r^2)^{m_r}} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Son ifade basit kesirlere ayrılır ve ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $x(t)$ çözümü elde edilir.

Aşağıdaki tabloda bazı kesirli Laplace dönüşümlerinin karşılıkları verilmiştir.

$Y(s)$	$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{(s-a)^\alpha}$	$\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}F_1(\alpha; \beta; at)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

Tablo 4.1

4.3. Laplace Dönüşüm Metodunun Uygulamaları

Uygulama 4.3.1.

$$D^{\frac{2}{3}}y(t) = ay(t), \quad (a = \text{sabit}) \quad (4.3.1)$$

kesirli diferansiyel denkleminin Laplace dönüşümü yardımıyla çözümünü bulalım.

Çözüm $0 < \sigma = \frac{2}{3} \leq 1$ olduğundan (4.2.7) deki

$$L\{D^\sigma y(t)\} = s^\sigma Y(s) - D^{-(1-\sigma)}y(0), \quad 0 < v \leq 1$$

denklemini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} L\{D^{\frac{2}{3}}y(t)\} &= L\{ay(t)\} \\ s^{\frac{2}{3}}Y(s) - D^{-(1-\frac{2}{3})}y(0) &= aY(s) \\ s^{\frac{2}{3}}Y(s) - D^{-\frac{1}{3}}y(0) &= aY(s) \end{aligned}$$

$D^{-\frac{1}{3}}y(0)$ sabiti $t = 0$ da $D^{-\frac{1}{3}}y(t)$ nin değeridir. Böyle bir sabitin olduğunu varsayalım ve $D^{-\frac{1}{3}}y(0) = c_1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} s^{\frac{2}{3}}Y(s) - c_1 &= aY(s) \\ s^{\frac{2}{3}}Y(s) - aY(s) &= c_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemden

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a} \quad (4.3.2)$$

olur. Son olarak Tablo 4.1 kullanılarak $Y(s)$ in ters Laplace dönüşümü alınır

$$\begin{aligned} L^{-1}\{Y(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} \\ y(t) &= c_1 t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}(at^{\frac{2}{3}}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $D^{-\frac{1}{3}}y(0)$ in değerinin c_1 olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} L\{D^{-\sigma}y(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} L\{t^{\sigma-1}\} L\{y(t)\} \\ &= s^{-\sigma} Y(s), \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} L\{D^{-\frac{1}{3}}y(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})} L\{t^{\frac{1}{3}-1}\} L\{y(t)\}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})} L\{t^{-\frac{2}{3}}\} L\{y(t)\}, \\ &= s^{-\frac{1}{3}} Y(s) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

elde edilir. (4.3.2) eşitliğini (4.3.3)' de yerine yazılarak ve bazı işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} D^{-\frac{1}{3}}y(t) &= L^{-1}\left\{\frac{c_1 s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} \\ &= c_1 E_{\frac{2}{3}, 1}(at^{\frac{2}{3}}) \end{aligned}$$

bulunur. $t = 0$ için

$$\begin{aligned} D^{-\frac{1}{3}}y(0) &= c_1 E_{\frac{2}{3}, 1}(0) \\ &= c_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Uygulama 4.3.2.

$$D^{\frac{4}{3}}y(t) = 0 \quad (4.3.4)$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm $1 < \sigma = \frac{4}{3} \leq 2$ olduğundan (4.2.8) denklemini kullanabiliriz. (4.3.4) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} L \left\{ D^{\frac{4}{3}} y(t) \right\} &= L \{0\}, \\ s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s D^{-(2-\frac{4}{3})} y(0) - D^{-(1-\frac{4}{3})} y(0) &= 0, \\ s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s D^{-\frac{2}{3}} y(0) - D^{\frac{1}{3}} y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

bulunur. Uygulama 4.3.1 dekine benzer olarak $D^{-\frac{2}{3}} y(0) = c_1$ ve $D^{\frac{1}{3}} y(0) = c_2$ olarak ele alınırsa (4.3.5) denklemi

$$s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s c_1 - c_2 = 0$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s c_1 + c_2}{s^{\frac{4}{3}}} \\ Y(s) &= \frac{s c_1}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

elde edilir. Tablo4.1 kullanılarak ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} L^{-1} \{Y(s)\} &= L^{-1} \left\{ \frac{s c_1}{s^{\frac{4}{3}}} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}} \right\}, \\ y(t) &= \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})} t^{-\frac{2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

bulunur.

Uygulama 4.3.3.

$$D^\sigma y(t) = a y(t), \quad y_0 = c, \quad 0 < \sigma \leq 1 \text{ ve } a = \text{sabit} \quad (4.3.6)$$

kesirli başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm (4.3.6) denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım ve (4.2.7) denklemini kullanalım. Buna göre

$$\begin{aligned} L \{D^\sigma y(t)\} &= a L \{y(t)\} \\ s^\sigma Y(s) - D^{-(1-\sigma)} y(0) &= a Y(s) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

burada $D^{-(1-\sigma)} y(0)$ sabitinin mevcut olduğunu ve c_1 e eşit olduğunu kabul edelim. O halde (4.3.7)

$$s^\sigma Y(s) - c_1 = a Y(s)$$

olur. Buradan $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^\sigma - a}$$

şeklinde bulunur. $Y(s)$ in ters Laplace dönüşümü alınır ve Tablo4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} L^{-1}\{Y(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^\sigma - a}\right\} \\ y(t) &= c_1 t^{\sigma-1} E_{\sigma,\sigma}(at^\sigma) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi c_1 değerini bulmak için başlangıç koşulunu kullanalım ve $y_0 = c$ olduğunu göz önüne alalım.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\sigma-1} E_{\sigma,\sigma}(at^\sigma) = 1$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 t^{\sigma-1} E_{\sigma,\sigma}(at^\sigma) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) &= c_1 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda y_0 başlangıç değerini c_1 olarak düşünebiliriz. Buda bize

$$y_0 = D^{-(1-\sigma)}y(0)$$

olduğunu verir.

Uygulama 4.3.4.

$$(D^1 - 3D^{\frac{1}{2}} + 2D^0)x(t) = 0 \quad (4.3.8)$$

homojen denklem sisteminin çözümünü bulalım.

Çözüm (4.3.8) denkleminin Laplace dönüşümünü alalım.

$$\begin{aligned} L\{D^1 x(t)\} - 3L\left\{D^{\frac{1}{2}} x(t)\right\} + 2L\{D^0 x(t)\} &= L\{0\} \\ sX(s) - x(0) - 3L\left\{D\left[D^{-\frac{1}{2}} x(t)\right]\right\} + 2X(s) &= 0 \end{aligned}$$

olur. (4.2.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) - 3\left[s^{\frac{1}{2}}X(s) - s^{1-1}D^{0-1+\frac{1}{2}}x(0)\right] + 2X(s) &= 0 \\ sX(s) - x(0) - 3s^{\frac{1}{2}}X(s) + 3D^{-\frac{1}{2}}x(0) + 2X(s) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $x(0) - 3D^{-\frac{1}{2}}x(0) = c$ olsun O halde

$$sX(s) - 3s^{\frac{1}{2}}X(s) + 2X(s) - c = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{c}{s - 3s^{\frac{1}{2}} + 2}, \\
&= \frac{c}{(s^{\frac{1}{2}} - 2)(s^{\frac{1}{2}} - 1)}, \\
&= c \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 2} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 1} \right), \\
&= c \left(\frac{s^{\frac{1}{2}} + 2}{s - 4} - \frac{s^{\frac{1}{2}} + 1}{s - 1} \right), \\
&= c \left(\frac{s^{\frac{1}{2}}}{s - 4} + \frac{2}{s - 4} - \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s - 1} - \frac{1}{s - 1} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

elde edilir. (4.3.9) da ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
L^{-1} \{X(s)\} &= L^{-1} \left\{ c \left(\frac{2}{s - 4} - \frac{1}{s - 1} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s - 4} - \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s - 1} \right) \right\} \\
x(t) &= c \left(2e^{4t} - e^t + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} E_{1, \frac{1}{2}}(4t) - \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} E_{1, \frac{1}{2}}(t) \right), \\
&= c \left[2e^{4t} - e^t + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \left(E_{1, \frac{1}{2}}(4t) - E_{1, \frac{1}{2}}(t) \right) \right], \\
&= c \left[2e^{4t} (1 + \operatorname{erf}(2\sqrt{t})) - e^t (1 + \operatorname{erf}(\sqrt{t})) \right], \\
&= c \left[2e^{4t} (\operatorname{erf} c(-2\sqrt{t})) - e^t (\operatorname{erf} c(-\sqrt{t})) \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Uygulama 4.3.5.

$$(D^1 - 2D^{\frac{1}{2}} + D^0)x(t) = e^t, \quad x(0) = 1$$

homojen olmayan kesirli başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
L \{D^1 x(t)\} - 2L \{D^{\frac{1}{2}} x(t)\} + L \{D^0 x(t)\} &= L \{e^t\} \\
sX(s) - x(0) - 2L \{D^{\frac{1}{2}} x(t)\} + X(s) &= \frac{1}{s - 1}
\end{aligned}$$

olur. $L \{D^{\frac{1}{2}} x(t)\}$ yi (4.2.7) denklemini kullanarak yazarsak

$$\begin{aligned}
sX(s) - x(0) - 2L \{D^{\frac{1}{2}} x(t)\} + X(s) &= \frac{1}{s - 1} \\
sX(s) - x(0) - 2s^{\frac{1}{2}} X(s) + 2D^{-\frac{1}{2}} x(0) + X(s) &= \frac{1}{s - 1}
\end{aligned}$$

bulunur. $x(0) = 1$ olduğunu göz önüne alalım ve $2D^{-\frac{1}{2}}x(0) = c = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} sX(s) - 1 - 2s^{\frac{1}{2}}X(s) - c + X(s) &= \frac{1}{s-1} \\ sX(s) - 2s^{\frac{1}{2}}X(s) + X(s) &= \frac{1}{s-1} + 1 + c \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^{\frac{1}{2}}-1)^2} + \frac{1+c}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2}, \\ &= \frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}+1)(s^{\frac{1}{2}}-1)^3} + \frac{1+c}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2}, \\ &= \frac{1+c}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2} + \frac{1}{8} \left\{ \frac{-1}{(s^{\frac{1}{2}}+1)} + \frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}-1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2} + \frac{4}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^3} \right\}, \\ &= (1+c) \left\{ \frac{-1}{s^{-1}(s-1)^2} + \frac{2}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} \right\}, \\ &\quad \frac{1}{8} \left\{ \frac{2}{(s-1)} - \frac{2}{s^{-1}(s-1)^2} - \frac{4}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{s^{-\frac{3}{2}}(s-1)^3} + \frac{12}{s^{-1}(s-1)^3} + \frac{12}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^3} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra ters Laplace dönüşümü kullanılarak ve (4.1.11), (4.1.12), (4.1.13) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}e^t + \left(c + \frac{3}{4}\right) L^{-1} \left\{ \frac{-1}{s^{-1}(s-1)^2} \right\} + \left(\frac{3}{2} + 2c\right) L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)^2} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} + c\right) te^t + \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-\frac{3}{2}}(s-1)^3} \right\} + \frac{3}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-1}(s-1)^3} \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)^3} \right\} + \frac{1}{2} t^2 e^t \\ &= \frac{1}{4}e^t + \left(c + \frac{3}{4}\right) (e^t + te^t) + \left(\frac{3}{2} + 2c\right) \sqrt{t} \left(E_{1,\frac{1}{2}}(t) + \frac{1}{2} E_{1,\frac{3}{2}}(t) \right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} + c\right) te^t + \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{t} \left(\frac{1}{2} E_{1,\frac{-1}{2}}(t) + \frac{3}{2} E_{1,\frac{1}{2}}(t) + \frac{3}{8} E_{1,\frac{3}{2}}(t) \right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{2}\right) \left(te^t + \frac{t^2}{2} e^t \right) + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{8} \right) t^{\frac{3}{2}} \left(4E_{1,\frac{1}{2}}(t) + 4E_{1,\frac{3}{2}}(t) - E_{1,\frac{5}{2}}(t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$x(0) = 1$ başlangıç şartı kullanılırsa $c = 0$ olur. Yukarıdaki çözümde c değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{e^t}{4} (3t^2 + 12t + 4) + \frac{\sqrt{t}}{4} (9 + 3t) E_{1, \frac{1}{2}}(t) + \frac{\sqrt{t}}{16} (15 + 12t) E_{1, \frac{3}{2}}(t) \\ & + \frac{\sqrt{t}}{4} E_{1, \frac{-1}{2}}(t) - \frac{3}{16} t^{\frac{3}{2}} E_{1, \frac{5}{2}}(t) \end{aligned}$$

olur. Sonuç (4.1) deki $E_{1, \frac{1}{2}}(t)$, $E_{1, \frac{3}{2}}(t)$, $E_{1, \frac{5}{2}}(t)$ ve $E_{1, \frac{-1}{2}}(t)$ değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{16} \left\{ 4 (3t^2 + 12t + 4) e^t + (15 + 48t + 16t^2 - 3t^3) e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \right. \\ & \left. + 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} (3t^{\frac{3}{2}} + 8t + 17) \right\} \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

Uygulama 4.3.6. Aşağıda verilen değişken katsayılı kesirli diferensiyel denklemin çözümünü bulalım.

$$tD^\sigma(t) + D^{\sigma-1}x(t) + tx(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.3.10)$$

Çözüm Kesirli Laplace dönüşümü uygulanarak

$$\begin{aligned} L\{tD^\sigma(t)\} + L\{D^{\sigma-1}x(t)\} + L\{tx(t)\} &= L\{0\} \\ -\frac{d}{ds} [s^\sigma X(s) - \sum_{k=0}^1 s^k D^{\sigma-k-1}x(0)] + [s^{\sigma-1}X(s) - \sum_{k=0}^0 s^k D^{\sigma-k-2}x(0)] - \frac{dX(s)}{ds} &= 0 \\ -\frac{d}{ds} [s^\sigma X(s) - D^{\sigma-1}x(0) - sD^{\sigma-2}x(0)] + [s^{\sigma-1}X(s) - D^{\sigma-2}x(0)] - \frac{dX(s)}{ds} &= 0 \\ -s^\sigma \frac{dX(s)}{ds} - \sigma s^{\sigma-1}X(s) + D^{\sigma-2}x(0) + s^{\sigma-1}X(s) - D^{\sigma-2}x(0) - \frac{dX(s)}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + s^\sigma) \frac{dX(s)}{ds} &= (1 - \sigma) s^{\sigma-1} X(s) \\ \frac{dX(s)}{X(s)} &= \frac{(1 - \sigma) s^{\sigma-1}}{(1 + s^\sigma)} ds \\ \ln X(s) &= \frac{(1 - \sigma)}{\sigma} \ln(1 + s^\sigma) + \ln c \\ X(s) &= c(1 + s^\sigma)^{\frac{(1-\sigma)}{\sigma}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} L^{-1}\{X(s)\} &= L^{-1}\left\{c(1 + s^\sigma)^{\frac{(1-\sigma)}{\sigma}}\right\} \\ x(t) &= L^{-1}\left\{c(1 + s^\sigma)^{\frac{(1-\sigma)}{\sigma}}\right\} \end{aligned}$$

bulunur.

SONUÇ: Bu tezde genel olarak kesirli hesaplamaların temel kavramları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Kesirli diferensiyel denklemler ve sınır değer problemleri için varlık teklik teoremleri araştırılmıştır. Ayrıca kesirli Laplace dönüşümleri ve diferensiyel denklemlere uygulamaları verilmiştir. Bu çalışmada konuyla ilgili genel olarak kapsamlı bir derleme yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. **Agnieszka, B. , Malinowska and .Delfim F.M Torres ,** 2010. The Generalized Natural Boundary Conditions for Fractional Variational Problems in terms of the Caputo Derivative., Computer Math.Apple.59, no.9,3110-3116.
2. **Anatoly, K., Harı, S., Juan, T.,** 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equation, Elsevier, Amsterdam.
3. **Aydın M., Kurtel B., Gündüz G., Oturanç G.,** 2011. Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları, E.Ü. Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları No:14, İzmir X. baskı.
4. **Babakhani, A., Daftardar-Gejji, V.,** 2002. On Calculus of Local Fractional Derivatives, J. Math. Anal. Appl., 270, 66-79.
5. **Balcı, L.,** 1998. Matematik Analiz, Cilt-2, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
6. **Bas E. ,** 2013. "Fundamental Spectral Theory of Fractional Singular Sturm-Liouville Operator" Journal of Func. Spaces and Appl. Article ID 915830, 7 pages.
7. **Baş E., Yılmaz R., Panakhov E. S.,** 2013. 'Fractional Solutions of Bessel Equation with N- Method' The Scientific World Journal-Mathematical Analysis, Vol. 2013, ID 685695, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/685695>, 1-8.
8. **Başkan, T.,** 2005. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
9. **Bayın, S., Wiley, J.,** 2006. Mathematical Methods in Science and Engineering, Sons Inc pub., Ankara.
10. **Bertram, R.,** 1975 Fractional Calculus and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
11. **Boumenir, A. and Tuan, V.K.,** 2010. An inverse problem for the heat equation, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.138, 3911-3921.

12. **Boumenir, A. and Tuan, V.K.**, 2010. Recovery of a heat equation by four measurements at one end, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **Vol.31**, No 2, 155-163.
13. **Butzer, P.L., Westphal, U.**, 2000 An Introduction to Fractional Calculus, in: R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey.
14. **Carl, F L. and Hartley, T T.**, 2000. Initialized Fractional Calculus. Nasa Center for Aerospace Information, Nnakmal Aeronautics and Space Admistration Glenn Research Centre.
15. **Cesur, Y.**, 2011. Diferensiyel Denklemler, Avcı Ofset, İstanbul.
16. **Çağhyan, M., Çelebi, O.**, 2010. Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dora, Bursa.
17. **Dalir M. and Bashour M.**, 2010. Applications of Fractional Calculus, Applied Mathematical Sciences, **Vol. 4**, no.21,1021-1032.
18. **Haubold, H.J. , Mathal, A.M. and Saxena R.K.**, 2009. Mittag-Leffler Functions and their Applications. Classical Analysis and ODEs.
19. **HE Ji-Huan**, 2011 A New Fractal Derivation, Thermal Science, Vol. 15, Suppl. 1, pp. S145-S147.
20. **E. Soczkiewicz**, 2002. Application of Fractional Calculus in the Theory of Viscoelasticity Molecular and Quantum Acoustics **Vol.23**,397-404.
21. **Eltayeb. A.M.Y. and Alawad F.A.**, 2011. Laplace Transform Method Solution of Fractional Ordinary Differential Equations, University of Africa Journal of Sciences (U.A.J.S., **Vol.2**, 139-160).
22. **K. Assaleh; W.M. Ahmad**, 2007. Modeling of speech signals using fractional calculus 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, ISSPA 2007. 12-15 Feb. 2007 Page(s):1 - 4.
23. **Kiryakova V.** 1994. Generalized Fractional Calculus and Applications. Longman, Ser Pitman Res Note in Math No 301. Harlow.

24. **Kreyszing, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, New York.
25. **Levitan, B.M., Sargsjan, I.S.**, 1970. Introduction to Spectral Theory, Self adjoint Ordinary Differential Operators, Moscow, Nauka.
26. **Machado J.T, Kiryakova V., Mainardi F.**, Recent History of Fractional Calculus, Commun nonlinear SCI Number Simulat xxx(2010)xxx-xxx.
27. **Margulies, Timothy** (2003). Wave propagation in viscoelastic horns using a fractional calculus rheology model Acoustical Society of America Journal, **Vol.** 114, Issue 4, pp. 2442-2442.
28. **Markushevich, A.I.**, 1977. Introduction to Analytic Functions Theory *I, II*, Moskow.
29. **Miller, K.S., Ross, B.**, 1974. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York.
30. **Murray R. Spiegel, Ph. D.**, 1965. Laplace Transforms Schaum's Outline Series, McG Raw-Hill.
31. **Musayev, B. , .Alp, M. ,** 2000. Fonksiyonel analiz.
32. **N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier,** (2006) Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, Signal Processing archive **Volume** 86 , Issue 10 2668 - 2677.
33. **Oldham, K.B., Spainer, J.**, 1974. The Fractional Calculus, Academic Press, New York and London.
34. **Özen, S, Öztürk İ.**, 2004. On Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo Fractional Derivatives, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20 (1-2), 66-76.
35. **Podlubny, I.**, 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, USA.

36. **R. L. Magin**, (2008) Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus *Journal of Vibration and Control*, **Vol.** 14, No. 9-10, 1431-1442.
37. **Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I.**, 1993. *Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications*, Gordon and Breach, Longhorne, PA.
38. **Shugin Z.**, 2006. Existence Of Solution For a Boundary Value Problem Of Fractiona Order, *Acta Mathematica Scientia*, 26B(2): 22&228.
39. **V. V. Kulish and Jos´e L.** -September 2002- LageApplication of Fractional Calculus to Fluid Mechanics *J. Fluids Eng.* **Volume** 124, Issue 3, 803
40. **Vinagre B.M., Su´arez J.I., Calder´on A.J. , Monje C.A. and Chen Y.Q.**, 2004. Using Fractional Calculus for Lateral and Longitudinal Control of Autonomous Vehicles *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin / Heidelberg, **Volume** 2809/.

ÖZGEÇMİŞ

1990 Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise eğitimimi Elazığ'da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü'ne girdim. Dört yıllık eğitimimin ardından Fırat Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesinde yüksek lisans öğrencisiyim.