

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FUZZY DÜZLEM GEOMETRİDE BAZI ANALİTİK KAVRAMLAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
GüldeŒ ÇINAR
08121108**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
GüldeŒ ÇINAR**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat ASİL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

HAZİRAN-2010

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FUZZY DÜZLEM GEOMETRİDE BAZI ANALİTİK KAVRAMLAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Gül den ÇİNAR
08121108**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:08.06.2010
Tezin Savunulduğu Tarih :01.07.2010**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat ASİL
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr.Mehmet BEKTAŞ
: Doç.Dr.Erol KILIÇ**

HAZİRAN-2010

ÖNSÖZ

Bu tez konusu ile geometri dalında daha önce çalışılan alanlardan farklı olarak fuzzy düzlem geometri üzerinde bazı temel kavram çalışmaları yapılmıştır.

Tez çalışmalarımın bütün aşamalarında, her türlü olanağı ve desteği sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Vedat ASİL 'e ve bu tez hazırlanırken yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN ve Yrd. Doç. Dr. Hıfzı ALTINOK 'a teşekkürlerimi sunarım.

Güliden ÇINAR

ELAZIĞ- 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	IX

1. DÜZLEMDE DİK VE EĞİK KOORDİNAT SİSTEMİ.....	1
1.1. Afin Aksiyomlar	1
1.2. Düzlemde Eğik Koordinat Sistemi.....	1
1.3. Düzlemde Bir Noktanın Yer Vektörü	2
1.4. Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık	3
1.5. Doğru Denklemleri.....	3
1.5.1. Verilen Bir Noktadan Geçen Ve Verilen Bir Vektöre Paralel olan Doğru Denklemini	4
1.5.2. İki Noktası Verilen Doğru Denklemini	6
1.5.3. Bir Noktası Ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemini	7
1.6. Paralel Ve Dik Doğrular	10
1.6.1. Paralel Doğrular	10
1.6.2. Dik Doğrular	11
2. FUZZY İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR	13
2.1. Bulanık Küme Kavramı	13
2.2. Sonlu Ve Sonsuz Bulanık Kümeler.....	14
2.2.1. Fuzzy Kümelerin Eşitliği.....	15
2.2.2. Fuzzy Kümelerin Tümlenyeni	15
2.2.3. Kapsama	15
2.2.4. Birleşim	16
2.2.5. Kesişim.....	17
2.2.6. Fuzzy Kümelerde De Morgan Kuralları.....	17

2.2.7.	X Klasik Küme Üzerinde Tanımlı Bulanık A Kümesinin α -Kesimi ve Kuvvetli α -Kesimi	20
2.3.	Konvekslik.....	21
2.4.	Aralıklar Ve Fuzzy Sayılar	23
2.4.1.	Aralıklar.....	23
2.4.2.	Fuzzy Sayılar	25
2.5.	Fuzzy Sayılarda Dört İşlem	29
2.5.1.	Toplama.....	29
2.5.2.	Çıkarma	30
2.5.3.	Çarpma	31
2.5.4.	Bölme	32
2.5.5.	Bir Fuzzy Sayının Sabit Bir Sayı İle Çarpımı	32
3.	FUZZY DÜZLEM GEOMETRİ	33
3.1.	Fuzzy Noktalar.....	33
3.2.	Fuzzy Doğrular	38
3.2.1.	Fuzzy Doğruların Çeşitleri	38
3.3.	Örnekler.....	40
3.4.	Fuzzy Doğruların α -Kesimleri.....	42
3.5.	Bazı Temel Özellikler	42
3.5.1.	$\bar{L}_2$	42
3.5.2.	$\bar{L}_3$	42
3.6.	İlişkiler.....	43
3.6.1.	$\bar{L}_{11}$ Bir $\bar{L}_{12}$ dir.....	43
3.6.2.	$\bar{L}_3$ Bir $\bar{L}_2$ dir.....	43
3.6.3.	$\bar{L}_{12}$ $\bar{L}_2$ ye Karşılık Gelir.....	44
3.7.	Genel Özellikler	45
3.8.	Paralel Ve Kesişen Fuzzy Doğrular	45
	KAYNAKLAR	46
	ÖZGEÇMİŞ	47

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, reel düzlemde nokta ve doğru tanımları verilerek, doğru denklemleri incelenmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın temel konusu olan fuzzy ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise fuzzy'nin düzlem geometriye uygulanması ile fuzzy nokta ve fuzzy doğru tanımları verilip, fuzzy doğru denklemleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu denklemlere örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üyelik Fonksiyonu, Fuzzy Nokta, Fuzzy Doğru, Crisp Nokta, Crisp Doğru

ABSTRACT

Some Analytic Concepts On Fuzzy Plane Geometry

This study is composed of three chapters. In chapter 1, line equations have been investigated by giving the definitions of point and line in real plane. In chapter 2, the basic concepts related to the fuzzy which is the main subject of this study have been given. In chapter 3, fuzzy line equations were defined by applying the fuzzy plane geometry and giving the fuzzy point and fuzzy line definitions. Additionally, some examples of these equations have also been given.

Key Words : Membership Functions, Fuzzy Point, Fuzzy Line, Crisp Point, Crisp Line.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1	1
Şekil 1.2	3
Şekil 1.3	4
Şekil 1.4	5
Şekil 1.5	6
Şekil 1.6	7
Şekil 1.7	8
Şekil 1.8	9
Şekil 1.9	10
Şekil 2.1	14
Şekil 2.2	14
Şekil 2.3	16
Şekil 2.4	20
Şekil 2.5	Konveks fuzzy küme22
Şekil 2.6	Normal26
Şekil 2.7	Normal26
Şekil 2.8	Normal değil26
Şekil 2.9	26
Şekil 2.10	26
Şekil 2.11	Üst yarı sürekli27
Şekil 2.12	Üst yarı sürekli27
Şekil 2.13	Üst yarı sürekli değil27
Şekil 2.14	X^0 kompakt27
Şekil 2.15	X^0 kompakt değil çünkü X^0 ın sağ ucu sınırsız27
Şekil 2.16	X yaklaşık olarak a ya eşit28
Şekil 2.17	X yaklaşık olarak [a,b] aralığındadır.....28
Şekil 3.1	37
Şekil 3.2	38

Şekil 3.3		40
Şekil 3.4		40
Şekil 3.5		40
Şekil 3.6		42
Şekil 3.7		44

SEMBOLLER LİSTESİ

$A, B, Q, \dots$	:	Reel düzlemde nokta
$AP, AQ, QP, \dots$	:	Reel düzlemde vektör
$d(P, Q)$	:	İki nokta arasındaki uzaklık
$d, x, y, \dots$	:	Reel düzlemde doğru
$\mu_A(x)$	:	Üyelik fonksiyonu
$\text{Supp}(F)$	:	Bulanık kümenin desteği
A^α	:	Bulanık A kümesinin α -kesimi
$A^{+\alpha}$	:	Bulanık A kümesinin kuvvetli α -kesimi
A	:	Bulanık A kümesinin seviyesi
A'	:	Bulanık A kümesinin özü
$h(A)$	:	Bulanık A kümesinin yüksekliği
$\text{Norm}(A)$	:	Normalleştirilmiş bulanık A kümesi
$\bar{N}, \bar{X}, \bar{Y}$	:	Fuzzy sayılar
$(\bar{X}, \bar{Y}) \dots$	:	Fuzzy nokta
$\bar{N} = (a, b, c)$	:	Üçgen fuzzy sayısı
$\bar{M}, \bar{D}$	:	Fuzzy metrik
$\bar{L}_{11}, \bar{L}_{12} \dots$	:	Fuzzy doğru

1.DÜZLEMDE EĞİK VE DİK KOORDİNAT SİSTEMİ

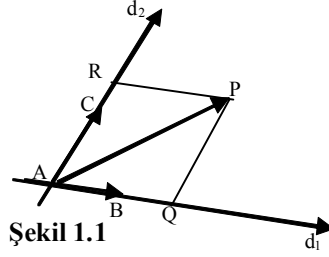
Bu bölüme Analitik geometrinin kuruluşuna temel teşkil eden ve adına Nokta-Vektör eşlemesi diyeceğimiz,düzlemin afin aksiyomlarını vererek başlamak uygun olacaktır.

1.1.Afin Aksiyomlar:

1) Düzlemin herhangi A, B gibi iki noktası verildiğinde; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek $\vec{u}$ vektörü vardır.

2) Düzlemde bir A noktası ve R^2 vektör uzayının bir $\vec{u}$ vektörü verildiğinde; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek B noktası vardır.

1.2.Düzlemde Eğik Koordinat Sistemi:



Düzlemde bir A noktası ve lineer bağımsız $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ vektör cümlesi verildiğinde Nokta-Vektör eşlemesinden; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ olacak şekilde B, C noktalarının varlığını biliyoruz. A noktasından geçen ve $\vec{u}$ vektörüne paralel olan doğruyu $d_1, \vec{v}$ vektörüne paralel olan doğruyu da d_2 ile gösterelim. Düzlemin keyfi bir noktası P olsun. P noktasından d_2 doğrusuna paralel çizip d_1 doğrusunu kestiği noktaya Q ve d_1 doğrusuna paralel çizip d_2 doğrusunu kestiği noktaya da R diyelim.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AR}$$

olduğundan ve

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{AQ} = x(P) \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AR} = y(P) \vec{v}$$

olarak yazılabileceğinden

$$\overrightarrow{AP} = x(P) \vec{u} + y(P) \vec{v}$$

bulunur. Böylece düzlemin her bir P noktasına $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesini sabit tutarak, $(x(P), y(P))$ reel sayı ikilisini karşılık tutarız.

Tersine $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesi sabit kalmak üzere; bir (a, b) reel sayı ikilisi verildiğinde

$$\overrightarrow{AP} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

olacak şekilde bir tek P noktasının bulunacağı, Nokta-Vektör eşlemesinden açıktır. O halde düzlemin noktaları ile reel sayı ikililerinin cümlesi olan R^2 arasında $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesini sabit tutularak birebir eşleme kurmuş oluruz.

Buradaki $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ üçlüsüne düzlemin bir eğik (afin, paralel) koordinat sistemi, A noktasına bu koordinat sisteminin orijini, $(x(P), y(P))$ ikilisine de bu koordinat sistemine göre P noktasının eğik (afin, paralel) koordinatları denir. Biz bu eşleme nedeniyle düzlemin her bir P noktası için $P = (x(P), y(P))$ gösterimini kullanacağız. Ayrıca d_1, d_2 doğrularına bu koordinat sisteminin koordinat eksenleri,

$$\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$$

olduğundan da $B = (1, 0), C = (0, 1)$ noktalarına koordinat sisteminin birim noktaları denir.

Yukarıdaki tanımlardan; P noktasından her bir eksen üzerine, diğer eksen doğrultusunda, paralel izdüşümler alınarak oluşturulan reel sayı ikilisi ile, eğik koordinat sisteminde bir P noktasının koordinatlarının gösterildiği görülür. İlk eksen (X -ekseni) genellikle yatay olarak çizilir.

$\{u, v\}$ vektör cümlesinin ortonormal olması halinde; $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ cümlesine düzlemin kartezyen (dik dörtgensel, dik, öklidyen) koordinat sistemi karşılık gelir.

1.3. Düzlemde Bir Noktanın Yer Vektörü

Düzlemde $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemi seçelim. Q noktasının bu koordinat sistemine göre koordinatları (b_1, b_2) olsun. Afin koordinat sisteminin yukarıdaki tanımından;

$$\overrightarrow{AQ} = b_1\vec{u} + b_2\vec{v}$$

veya

$$\overrightarrow{AQ} = (b_1, b_2)$$

vektörüne Q noktasının yer vektörü denir.

1.4.Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık:

Düzlemin koordinat eksenleri arasındaki pozitif yönlü açısı α olan, $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ afin koordinat sistemini seçelim. Bu koordinat sisteminde koordinatları $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ olan noktalar da sırasıyla P, Q olsun.

Afin koordinat sisteminin yukarıdaki tanımdan;

$$\overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1) \vec{u} + (b_2 - a_2) \vec{v}$$

veya

$$\overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

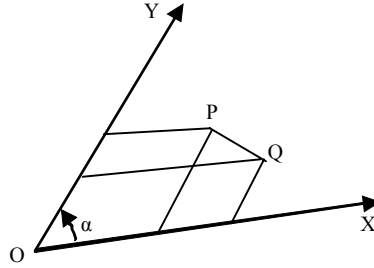
bulunur.

$$\begin{aligned} d & : R^2 \times R^2 \rightarrow R \\ d(P, Q) & = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle} \end{aligned}$$

değerine veya

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + 2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cos \alpha}$$

değerine P, Q noktaları arasındaki uzaklık denir.

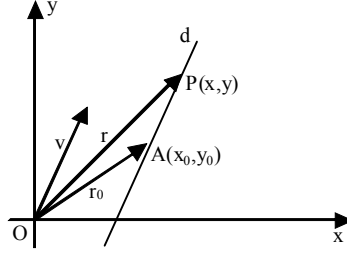


Şekil 1.2

1.5.DOĞRU DENKLEMLERİ

Bu kesimde bir noktası ile doğrultmanı, iki noktası ve bir noktasıyla eğimi verilen doğruların denklemleri verilecektir.

1.5.1. Verilen Bir Noktadan Geçen Ve Verilen Bir Vektöre Paralel Olan Doğrunun Denklemi:



Şekil 1.3

Verilen bir $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve $v = (a, b)$ vektörüne paralel olan d doğrusunun denklemini bulalım. Doğru üzerinde keyfi bir $P(x, y)$ noktası alalım. d doğrusunun denklemini bulmak demek x ile y arasında bir bağıntı bulmak demektir.

AP vektörü v vektörüne paralel olduğundan

$$AP = tv$$

olacak biçimde bir t reel sayısı vardır.

$$r = r_0 + AP$$

eşitliğinde AP yerine tv yazılırsa d doğrusunun

$$r = r_0 + tv \quad (1.1)$$

vektörel denklemi elde edilir. Burada $r_0 = OA$ bir sabit vektördür. v ise doğrunun paralel olduğu vektördür. Bu v vektörüne doğrultman vektörü adı verilir.

v, r_0 ve r vektörleri bileşenleri cinsinden yazılırsa (1.1) eşitliği

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

biçimini alır. Buradan

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (1.2)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik sistemine d doğrusunun parametrik denklemi adı verilir. Bu sistemde t çekilirse

$$\frac{x - x_0}{a} = t, \frac{y - y_0}{b} = t$$

bulunur. Buradan, doğrunun kartezyen denklemi denilen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (1.3)$$

bağıntısı elde edilir. (1.3) eşitliğinden

$$b(x - x_0) = a(y - y_0) \implies bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

bulunur. $b = A, -a = B, -bx_0 + ay_0 = C$ alınırsa

$$Ax + By + C = 0 \quad (1.4)$$

denklemi elde edilir. Şu halde A ve B 'den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere, (1.4) biçimindeki denklemler düzlemde bir doğrunun denklemidir.

Örnek1.5.1:

$A(1, 3)$ noktasından geçen ve $v = (2, -2)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini yazınız.

Çözüm:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \implies r = r_0 + tv$$

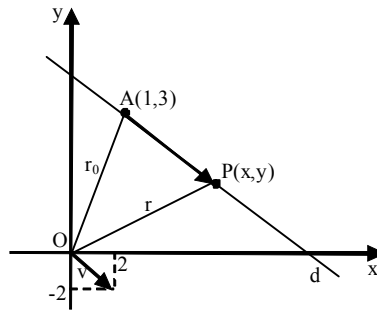
vektörel denklem olur. Vektörler bileşenleri cinsinden ifade edilirse

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 3) + t(2, -2) = (1 + 2t, 3 - 2t) \\ \implies &\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \end{cases} \end{aligned}$$

parametrik denklem bulunur. t çekilir ve değerler eşitlenirse doğrunun

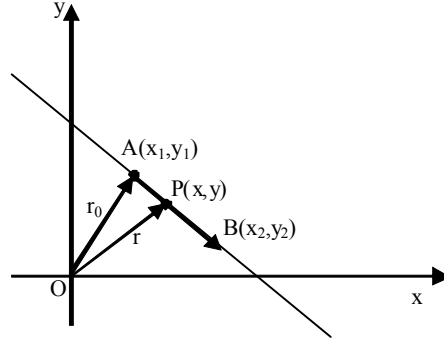
$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{-2} \implies x - 1 = -y + 3 \implies x + y = 4$$

kartezyen denklemi elde edilir.



Şekil 1.4

1.5.2.İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi:



Şekil 1.5

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım. AB vektörü d doğrusunun bir doğrultmanı olacağından, v vektörü yerine AB vektörü alınabilir.

$$r = r_0 + tAB \quad (1.5)$$

olur. $r_0 = OA = (x_1, y_1)$ alınırsa ($r_0 = OB$ alınabilir.)

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (1.6)$$

parametrik denklemi elde edilir.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (1.7)$$

kartezyen denklemi elde edilir.

Örnek 1.5.2:

$A(1, 2)$ ve $B(3, 4)$ noktalarından geçen doğrunun kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2} \Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x + y + 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

Bir C noktası verildiğinde bunun A ve B noktalarından geçen doğru üzerinde olması için gerek ve yeter şartın

$$AB // AC$$

olacağı açıktır. (Burada AC yerine BC alınabilir.)

C noktası AB doğrusu üzerinde bulunduğundan A, B ve C noktalarının her üçü de aynı doğru üzerinde bulunurlar. Buradan şu sonucu verebiliriz:

SONUÇ 1.5.1:

A, B ve C noktaları doğrusaldır $\Leftrightarrow AB//AC$ dir.

Örnek 1.5.3:

$A(2, 5), B(-3, 4)$ noktaları veriliyor. x in hangi değeri için $C(x, 3)$ noktası A ve B den geçen doğru üzerindedir?

Çözüm:

$$AB = (-3 - 2, 4 - 5) = (-5, -1)$$

$$AC = (x - 2, 3 - 5) = (x - 2, -2)$$

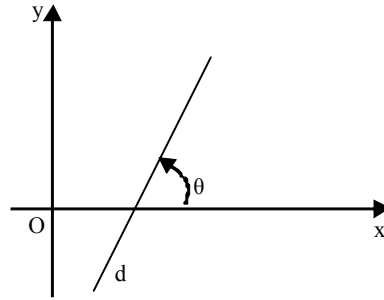
olur.

$$\begin{aligned} AB//AC &\Rightarrow \frac{-5}{x-2} = \frac{-1}{-2} \\ &\Rightarrow x-2 = -10 \Rightarrow x = -8 \end{aligned}$$

bulunur.

1.5.3. Bir Noktası Ve Eğimi Bilinen Doğrunun**Denklemini**

Bir doğrunun x -ekseniyle pozitif yönde yapmış olduğu açıya doğrunun eğim açısı denir. Eğim açısının yönü θ olsun. $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $m = \tan \theta$ sayısına d doğrusunun eğimi denir.



Şekil 1.6

Şimdi eğimi ve bir noktası verilen doğrunun denklemini bulalım.

$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemini bulalım. Apsisi $x_0 + 1$ olan B noktasının ordinatı $y_0 + m$ olur.

$$AB = (x_0 + 1 - x_0, y_0 + m - y_0) = (1, m)$$

olacağından iki noktası bilinen doğrunun denkleminde, d doğrusunun denklemi

$$r = r_0 + t(1, m)$$

olur. Bu vektörel denklem bileşenleri cinsinden yazılırsa,

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(1, m)$$

bulunur. Buradan,

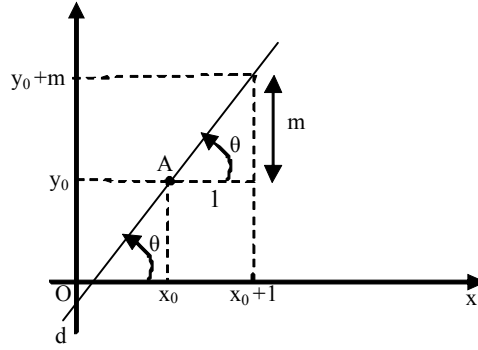
$$x = x_0 + t$$

$$y = y_0 + mt$$

parametrik denklemi elde edilir. Birinci denklemden t çekilir, ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

kartezyen denklemi elde edilir.



Şekil 1.7

Örnek1.5.4:

$A(2, 3)$ noktasından geçen ve x -ekseniyle 45° derecelik açı yapan doğrunun vektörel ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm:

$m = \tan 45^\circ = 1$ olduğundan vektörel denklem

$$(x, y) = (2, 3) + t(1, 1) = (2 + t, 3 + t)$$

kartezyen denklem

$$y - 3 = 1(x - 2) \implies y = x + 1$$

olur.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y = mx + \underbrace{(y_0 - mx_0)}_n \implies y = mx + n \text{ olur. Buna göre bir}$$

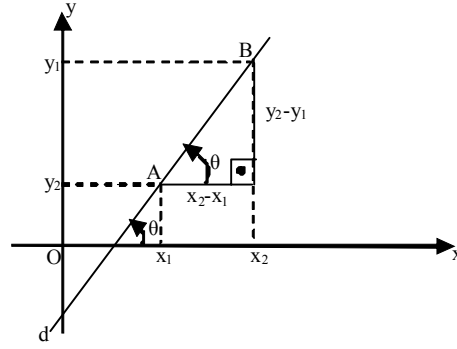
lineer denklemde y çekildiğinde x in katsayısı doğrunun eğimidir. Örneğin $3x + 4y + 7 = 0$ denklemi için $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ olacağından verilen doğrunun eğimi $m = -\frac{3}{4}$ tür.

Genel olarak, $B \neq 0$ olmak üzere, $Ax + By + C = 0$ denklemi için $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ olacağından eğim

$$m = -\frac{A}{B}$$

olacaktır.

İki noktası verilen bir doğrunun eğimini bulalım.



Şekil 1.8

Şekil 1.8 den

$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olduğu açıktır. Eğim tanımından

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bulunur. Eğer $x_2 = x_1$ ise m tanımsız olur. Bu da doğrunun x eksenine dik olduğunu gösterir. Bu durumda doğru denklemi $x = c$ biçimindedir.

Yukarıdaki eşitlik ve bir noktası ile eğimi verilen doğru denkleminde, iki noktası verilen doğru denklemi

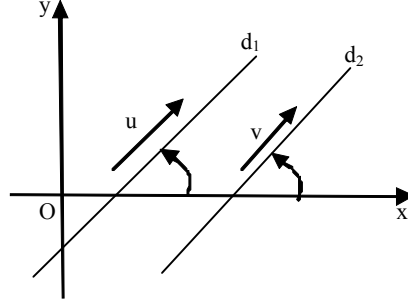
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

biçiminde de verilebilir.

1.6. PARALEL VE DİK DOĞRULAR

1.6.1. Paralel Doğrular

İki doğrunun paralellliği, onların doğrultman vektörleri ve eğimleri cinsinden ifade edilebilir.



Şekil 1.9

d_1 ve d_2 doğrularının doğrultman vektörleri sırasıyla, u ve v olsun.

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow u // v$$

d_1 ve d_2 doğruları paralel olduğundan bunların x -ekseniyle yaptığı açılar eşit ölçütlü olacaktır. Bundan dolayı m_1 ve m_2 eğimleri eşittir. Bunun karşısı da doğrudur. Şu halde

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Örnek 1.6.1:

$$d_1 \dots r = (1, 3) + t(k, -4)$$

$$d_2 \dots r = (5, 2) + t(3, 2)$$

doğrularının paralel olması için k ne olmalıdır?

Çözüm:

$u = (k, -4)$, $v = (3, 2)$ dir.

$$\begin{aligned} d_1 // d_2 &\implies u // v \\ &\implies \frac{k}{3} = \frac{-4}{2} \implies k = -6 \end{aligned}$$

olur.

Denklemleri $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ve $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ olan d_1 ve d_2 doğruları paralel olduğunda $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ ve $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ eğimleri eşit olur. Dolayısıyla,

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

olur, zira

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \implies \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

dir.

1.6.2.Dik Doğrular:

İki doğrunun birbirine dik olması onların doğrultman vektörlerinin birbirine dik olmasıdır. Bu nedenle d_1 ve d_2 doğrularının doğrultman vektörleri u ve v ise aşağıdaki önermenin doğruluğu açıktır.

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow u \perp v.$$

u ve v vektörleri dik olduğunda $u \cdot v = 0$ olacağından

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow u \cdot v = 0.$$

Örnek 1.6.2:

p nin hangi değeri için

$$d_1 \dots r = (2, 3) + t(2, 1)$$

ve

$$d_2 \dots r = (-1, 5) + t(p, 4)$$

doğruları dik olur?

Çözüm:

$u = (2, 1)$ ve $v = (p, 4)$ olduğundan

$$\begin{aligned} d_1 \perp d_2 &\Leftrightarrow u \cdot v = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot p + 1 \cdot 4 = 0 \implies p = -2 \end{aligned}$$

olmalıdır.

Bir (x_0, y_0) noktasından geçen $u = (a, b)$ vektörüne paralel olan doğrunun Kartezyen denkleminin

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \implies bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

olduğunu görmüştük. Bu denklem $Ax + By + C = 0$ biçiminde yazıldığında $A = b$ ve $B = -a$ olur.

$$(A, B) = (b, -a) = -(-b, a) = -u_p$$

olacağından (A, B) vektörü u vektörüne, dolayısıyla d doğrusuna dik bir vektördür. Bu nedenle,

$$d_1 \dots A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

ve

$$d_2...A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

doğrularının dik olması için gerek ve yeter şart $(A_1, B_1) \perp (A_2, B_2)$ olmasıdır. O halde,

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

önermesi doğrudur.

2.FUZZY İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Bulanık Küme Kavramı:

Elemanları x olan X evrensel kümesini düşünelim. Bu elemanların $A \subset X$ kümesine aitliği, yani bu alt kümelerin elemanları olup olmadığı X in $\{0,1\}$ aralığında olan karakteristik fonksiyonu olarak belirlenir.Yani

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ eğer } x \in A \\ 0, \text{ eğer } x \notin A \end{cases}$$

Bu teoride nesnelerin bir kümeye ne kadar ait olduğu gösterilir.Aitlik derecelendirilmiştir.

Örnek 2.1.1:

Meyveler kümesini ele alalım. Elma bu kümeye ait olduğu için $\mu_{meyve}(elma) = 1$ ve domates bir sebze olduğundan dolayı bu kümeye ait değildir. ($\mu_{meyve}(domates) = 0$)

İki değerle değerlendirilen bu kümeler kesin(crips) kümeler olarak adlandırılır. Fakat gerçek hayatta bir nesnenin bu veya diğer kümeye aitliği tam kesinlik göstermeyebilir.Örneğin, masanın üzerinde bir tabak elma olduğunu düşünelim.Bu durumda tabaktakiler elmalar mı? sorusuna evet ,armutlar mı? sorusuna hayır cevabı verilecektir. Yine tabaktaki elmaların arasında bir tane armut olduğunu varsayalım. O zaman aynı sorulara kesin küme teorisi açısından nasıl cevap verileceği açık değildir. Tabaktakiler elmalar mı? sorusuna "belki tam değil","çoğunluğu elmadır"," bir tanesi armut,diğerleri elmadır "gibi cevaplar alınabilir. Yine tabakta bulunan meyvelerin yarısının elma yarısının armut olduğunu varsayalım.Bu durumda aynı sorulara "bir kısmı","yarısı" gibi cevaplar verilebilir.Kesin küme teorisi açısından bu cevaplar mümkün değildir. Çünkü bu teoride ya "evet"(hepsi elma) ya da "hayır"(hiçbirisi elma değil) cevapları mümkündür.

İşte bulanık küme bu noktada işe yarıyor. Bu teoride nesneler bir kümeye kısmen ait olabilirler. Bu aitlik üyelik derecesi ile belirlenir. Bulanık kümelerde üyelik derecesi karakteristik fonksiyonun genelleştirilmesi ile ölçülür ve üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada $\{0,1\}$ kümesi yerine $[0,1]$ arası kullanılır ve bu durumda üyelik fonksiyonu böyle belirlenir.

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1], \text{ yani } 0 \leq \mu_A(x) \leq 1$$

Burada $\mu_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olmadığını(A nın elemanı olmadığını), $\mu_A(x) = 1$ olduğunda ise x in A nın tam üyesi olduğunu göstermektedir. $\mu_A(x) = 0.5$ değeri bulanık A kümesinin geçiş noktası olarak adlandırılır.

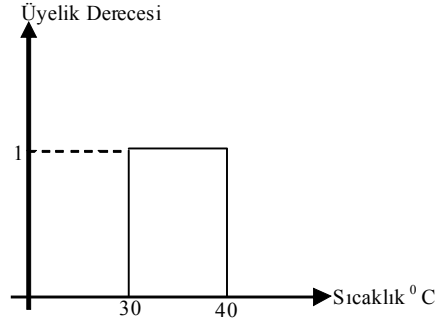
Böylece,klasik küme teorisinde herhangi bir nesne bir kümeye ya aittir ya da değildir.

Bu

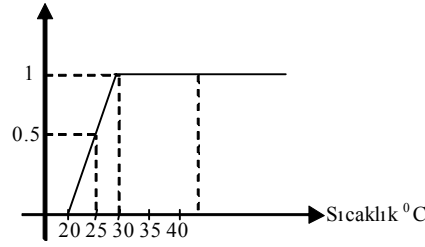
lanık kümelerde ise elemanlar bu kümelere kısmen ait olabilmektedir.

Örneğin,kesin küme teorisine göre 32^0C de hava sıcak, $31,5^0C$ de sıcak sayılmamaktadır. (Şekil 2.1) Bulanık küme teorisinde ise 32^0C sıcaklık ,sıcaklık kümesinde maksimum üyelik derecesine sahiptir.

(Şekil 2.2) 25^0C klasik küme kavramına göre sıcak sayılmıyor.



Şekil 2.1



Şekil 2.2

Fakat bulanık küme kavramına göre bu değerin sıcaklık kümesine üyeliği 0.5 dir. (Şekil 2.2) Yani 25^0C tam sıcak değil ama soğukta değil.

Görüldüğü gibi bulanık kümelerde kümenin bir elemanı bu kümeye kısmen ait olabilmektedir. Bu durum dünyayı daha gerçekçi olarak ifade etmektedir. Çünkü gerçek dünya yalnızca evet veya hayır,beyaz veya siyah,doğru veya yanlış gibi kavramlardan oluşmamakta dolayısıyla kavramların daha çok çeşit derecelerini içermektedir.

2.2.Sonlu Ve Sonsuz Bulanık Kümeler:

Bulanık kümeler sonlu ve sonsuz olabilirler. Sonlu bir $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi için F sonlu bulanık kümesi

$$\begin{aligned} F &= \mu_F(x_1)/x_1 + \mu_F(x_2)/x_2 + ... + \mu_F(x_n)/x_n \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_F(x_i)/x_i \end{aligned}$$

ifadesiyle belirlenmektedir. X sonsuz olduğunda ise

$$F = \int_x (\mu_F(x) / x) dx$$

şeklinde belirlenir.

Örnek 2.2.1:

Boy uzunluğu için boy evrensel kümesinin $\{1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0\}$ olarak ele alalım, yani boy uzunlukları 1.5m den 2.0m ye kadar 0.1m aralıkla verilmektedir. Bu durumda uzun boy bulanık kavramı için bulanık alt küme böyle olacaktır.

$$\text{Uzun boy} = \{0/1.5 + 0.125/1.6 + 0.5/1.7 + 0.875/1.8 + 1/1.9 + 1/2.0\}$$

X evrensel alt kümesi olan bir bulanık F kümesinin taşıyıcı veya destekleyicisi(support) böyle belirlenir.

$$\text{Support}(F) = \{x \mid x \in X \text{ ve } \mu_F(x) > 0\}$$

Buna kısaca bulanık kümenin desteği diyelim ve $\text{supp}(F)$ ile gösterelim. Daha önce baktığımız uzun boy bulanık kümesi için $0/1.5$ elemanından başka kalan elemanlar bu kümenin desteğiydi.

2.2.1.Fuzzy Kümelerin Eşitliği:

İki A ve B fuzzy kümelerinin eşit olması yani $A = B$ yazılması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ olmasıdır.

2.2.2.Fuzzy Kümelerin Tümleyeni:

Bir A kümesinin tümleyeni A' ile gösterilir ve

$$\mu_{A'} = 1 - \mu_A$$

2.2.3.Kapsama:

A nın B yi kapsaması için gerek ve yeter şart $\mu_B \leq \mu_A$ olmasıdır.

2.2.4.Birleşim:

Sırasıyla, $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan iki A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi, üyelik fonksiyonu

$$\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], x \in X \quad (2.1)$$

şeklinde veya kısaltılmış olarak

$$\mu_C = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

şeklinde, A ve B nin üyelik fonksiyonlarına bağlı olan bir C fuzzy kümesidir. Burada

$$C = A \cup B$$

yazılır.

A ve B nin birleşimi A ve B nin her ikisini kapsayan en küçük fuzzy kümedir. Daha kesin bir ifadeyle, eğer D , A ve B nin her ikisini kapsayan herhangi bir fuzzy küme ise A ve B nin birleşiminide kapsar.

Bu tanımın (2.1) e denk olduğunu göstermek için ilk olarak,

$$\max[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_A$$

$$\max[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_B$$

olduğundan dolayı (2.1) ile tanımlı C kümesi hem A yı hem de B yi kapsadığını belirtelim.

Ayrıca, D , A ve B nin her ikisini kapsayan herhangi bir fuzzy küme ise, bu taktirde,

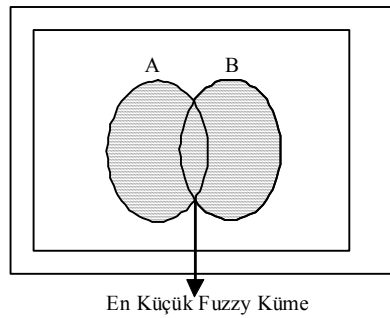
$$\mu_D \geq \mu_A$$

$$\mu_D \geq \mu_B$$

dir.

$$\mu_D \geq \max[\mu_A \vee \mu_B] = \mu_C$$

$C \subset D$ dir.



Şekil 2.3

2.2.5.Kesişim:

Sırasıyla, $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan iki A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi, üyelik fonksiyonu

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X$$

şeklinde veya kısaltılmış olarak

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

dir.

2.2.6.Fuzzy Kümelerde De Morgan Kuralları:

(I) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olduğunu gösteriniz.

$$\mu_{(A \cup B)'}(x) = 1 - \mu_{(A \cup B)}(x) = 1 - \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.2)$$

$$\mu_{(A' \cap B')}(x) = \min\{\mu_{A'}(x), \mu_{B'}(x)\} = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} \quad (2.3)$$

(i) **Durum:**

$\mu_A(x) > \mu_B(x)$ olsun. ($\mu_A(x) = 0.5, \mu_B(x) = 0.3$ seçilirse)

(2.2) kullanılırsa

$$1 - \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

$$1 - \mu_A(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.4)$$

(ii) **Durum:**

$\mu_A(x) < \mu_B(x)$ olsun.

(2.2) kullanılırsa

$$1 - \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = 1 - \mu_B(x)$$

(2.3) kullanılırsa

$$\mu_{(A' \cap B')}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} = 1 - \mu_B(x) \quad (2.5)$$

(2.4) ve (2.5) den eşitlik sağlanır.

(II) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ olduğunu gösteriniz.

$$\mu_{(A \cap B)'}(x) = 1 - \mu_{A \cap B}(x) = 1 - \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.6)$$

$$\mu_{(A' \cup B')}(x) = \max \{ \mu_{A'}(x), \mu_{B'}(x) \} = \max \{ 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \} \quad (2.7)$$

(i) Durum:

$\mu_A(x) > \mu_B(x)$ olsun

(2.6) kullanılırsa

$$1 - \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = 1 - \mu_B(x) \quad (2.8)$$

(2.7) kullanılırsa

$$\max \{ 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \} = 1 - \mu_B(x) \quad (2.9)$$

(2.8) ve (2.9) dan eşitlik sağlanır.

(ii) Durum:

$\mu_A(x) < \mu_B(x)$ olsun.

(2.6) kullanılırsa

$$1 - \mu_A(x)$$

elde edilir.(2.7) kullanılırsa

$$1 - \mu_A(x)$$

elde edilir.Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

(III) $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$ olduğunu gösteriniz.

$$\max(\mu_C(x), \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}) = \min(\max(\mu_C(x), \mu_A(x)), \max(\mu_C(x), \mu_B(x)))$$

Bu durum için altı durum söz konusudur.

(i) $\mu_A(x) > \mu_B(x) > \mu_C(x)$

(ii) $\mu_A(x) > \mu_C(x) > \mu_B(x)$

(iii) $\mu_B(x) > \mu_A(x) > \mu_C(x)$

(iv) $\mu_B(x) > \mu_C(x) > \mu_A(x)$

(v) $\mu_C(x) > \mu_A(x) > \mu_B(x)$

(vi) $\mu_C(x) > \mu_B(x) > \mu_A(x)$

(i). durumun sağlandığı gösterilirse, diğer durumlarda benzer şekilde gösterilir.

$$\max(\mu_C(x), \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}) = \min(\max(\mu_C(x), \mu_A(x)), \max(\mu_C(x), \mu_B(x)))$$

$$\max(\mu_C(x), \mu_B(x)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_B(x) = \mu_B(x)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.1:

Bir fuzzy kümenin boş olması için gerek ve yeter şart üyelik fonksiyonunun X üzerinde sıfır olmasıdır.

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) = 0 \Leftrightarrow A \neq \emptyset$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.2:

$A = X$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ olmasıdır.

Özellik 2.2.1:

$A \cap A' \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$\forall x \in X$ için A kümesinin üyelik fonksiyonu $0 < \mu_A(x) \leq 1$ şeklinde yazabiliriz. (Sıfır alırsak, $\mu_A(x) = 0$ olma durumu söz konusudur.) Bu durumda en az bir $x \in X$ için $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq 0$ olacağını gösterirsek, $x \in A \cap \bar{A}$ olur ve $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ olur. $\mu_A(x) < \frac{1}{2}$ olsun ve $\mu_{\bar{A}}(x) > \frac{1}{2}$ olur.

$$\mu_{A \cap \bar{A}}(x) = \min \left\{ \mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x) \right\} = \mu_A(x) \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

olup $\mu_A(x) \neq 0$, yani $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq 0$ olur, dolayısıyla $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ dır.

Özellik 2.2.2:

$A \cup A' \neq X$ olduğunu gösterelim.

En az bir $x \in X$ için A kümesinin üyelik fonksiyonu $0 < \mu_A(x) < 1$ şeklinde yazabiliriz. ($\mu_A(x) = 0$ alırsak A kümesinin boş olma, $\mu_A(x) = 1$ alırsak A kümesinin X ' e eşit olma durumu söz konusudur.) Buna göre $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$ olduğunu gösterirsek $A \cup \bar{A} \neq X$ olduğunu göstermiş oluruz.

$$\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = \max \left\{ \mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x) \right\} = \mu_{\bar{A}}(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

olur ve $\mu_A(x) \neq 1$ olduğundan $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$ olup $A \cup \bar{A} \neq X$ elde edilir.

Özellik 2.2.3:

$AB \subset A \cap B$ olduğunu gösterelim.

$$0 \leq \mu_A(x) \leq 1, 0 \leq \mu_B(x) \leq 1$$

$$\mu_{AB} = \mu_A \mu_B \text{ ve } \mu_{A \cap B} = \min \{ \mu_A, \mu_B \}$$

Kabul edelim ki $\mu_A = \frac{1}{2}$ ve $\mu_B = \frac{1}{3}$ olsun.

$$\mu_{AB} = \mu_A \mu_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B} &= \min \{ \mu_A, \mu_B \} = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3} \\ \mu_{AB} &< \mu_{A \cap B} \implies AB \subset A \cap B\end{aligned}$$

dir.

2.2.7.X Klasik Küme Üzerinde Tanımlı Bulanık A Kümesinin

$\alpha - Kesimi$ Ve Kuvvetli $\alpha - Kesimi$:

$$\begin{aligned}A^\alpha &= \{x/\mu(x) \geq \alpha, \alpha \in (0, 1]\} \\ A^{+\alpha} &= \{x/\mu(x) > \alpha, \alpha \in (0, 1]\}\end{aligned}$$

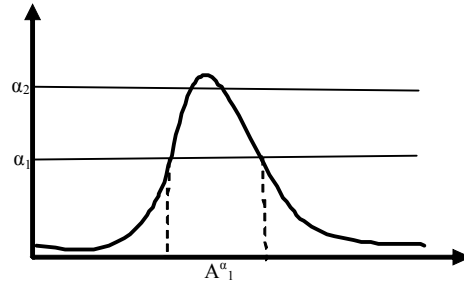
Bulanık bir A kümesinin $\alpha - kesimi$ klasik X kümesinin A bulanık kümesi içerisindeki α sayılarından büyük veya eşit üyelik derecesine sahip elemanların oluşturduğu klasik bir kümedir.

$\alpha - kesimi$ ve kuvvetli $\alpha - kesimi$ kavramının doğrudan tanımadan elde edilecek önemli özelliklerden biri ; α nın artmasıyla beraber ona karşılık gelen $\alpha - kesimi$ kümesinin küçülmesidir.

Dolayısıyla, A bulanık bir küme ve

$$\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1] \text{ ve } \alpha_1 < \alpha_2 \implies A^{\alpha_2} \subseteq A^{\alpha_1} \text{ ve } A^{\alpha_2^+} \subseteq A^{\alpha_1^+}$$

olduğu açıktır.



Şekil 2.4

Ayrıca herhangi bir $\alpha - kesimi$ aşağıdaki özellikleri yukarıda belirtilen özelliklerinden dolayı sağlar.

Tanım 2.2.3:

A bulanık kümesinin farklı $\alpha - kesimleri$ ni temsil eden bütün α düzeylerinin kümesine A nın seviyesi denir.

$$\hat{A} = \{ \alpha / \mu(x) = \alpha, \exists x \in X \}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.2.4:

A bulanık kümesinin dayanağı (supportu), X evrensel kümesinin A bulanık kümesi içerisinde üyelik derecesi 0 dan büyük elemanların oluşturduğu kümedir. Dayanak kümesi α - kesimi yardımıyla yazılabilir.

$$A^{+0} = day(A) = \sup p(A) = \{x \in X / \mu(x) > 0\}$$

olarak yazılabilir.

$$A' = \text{öz}(A) = core(A) = \{x \in X / \mu(x) = 1\}$$

kümesine A' 'nın özü denir. A bulanık kümesinin öz kümesi, üyelik dereceleri 1 'e eşit olan elemanların oluşturduğu kümedir.

A 'nın 0 ile 1 arasında kalan üyelik derecelerini alan elemanların oluşturduğu kümeye de A 'nın sınırı denir.

$$Sınır(A) = \{x \in X : 0 < \mu(x) < 1\}$$

ile verilir. En yüksek üyelik derecesine A 'nın yüksekliği denir.

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu(x)$$

şeklinde gösterilir. Eğer A 'nın en büyük üyelik derecesi 1, yani $h(A) = 1$ ise A 'ya normal bulanık küme, aksi taktirde normal olmayan bulanık küme denir.

Normalleştirilmek istenilen bir bulanık küme, küme içerisinde bütün üyelik derecelerinin $hgt(A)$ 'ya bölünmesiyle elde edilir. Yani,

$$Norm(A) = \frac{\mu(x)}{hgt(A)}$$

2.3. Konvekslik:

1) Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $(0, 1]$ aralığındaki tüm α 'lar için

$$\Gamma_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan Γ_α kümelerinin konveks olmasıdır.

2) A 'nın konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall \lambda \in [0, 1]$ için ve $\forall x_1, x_2 \in X$ için,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

olmasıdır.

(1) ve (2) tanımlarının denk olduğunu gösterelim:

İspat:

$\implies$: A fuzzy kümesi tanım 1 'deki anlamda konveks olsun. Γ_α 'nın tanımına göre

$$\mu_A(x_2) \geq \mu_A(x_1) = \alpha$$

şartını sağlayacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ elemanlarını seçelim. $\mu_A(x_2) \geq \alpha$ olduğunda Γ_α 'nın tanımını gereğince $x_2 \in \Gamma_\alpha$ dır.

Γ_α konveks olduğundan $\forall \lambda \in [0, 1]$ olmak üzere $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Gamma_\alpha$ elde edilir. Γ_α 'nın tanımı gereğince $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \alpha = \min \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$ elde edilir.

A fuzzy kümesi tanım 2 deki anlamda konveks olur.

$\Leftarrow$: A fuzzy kümesi tanım 2 deki anlamda konveks olsun. Yani, $\forall \lambda \in [0, 1]$ için ve $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

olsun. O zaman $\forall \alpha \in [0, 1]$ olmak üzere Γ_α 'nın konveks olduğunu gösterelim.

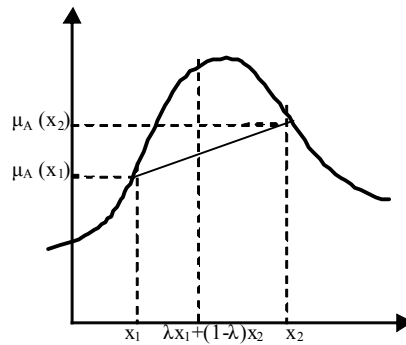
$x_1, x_2 \in \Gamma_\alpha$ alalım. $\Gamma_\alpha \subset X$ olduğundan $x_1, x_2 \in X$ dir. $x_1, x_2 \in X$ için $\alpha = \mu_A(x_1)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall x_2 \in X$ için $\mu_A(x_2) \geq \mu_A(x_1) = \alpha$ olur. $\forall \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\mu_A(x_\lambda) = \mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} = \mu_A(x_1)$$

$\mu_A(x_\lambda) \geq \alpha$ elde edilir. Böylece

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Gamma_\alpha$$

Γ_α 'nın konveks olduğu görülür. Böylece A fuzzy kümesi tanım 1 'deki anlamda konveks olur.



Şekil 2.5 Konveks fuzzy küme

Teorem 2.3.1

Eğer A ve B konveks ise $A \cap B$ 'de konvekstir.

İspat:

$C = A \cap B$ olsun. Bu taktirde,

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \min[\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), \mu_B(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)]$$

olur. Şimdi de A ve B 'nin konveksliğinden,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

$$\mu_B(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)\}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \mu_C(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \min[\min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)], \min[\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)]] \\ &\geq \min[\min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_1)\}, \min\{\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\}] \\ &\geq \min[\mu_{A \cap B}(x_1), \mu_{A \cap B}(x_2)] \\ &\geq \min[\mu_C(x_1), \mu_C(x_2)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[\mu_C(x_1), \mu_C(x_2)]$$

olur. Bu da teoremin ispatını verir.

NOT:

R^n de konvekslik üzerine hatırlatmalar:

Konveks küme : X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. $\forall x, y \in A$ için

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y, y \in A, \alpha \in [0, 1]$$

ise A 'ya konvekstir denir. Mesela R uzayı konvekstir. N kümesi konveks değildir.

2.4.ARALIKLAR VE FUZZY SAYILAR:

2.4.1.Aralıklar:

Bir aralık sözüyle, reel sayılarda kapalı sınırlı bir

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

cümlesini kastederiz.

Eğer A , bir aralıksa bu aralığın uç noktalarını A ve $\dot{A}$ ile göstereceğiz. Buna göre

$$A = \left[A, \dot{A} \right]$$

şeklinde bir gösterim kullanılabilir. Fakat buna dejenere olmuş bir $[a, a]$ aralığı ile a reel sayısı arasında bir ayırım yapılmayacaktır.

Reel doğru üzerinde " $\leq$ " sıralama bağıntısını aşağıdaki gibi aralıklarda genişletebiliriz.

$$A \leq B \Leftrightarrow \dot{A} \leq \dot{B} \text{ ve } \dot{\dot{A}} \leq \dot{\dot{B}}$$

Ayrıca " $<$ " sıralama bağıntısında aşağıdaki gibi tanımlanır

$$A < B \Leftrightarrow \dot{A} < \dot{B} \text{ ve } \dot{\dot{A}} < \dot{\dot{B}}$$

A ve B aralıklarını birer sayı olarak düşünülebilir. Yani bu aralıklarda şu şekilde tanımlanabilir.

$$\dot{C} = \dot{A} + \dot{B} \text{ ve } \dot{\dot{C}} = \dot{\dot{A}} + \dot{\dot{B}}$$

olmak üzere $A + B = C$ dir.

Daha farklı bir yolla,

$$\dot{A} + \dot{B} \leq a + b \leq \dot{\dot{A}} + \dot{\dot{B}}$$

eşitsizlik sistemini elde etmek için

$$\dot{A} \leq a \leq \dot{\dot{A}} \text{ ve } \dot{B} \leq b \leq \dot{\dot{B}}$$

eşitsizlikleri eklenebilir. Buna göre

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

cümlesi hesaplanabilir.

Bu sebepten dolayı denilebilir ki iki aralığın toplamı bir aralıktır.

Benzer şekilde,

$$-A = -\left[\dot{A}, \dot{\dot{A}}\right] = \left[-\dot{A}, -\dot{\dot{A}}\right] = \{-a : a \in A\}$$

şeklinde verilen bir aralığın negatiffisi tanımlanabilir.

İki aralığın farkı ;

$$B - A = B + (-A) = \{b - a : a \in A, b \in B\}$$

Kısaca aralıkta toplama ve çıkarma kuralları

$$\begin{aligned} \left[\dot{A}, \dot{\dot{A}}\right] + \left[\dot{B}, \dot{\dot{B}}\right] &= \left[\dot{A} + \dot{B}, \dot{\dot{A}} + \dot{\dot{B}}\right] \\ \left[\dot{A}, \dot{\dot{A}}\right] - \left[\dot{B}, \dot{\dot{B}}\right] &= \left[\dot{A} - \dot{B}, \dot{\dot{A}} - \dot{\dot{B}}\right] \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bir aralığın tersi,

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Eğer A , sıfır sayısını ihtiva etmeyen bir aralık ise

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{\underline{A}}, \frac{1}{\dot{A}} \right\}, A = \left\{ \left[\underline{A}, \dot{A} \right] : A \in R \right\}$$

dir.

İki aralığın çarpımı ise,

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

$A \cdot B$ değerinin bir aralık olduğunu görmek zor değildir. Bu çarpımın uç noktaları

$$\begin{aligned} \underline{A \cdot B} &= \min \left(\underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A} \cdot \dot{B}, \dot{A} \cdot \underline{B}, \dot{A} \cdot \dot{B} \right) \\ \dot{A \cdot B} &= \max \left(\underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A} \cdot \dot{B}, \dot{A} \cdot \underline{B}, \dot{A} \cdot \dot{B} \right) \end{aligned}$$

formüllerinden hesaplanabilir.

D, R reel doğru üzerinde tüm kapalı ve sınırlı $\left[\underline{A}, \dot{A} \right]$ aralıklarının kümesini gösterebiliriz. $A, B \in D$ için

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \dot{A} \leq \dot{B}$$

$$d(A, B) = \max \left(\left| \underline{A} - \underline{B} \right|, \left| \dot{A} - \dot{B} \right| \right)$$

d nin D üzerinde bir metrik tanımladığını ve (d, D) 'nin de bir tam metrik uzay olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca " $\leq$ " D 'de kısmi sıralama bağıntısıdır.

2.4.2.Fuzzy Sayılar:

Çoğu durumda insanlar sayısal bilgileri hassas bir şekilde tanımlayamazlar. Örneğin "yaklaşık 55", "6000 den büyük" gibi ifadeler kullanılır. Bunlar bulanık sayılara birer örnektir. Bulanık alt kümeler teorisini kullanarak, bulanık bir A sayısı aşağıdaki üç koşulu sağlamalıdır.

i) A normal bir bulanık küme olmalıdır.

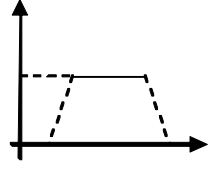
ii) A 'nın desteği A^{+0} sınırlı olmalıdır.

iii) A konveks bir bulanık küme olmalıdır.

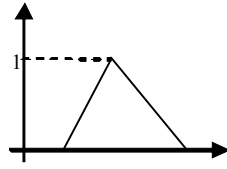
Başka bir ifadeyle fuzzy sayı tanımı şu şekildedir:

$X : R^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir bulanık küme denir. Bu fuzzy küme üzerine aşağıdaki dört koşulu yüklersek elde ettiğimiz fonksiyon bulanık sayı olarak adlandırılır.

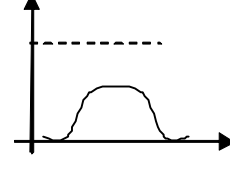
1) X normal olmak üzere $\exists x_0 \in R, \exists X(x_0) = 1$ olacaktır.



Şekil 2.6 Normal



Şekil 2.7 Normal

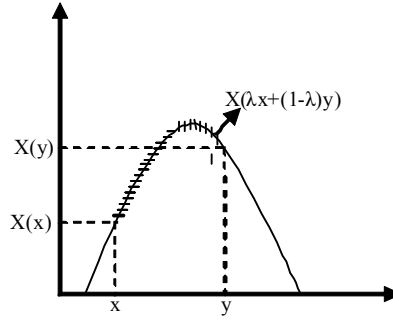


Şekil 2.8 Normal değil

2) X bulanık konveks olmak üzere yani $\forall x, y \in R$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

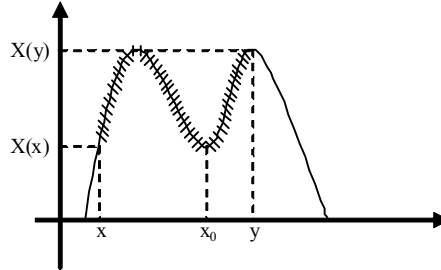
$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

olacaktır. Yani R reel eksen üzerindeki her iki noktayı birleştiren doğru parçasının görüntüsü bu uç noktaların görüntülerinin minimumdan daha küçüktür.



Şekil 2.9

Bu taraflı kısım $\min\{X(x), X(y)\} = X(x)$ den yukarıda kalır, yani şekil 2.9 da her bir x, y için bu koşul sağlanır.



Şekil 2.10

Bu x_0 için $X(x_0) < X(x)$ olduğundan konvekslik bozulur veya fuzzy konvekslik için Zadeh'in çok kullanışlı sonucu burada verilebilir:

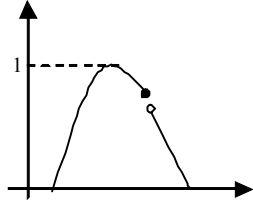
Sonuç 2.4.1:

Bir bulanık fuzzy sayısının konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall \alpha \in [0, 1]$ kesmesi için X^α kesiminin klasik anlamda konveks olmasıdır. Yani bir bulanık sayının $\forall \alpha$ kesimine karşılık gelen aralıklar tek bir aralık ise o bulanık sayı fuzzy konveks olur.

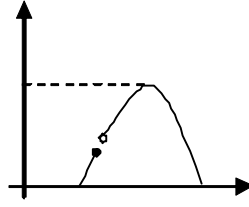
3) X üstten yarı süreklidir. Fonksiyonel analizdeki klasik üst yarı sürekliliğin tanımıdır. Yani

$$\forall t \in R \text{ için } X^{-1}(-\infty, t) = \{x \in R : f(x) < t\}$$

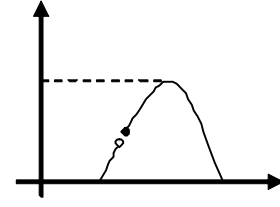
açık bir küme (R deki açık kümeler açık aralıklardır) olmasıdır.



Şekil 2.11 Ü.Y.S



Şekil 2.12 Ü.Y.S değil

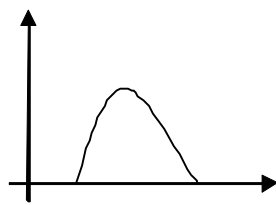


Şekil 2.13 Ü.Y.S

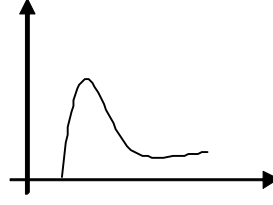
4) X^0 kümesi $\{x \in R : X(x) > 0\}$ kümesinin (bir açık aralık) kapanışı olarak tanımlansın.

$$X^0 = \text{closure} \{x \in R : X(x) > 0\}$$

dır. X^0 'ın kompakt olmasını (R 'deki kompaktlık=Kapalı ve sınırlı) istiyoruz. Yani X^0 'ın kapalı ve sınırlı olmasını istiyoruz. Bu durumda fonksiyon sonlu bir değerde kollarını reel eksene değdirmelidir.



Şekil 2.14 X^0 kompakt



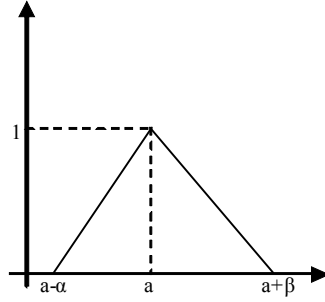
Şekil 2.15 X^0 kompakt değil
Çünkü X^0 'ın sağ ucu
sınırsız

Tanım 2.4.1.(Üçgen Fuzzy Sayı):

Bir A bulanık kümesinin merkezi a , sağ ve sol açığı sırasıyla $y > 0$ ve $\beta > 0$ ve üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyorsa A kümesine üçgen bulanık sayı denir.

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1 - (a - t)}{y}, & \text{eğer } a - y \leq t \leq a \\ \frac{1 - (t - a)}{\beta}, & \text{eğer } a \leq t \leq a + \beta \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

a merkezli üçgen bulanık sayı şu şekilde yorumlanabilir:

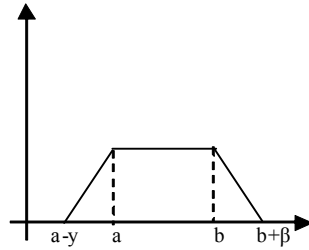


Şekil 2.16 X yaklaşık olarak a ya eşittir

Tanım 2.4.2.(Yamuk Bulanık Sayı):

Bir A bulanık kümesinin tolerans aralığı $[a, b]$, sağ ve sol açığıyla sırasıyla $y > 0$ ve $\beta > 0$ ve üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyorsa A kümesine yamuk bulanık sayı denir.

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1 - (a - t)}{y}, & \text{eğer } a - y \leq t \leq a \\ 1, & \text{eğer } a \leq t \leq b \\ \frac{1 - (t - b)}{\beta}, & \text{eğer } b \leq t \leq b + \beta \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$



Şekil 2.17 X yaklaşık olarak $[a, b]$ aralığındadır

2.5.FUZZY SAYILARDA DÖRT İŞLEM

2.5.1.Toplama:

A ve B fuzzy sayı olsun. A_α ve $B_\alpha, \alpha \in [0, 1]$ için α - tahmin seviyesi için

$$\begin{aligned} A_\alpha + B_\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha] \end{aligned}$$

Örnek 2.5.1:

$\mu_A(x), \mu_B(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere iki üçgen fuzzy sayısını alalım. $\forall x \in R$ için

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ \frac{x}{3} + \frac{5}{3}, & -5 \leq x \leq -2 \\ -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & -2 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 \\ \frac{x}{7} + \frac{3}{7}, & -3 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x}{8} + \frac{12}{8}, & 4 \leq x \leq 12 \\ 0, & x \geq 12 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \frac{a_1^\alpha}{3} + \frac{5}{3} &\Rightarrow a_1^\alpha = 3\alpha - 5 \\ \alpha = -\frac{a_2^\alpha}{3} + \frac{1}{3} &\Rightarrow a_2^\alpha = 1 - 3\alpha \end{aligned} \right\} A = [3\alpha - 5, 1 - 3\alpha] \text{-tahmin seviyesi}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \frac{b_1^\alpha}{7} + \frac{3}{7} &\Rightarrow b_1^\alpha = 7\alpha - 3 \\ \alpha = \frac{b_2^\alpha}{8} + \frac{12}{8} &\Rightarrow b_2^\alpha = -8\alpha + 12 \end{aligned} \right\} B = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12]$$

$$A_\alpha + B_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$$

$$A_\alpha + B_\alpha = \left[\underbrace{10\alpha - 8}_x, \underbrace{-11\alpha + 13}_x \right] \Rightarrow \text{üyelik fonksiyonu cinsinden yazılmalı}$$

$$x = 10\alpha - 8$$

$$\alpha = \frac{x + 8}{10},$$

$$\left. \begin{aligned} x = -8 &\Rightarrow \alpha = 0 \\ x = 2 &\Rightarrow \alpha = 1 \end{aligned} \right\} \alpha \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned}x &= -11\alpha + 13 \\ \alpha &= \frac{13}{11} - \frac{x}{11}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}x = 2 &\implies \alpha = 1 \\ x = 13 &\implies \alpha = 0\end{aligned} \right\}$$

$$\mu_A(x) + \mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x = -8 \\ \frac{x}{10} + \frac{8}{10}, & -8 \leq x \leq 2 \\ -\frac{x}{11} + \frac{13}{11}, & 2 \leq x \leq 13 \\ 0, & x \geq 13 \end{cases}$$

2.5.2.Çıkarma:

Toplamanın tanımı aynı zamanda çıkarmanın tanımına genişletilebilir. $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}A(-)B &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha](-)[b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]\end{aligned}$$

Örnek 2.5.2:

$\forall x \in R$ için

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 7 \\ \frac{x}{7} - 1, & 7 \leq x \leq 14 \\ -\frac{x}{5} + \frac{19}{5}, & 14 \leq x \leq 19 \\ 0, & x \geq 19 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2}, & 3 \leq x \leq 5 \\ -\frac{x}{5} + \frac{10}{5}, & 5 \leq x \leq 10 \\ 0, & x \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a_1^\alpha}{7} - 1 \implies a_1^\alpha = 7\alpha + 7 \\ \alpha &= -\frac{a_2^\alpha}{5} + \frac{19}{5} \implies a_2^\alpha = 19 - 5\alpha \\ \alpha &= \frac{b_1^\alpha}{2} - \frac{3}{2} \implies b_1^\alpha = 2\alpha + 3 \\ \alpha &= -\frac{b_2^\alpha}{5} + \frac{10}{5} \implies b_2^\alpha = 10 - 5\alpha\end{aligned}$$

$$A^\alpha - B^\alpha = [(7\alpha + 7) - (10 - 5\alpha), (19 - 5\alpha) - (2\alpha + 3)]$$

$$A^\alpha - B^\alpha = [12\alpha - 3, 16 - 7\alpha]$$

$$x = 12\alpha - 3 \implies \alpha = \frac{x}{12} + \frac{3}{12}$$

$$\alpha = 0 \implies x = -3$$

$$\alpha = 1 \implies x = 9$$

$$x = 16 - 7\alpha \implies \alpha = -\frac{x}{7} + \frac{16}{7}$$

$$\alpha = 0 \implies x = 16$$

$$\alpha = 1 \implies x = 9$$

$$\mu_{A-B}(x) = \begin{cases} 0, x \leq -3 \\ \frac{x}{12} + \frac{3}{12}, -3 \leq x \leq 9 \\ -\frac{x}{7} + \frac{16}{7}, 9 \leq x \leq 16 \\ 0, x \geq 16 \end{cases}$$

2.5.3.Çarpma:

Fuzzy sayıların çarpımında R^+ ve N düşünülür. R^+ da iki A ve B fuzzy sayısını alalım. α -tahmin seviyesi ;

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$$

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha]$$

Örnek 2.5.3:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x \leq 2 \\ x - 2, 2 \leq x \leq 3 \\ -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}, 3 \leq x \leq 5 \\ 0, x \geq 5 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, x \leq 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2}, 3 \leq x \leq 5 \\ -x + 6, 5 \leq x \leq 6 \\ 0, x \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_1^\alpha - 2 \implies a_1^\alpha = \alpha + 2 \\
\alpha &= -\frac{a_2^\alpha}{2} + \frac{5}{2} \implies a_2^\alpha = -2\alpha + 5 \\
\alpha &= \frac{b_1^\alpha}{2} - \frac{3}{2} \implies b_1^\alpha = 2\alpha + 3 \\
\alpha &= -b_2^\alpha + 6 \implies b_2^\alpha = -\alpha + 6
\end{aligned}$$

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30]$$

$$\begin{aligned}
2\alpha^2 + 7\alpha + 6 &= x \implies \alpha = \frac{-7 + \sqrt{1+8x}}{4} \\
2\alpha^2 - 17\alpha + 30 &= x \implies \alpha = \frac{17 - \sqrt{49+8x}}{4}
\end{aligned}$$

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \begin{cases} 0, x \leq 6 \\ \frac{-7 + \sqrt{1+8x}}{4}, 6 \leq x \leq 15 \\ \frac{17 - \sqrt{49+8x}}{4}, 15 \leq x \leq 30 \\ 0, x \geq 30 \end{cases}$$

2.5.4.Bölme:

İki fuzzy sayısının bölümü R^+ da tanımlanır.

$$\begin{aligned}
A : B &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] (\cdot) [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\
A : B &= [a_1^\alpha/b_2^\alpha, a_2^\alpha/b_1^\alpha], (b_2 > 0)
\end{aligned}$$

2.5.5.Bir Fuzzy Sayının Sabit Bir Sayı İle Çarpımı:

A, R de bir fuzzy sayısı olsun. $k \in R$ için

$$\begin{aligned}
k \cdot A_\alpha &= [k, k] \cdot [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \\
k \cdot A_\alpha &= [k \cdot a_1^\alpha, k \cdot a_2^\alpha]
\end{aligned}$$

3. FUZZY DÜZLEM GEOMETRİ

$\bar{N}$ bir(reel) fuzzy sayıdır gerek ve yeter şart

1) $\mu(x/\bar{N})$ üst yarı süreklidir.

2) $[c, d]$ aralığının dışında $\mu(x/\bar{N}) = 0$ dır.

3) a ve b reel sayıları vardır öyle ki $c \leq a \leq b \leq d$ ve $\mu(x/\bar{N})$ üyelik fonksiyonu $[c, a]$ aralığı üzerinde artan, $\mu(x/\bar{N})$ üyelik fonksiyonu $[b, d]$ aralığı üzerinde azalan, $[a, b]$ aralığı üzerinde $\mu(x/\bar{N}) = 1$ dir.[6,7]

$\bar{N}$ bir fuzzy sayı olduğunda $\bar{N}(\alpha)$, tüm α lar için, kapalı(sınırlı) bir aralıktır. Fuzzy sayının özel bir çeşidi üçgen fuzzy sayıdır. $\bar{N}$ üçgen fuzzy sayısı a, b, c sayıları ile tanımlanır öyle ki

(i) $a < b < c$

(ii) $y = \mu(x/\bar{N})$ 'nin grafiği tabanı $[a, c]$ üzerinde ve köşesi $(b, 1)$ noktasında bir üçgendir.

Üçgen fuzzy sayısı $\bar{N} = (a, b, c)$ ile gösterilir.

3.1. Fuzzy Noktalar:

Düzlemde fuzzy noktalar iki şekilde tanımlanır.

Metod 1:

Bir fuzzy nokta $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ reel fuzzy sayılar olmak üzere $(\bar{X}, \bar{Y})$ çiftidir.

Metod 2:

R^2 'de (a, b) noktasında fuzzy nokta, $\bar{P}(a, b)$ yazılır, üyelik fonksiyonu ile tanımlanır:

1) $\mu((x, y)/\bar{P}(a, b))$ üst yarı süreklidir.

2) $\mu((x, y)/\bar{P}(a, b)) = 1$ dir. Gerek ve yeter şart $(x, y) = (a, b)$ dir.

3) $\bar{P}(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, tüm α lar için, R^2 nin kompakt, konveks bir alt cümlesidir.

Fuzzy noktayı tanımlamak için Metod 2 kullanılır. Bunun iki temel sebebi vardır: **(1)** R^3 de bir yüzey olarak $\bar{P}(a, b)$ ($z = \mu((x, y)/\bar{P}(a, b))$ nin grafiği) resmedilebilir. Fakat Metod 1 de $(\bar{X}, \bar{Y})$ nin resmi yapılamaz. **(2)** Metod 1 arkasındaki temel fikir fuzzy doğrular için iyi sonuçlar vermez.

Örnek 3.1.1.

$\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ iki reel fuzzy sayı olsun öyle ki $\mu\left(x/\bar{X}\right) = 1$ dir gerek ve yeter şart $x = a$ dir, $\mu\left(y/\bar{Y}\right) = 1$ dir gerek ve yeter şart $y = b$ dir. O zaman $\min\left(\mu\left(x/\bar{X}\right), \mu\left(y/\bar{Y}\right)\right) = \mu\left((x, y)/\bar{P}(a, b)\right)$, (a, b) noktasında bir fuzzy noktadır.

$\bar{F}$ düzlemin bir fuzzy alt cümlesi olsun. $\bar{F}$ fuzzy konvektir gerek ve yeter şart $u, \omega \in R^2$ de herhangi iki nokta ve v, u ve ω noktalarının oluşturduğu doğru üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere $\mu\left(v/\bar{F}\right) \geq \min\left(\mu\left(u/\bar{F}\right), \mu\left(\omega/\bar{F}\right)\right)$ dir. $\bar{P}(a, b)$ fuzzy konvektir gerek ve yeter şart tüm α 'lar için, $\bar{P}(a, b)(\alpha)$ konvektir. $\bar{P}(a, b)$ 'nin konveks α -kesimlerine sahip olması $\bar{P}$ 'nin fuzzy konveks olmasına denktir.

$d(u, v) \in R^2$ 'de u ve v noktaları arasında alışılmış Öklid uzaklık metriği olsun. $\bar{D} \bar{P}(a_1, b_1)$ ve $\bar{P}(a_2, b_2)$ iki fuzzy nokta arasındaki fuzzy uzaklık üyelik fonksiyonu $\mu\left(d/\bar{D}\right)$ ile tanımlanır. [2,4,5]

Tanım 3.1.1

$\Omega(\alpha) = \left\{d(u, v) : u, \bar{P}(a_1, b_1)(\alpha) \text{ } \alpha\text{-kesimi içinde ve } v, \bar{P}(a_2, b_2)(\alpha) \text{ } \alpha\text{-kesimi içinde}\right\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.O zaman $\mu\left(d/\bar{D}\right) = \sup\{\alpha : d \in \Omega(\alpha)\}$

Teorem 3.1.1.

$\bar{D}(\alpha) = \Omega(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, ve $\bar{D}$ bir reel fuzzy sayıdır.

İspat:

(1) İlk önce $\bar{D}(\alpha) = \Omega(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, olduğunu göstereceğiz.

$d \in \Omega(\alpha)$ olsun. O zaman $\mu\left(d/\bar{D}\right) \geq \alpha$ ve $\Omega(\alpha) \subseteq \bar{D}(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesidir.

Şimdi, $\bar{D}(\alpha)$ α -kesiminin $\Omega(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesi olduğunu göstereceğiz.

$d \in \bar{D}(\alpha)$ olsun. O zaman $\mu\left(d/\bar{D}\right) \geq \alpha$ dir. $\mu\left(d/\bar{D}\right) = \beta$ olsun. İki durum vardır:

(a) $\beta > \alpha$, ve (b) $\beta = \alpha$ dir.

(a) $\beta > \alpha$ olduğunu kabul edelim. $\Omega(\gamma)$ α -kesiminde d ile bir $\gamma, \alpha < \gamma \leq \beta$ vardır. $\Omega(\gamma) \subseteq \bar{D}(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesi olduğu için $d \in \Omega(\gamma) \subseteq \bar{D}(\alpha)$ α -kesimindedir. Böylece $\bar{D}(\alpha)$, $\Omega(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesidir.

(b) Şimdi $\beta = \alpha$ olsun. $K = \{\Delta : d \in \Omega(\Delta)\}$ alalım. O zaman $\sup K = \beta = \alpha = \mu\left(d/\bar{D}\right)$ dir. K da bir γ_n dizisi vardır öyle ki $\gamma_n \uparrow \alpha$ dir. $\varepsilon > 0$ verilsin. Pozitif bir N tamsayısı vardır öyle ki $\alpha - \varepsilon < \gamma_n, n \geq N$ dir. Şimdi, $\Omega(\gamma_n)$, tüm n ler için, α -kesiminde bulunan d , her $\varepsilon > 0$ için $\Omega(\alpha - \varepsilon)$ α -kesimindeki d yi gösterir. Böylece $\bar{P}(a_1, b_1)(\alpha)$ α -kesimi içindeki u ve $\bar{P}(a_2, b_2)(\alpha)$ α -kesimi içindeki v için, $d = d(u, v)$

dir. Bu $\mu \left(u \diagdown \bar{P}(a_1, b_1) \right) \geq \alpha - \varepsilon$ ve $\mu \left(v \diagdown \bar{P}(a_2, b_2) \right) \geq \alpha - \varepsilon$ olduğunu gösterir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğu için $\mu \left(u \diagdown \bar{P}(a_1, b_1) \right) \geq \alpha$ ve $\mu \left(v \diagdown \bar{P}(a_2, b_2) \right) \geq \alpha$ olduğu görülür. Bu $d \in \Omega(\alpha)$ ve $\bar{D}(\alpha)$ α -kesimi $\Omega(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesi olduğu anlamına gelir.

Buradan $\bar{D}(\alpha) = \Omega(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, olduğu sonucuna varılır. $\bar{D}(0) = \Omega(0)$ olduğu elde edilir ve ispatın birinci kısmı tamamlanır.

(2) $\bar{D}$ nin bir fuzzy sayı olduğu gösterilecektir.

(a) $\bar{P}(a_1, b_1)$ ve $\bar{P}(a_2, b_2)$ nin α -kesimleri kompakt olduğu için $\Omega(\alpha)$ nın, tüm α lar için, sınırlı, kapalı bir aralık olduğu görülür. $\Omega(\alpha) = [l(\alpha), r(\alpha)]$, $0 \leq \alpha \leq 1$, olsun. Eğer bir fuzzy sayının α -kesimi kapalı cümle ise üyelik fonksiyonunun üst yarı sürekli olduğu biliniyor[4]. Fakat $\bar{D}(\alpha) = \Omega(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, kapalı bir aralıktır. Böylece, $\mu \left(d \diagdown \bar{D} \right)$ üst yarı süreklidir.

(b) $\Omega(0) = [c, d]$ olsun. O zaman, $[c, d]$ dışında $\mu \left(d \diagdown \bar{D} \right) = 0$ dır.

(c) $a = d((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ olmak üzere $\Omega(1) = a$ olsun. Şimdi, tüm α lar için, $l(\alpha)$ c den a ya azalan ve $r(\alpha)$ d den a ya artan olmak üzere $\bar{D}(\alpha) = [l(\alpha), r(\alpha)]$ olduğundan $\mu \left(d \diagdown \bar{D} \right)$ $[c, a]$ aralığı üzerinde azalan, $[a, d]$ aralığı üzerinde artan ve $d = a$ noktasında $\mu \left(d \diagdown \bar{D} \right) = 1$ olduğu elde edilir.

Bu $\bar{D}$ nin bir fuzzy sayı olduğunu gösterir.

$(x, y) \neq (a, b)$ için $\mu \left((x, y) \diagdown \bar{D}(a, b) \right) = 0$ ve $(x, y) = (a, b)$ için $\mu \left((x, y) \diagdown \bar{D}(a, b) \right) = 1$ olduğunda $\bar{P}(a, b)$ fuzzy nokta (a, b) noktasında bir crisp noktaya indirgenir. Açıkça, $\bar{P}(a_1, b_1)$ ve $\bar{P}(a_2, b_2)$ sırasıyla (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) noktalarında crisp noktalar olduğunda $\bar{D}$ d ye indirgenir. (d, R^2 üzerinde öklid metriktir)

Tanım 3.1.2.

$\bar{M}$ fuzzy metrik $\left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right)$ fuzzy nokta çiftinden fuzzy sayılara bir dönüşümdür öyle ki ;

$$1) \bar{M} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) = \bar{M} \left(\bar{P}_2, \bar{P}_1 \right)$$

2) $\bar{M} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) = \bar{0}$ gerek ve yeter şart $\bar{P}_1$ ve $\bar{P}_2$ her ikisi (a, b) noktasında fuzzy noktalaradır.

3) $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ herhangi fuzzy noktalar için

$$\bar{M} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) \leq \bar{M} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_3 \right) + \bar{M} \left(\bar{P}_3, \bar{P}_2 \right)$$

Tanımdaki $\bar{M}$ 'yi tam olarak belirtmek için üç şeyi yapmaya ihtiyacımız vardır: **(i)** (2)

'deki $\bar{0}$ tanımlamak ;(ii) (3) 'deki $\leq$ tanımlamak;(iii) (3) 'deki $+$ tanımlamak.

$\bar{0}$ aşağıdaki özelliklerle R 'nin herhangi bir fuzzy alt cümlesidir.

1) $x < 0$ için $\mu \left(x/\bar{0} \right) = 0$;

2) $\mu \left(x/\bar{0} \right) = 1$ dir.Gerek ve yeter şart $x = 0$

3) $0 < x < d$ ve bazı $d > 0$ için $\mu \left(x/\bar{0} \right)$ azalan , ve $x \geq d$ için $\mu \left(x/\bar{0} \right) = 0$

$\bar{M} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right)$ bir fuzzy sayı olduğu için α - kesimleri kapalı aralıklar olacaktır.

Tanım 3.1.3.

$\bar{A}$ ve $\bar{B}$ iki fuzzy sayı ve $\bar{A}(\alpha) = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, $\bar{B}(\alpha) = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$,tüm α 'lar için.

$\bar{A} \leq_s \bar{B}$ gerek ve yeter şart $a_1(\alpha) \leq b_1(\alpha)$ ve $a_2(\alpha) \leq b_2(\alpha)$ tüm α 'lar için. $\bar{A} \leq_w \bar{B}$ gerek ve yeter şart tüm α 'lar için $a_2(\alpha) \leq b_2(\alpha)$ dır.

" $\leq_s$ " güçlü bir bağıntıyı ve " $\leq_w$ " zayıf bir bağıntıyı gösterir.Metrik tanımındaki $\leq$ eşitsizliği $\leq_s$ veya $\leq_w$ olabilir.Eğer $\leq_s$ ($\leq_w$) yı kullanılırsa $\bar{M}$ güçlü(zayıf) fuzzy metrik olur.

Metrik tanımındaki fuzzy sayıların toplamı (+) aralık aritmetiği kullanılarak yapılır.Ya ni,toplamda fuzzy sayı elde etmek için $\bar{M} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) (\alpha)$ ve $\bar{M} \left(\bar{P}_3, \bar{P}_2 \right) (\alpha)$ iki aralık toplanır.

Teorem 3.1.2.

$\leq_s$ bağıntısı fuzzy sayıların cümlesi üzerinde kısmi sıralıdır(yansıma, geçişken, anti-simetrik). $\leq_w$ bağıntısı yansıyan ve geçişkendir.

Teorem 3.1.3.

$\bar{D}$ zayıf bir fuzzy metriktir.

İspat :

1) Açık olarak , $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) = \bar{D} \left(\bar{P}_2, \bar{P}_1 \right)$ dir.

2) $\bar{P}_1 = \bar{P}(a_1, b_1)$ ve $\bar{P}_2 = \bar{P}(a_2, b_2)$ olsun.İlk önce kabul edelim ki $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) = \bar{0}$ olsun. Bu $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) (1)$, $u \in \bar{P}_1(1) = \{(a_1, b_1)\}$ ve $\bar{P}_2(1) = \{(a_2, b_2)\}$ olan tüm $d(u, v)$ lerin cümlesidir.Böylece $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = 0$, $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ olması demektir. Şimdi kabul edelim ki $\bar{P}_1$ ve $\bar{P}_2(a, b)$ noktasında fuzzy noktalar olsun. $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) (1) = \{0\}$ ve $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) \bar{0}$ denilen correct shape sahiptir.

3) $\bar{P}_3 = \bar{P}(a_3, b_3)$, $\bar{A} = \bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right)$, $\bar{B} = \bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_3 \right)$, $\bar{C} = \bar{D} \left(\bar{P}_3, \bar{P}_2 \right)$,

$\bar{A}(\alpha) = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, $\bar{B}(\alpha) = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, $\bar{C}(\alpha) = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$
 $a_2(\alpha) \leq b_2(\alpha) + c_2(\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz. Teorem 3.1.1.den;

$$a_2(\alpha) = \sup \{d(u, v) : u \in P_1(\alpha), v \in P_2(\alpha)\} \quad (3.1)$$

$$b_2(\alpha) = \sup \{d(u, v) : u \in P_1(\alpha), v \in P_3(\alpha)\} \quad (3.2)$$

$$c_2(\alpha) = \sup \{d(u, v) : u \in P_3(\alpha), v \in P_2(\alpha)\} \quad (3.3)$$

Bu yüzden

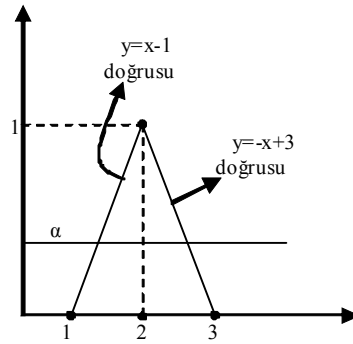
$$\begin{aligned} a_2(\alpha) &\leq \sup_{(u,v)} \{d(u, w) + d(w, v) : u \in P_1(\alpha), w \in P_3(\alpha), v \in P_2(\alpha)\} \\ &\leq \sup_u \{d(u, w) : u \in P_1(\alpha), w \in P_3(\alpha)\} \\ &\quad + \sup_v \{d(w, v) : w \in P_3(\alpha), v \in P_2(\alpha)\} \\ &\leq b_2(\alpha) + c_2(\alpha) \end{aligned}$$

Aşağıdaki örnek $\bar{D}$ nin güçlü bir fuzzy metrik olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.2:

$\bar{P}_1, \bar{P}_2$ ve $\bar{P}_3$ sırasıyla $(1, 0)$, $(3, 0)$ ve $(2, 0)$ fuzzy noktalar olsun. Her bir $\bar{P}_i$ nin şekli sağ dairesel konidir. Örneğin, $\bar{P}_1$ tabanı $(x-1)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ve köşesi $(1, 0)$ noktasında olan bir sağ dairesel konidir. $\bar{P}_2 \left(\bar{P}_3 \right)$ nin tabanı $(x-3)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \left((x-2)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right)$ dür. O zaman $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 \right) (0) = [1, 3]$, $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_3 \right) (0) = \bar{D} \left(\bar{P}_3, \bar{P}_2 \right) (0) = [0, 2]$ öyle ki $\bar{D} \left(\bar{P}_1, \bar{P}_3 \right) (0) + \bar{D} \left(\bar{P}_3, \bar{P}_2 \right) (0) = [0, 4]$ ve $[1, 3] \not\leq_s [0, 4]$ değildir.

Çözüm:



Şekil 3.1

$$y = x - 1$$

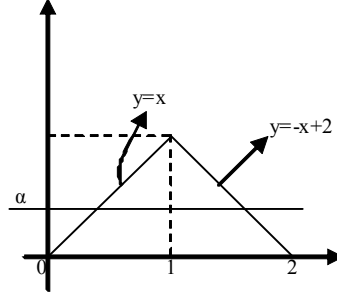
$$\alpha = x - 1 \implies x = \alpha + 1$$

$$y = -x + 3$$

$$\alpha = -x + 3 \implies x = 3 - \alpha$$

$$\theta(\alpha) = \left[\pi(\alpha + 1)^2 + \pi(3 - \alpha)^2 \right]$$

$$\bar{D}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)(0) = [\alpha + 1, 3 - \alpha] = [1, 3]$$



Şekil 3.2

$$y = x$$

$$\alpha = x$$

$$y = -x + 2$$

$$\alpha = -x + 2 \implies x = 2 - \alpha$$

$$\bar{C} = [\alpha, 2 - \alpha]$$

$$[\pi\alpha^2 + \pi(2 - \alpha)]$$

$$\bar{D}(\bar{P}_1, \bar{P}_3)(0) = [\alpha, 2 - \alpha] = [0, 2]$$

3.2.Fuzzy Doğrular :

3.2.1.Fuzzy Doğruların Çeşitleri:

Metod 1:

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ fuzzy sayıları verilsin. Bir fuzzy doğrusu

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y} = \bar{C} \tag{3.4}$$

için tüm fuzzy sayı çözümlerinin $(\bar{X}, \bar{Y})$ cümlesidir.(3.2.1) eşitliği $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ için bir çözüme sahip değildir[4]. Bu yüzden bir fuzzy doğru tanımlanırken bu metod kullanılmaz.

Metod 2:

$\bar{M}, \bar{B}$ fuzzy sayıları verilsin. Bir fuzzy doğrusu

$$\bar{Y} = \bar{M}\bar{X} + \bar{B} \quad (3.5)$$

için tüm fuzzy sayı çözümlerinin $(\bar{X}, \bar{Y})$ cümlesidir. Metod 2 kullanılarak bir fuzzy doğru $(\bar{X}, \bar{Y})$ olacak $\bar{X}$ herhangi bir fuzzy sayı ve $\bar{Y}$ (3.5) eşitliği ile hesaplanır. Bir fuzzy doğruyu tanımlarken Metod 2'nin kullanılmamasının temel sebebi bu çeşit bir fuzzy doğrunun grafiğinin veya resminin çizilememesidir.

Metod 3 :

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ fuzzy sayılar olsun. Eğer $\bar{A}(1) = \{a\}$ ve $\bar{B}(1) = \{b\}$ ise a ve b nin her ikisinin sıfır olmadığını kabul edelim.

$$\Omega_{11}(\alpha) = \left\{ (x, y) : ax + by = c, a \in \bar{A}(\alpha), b \in \bar{B}(\alpha), c \in \bar{C}(\alpha) \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.6)$$

olsun. $\bar{L}_{11}$ fuzzy doğrusu üyelik fonksiyonu ile

$$\mu \left((x, y) / \bar{L}_{11} \right) = \sup \{ \alpha : (x, y) \in \Omega_{11}(\alpha) \} \quad (3.7)$$

tanımlanır. Eğer $\bar{A}(1) = \{0\}$ ve $\bar{B}(1) = \{0\}$ ise $\Omega_{11}(1)$ boş olabilir. Çünkü $0x + 0y = c, c \in \bar{C}(1)$ eşitliğinde c sıfır olmadığında çözüm yoktur.

Metod 4 :

$\bar{M}$ ve $\bar{B}$ fuzzy sayıları verilsin.

$$\Omega_{12}(\alpha) = \left\{ (x, y) : y = mx + b, m \in \bar{M}(\alpha), b \in \bar{B}(\alpha) \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.8)$$

olsun. $\bar{L}_{12}$ fuzzy doğrusu,

$$\mu \left((x, y) / \bar{L}_{12} \right) = \sup \{ \alpha : (x, y) \in \Omega_{12}(\alpha) \} \quad (3.9)$$

ile tanımlanır.

Metod 5 (Nokta-Eğim Formu):

$\bar{K}, R^2$ de bir fuzzy nokta ve $\bar{M}$ bir fuzzy sayı olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\Omega_2(\alpha) = \left\{ (x, y) : y - v = m(x - u), (u, v) \in \bar{K}(\alpha), m \in \bar{M}(\alpha) \right\} \quad (3.10)$$

tanımlansın. $\bar{L}_2$ fuzzy doğrusu

$$\mu \left((x, y) / \bar{L}_2 \right) = \sup \{ \alpha : (x, y) \in \Omega_2(\alpha) \} \quad (3.11)$$

dır.

Metod 6 (İki Nokta Formu):

$\bar{P}_1$ ve $\bar{P}_2$ düzlemde iki fuzzy nokta olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\Omega_3(\alpha) = \left\{ (x, y) : \frac{y - v_1}{x - u_1} = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}, (u_1, v_1) \in \bar{P}_1(\alpha), (u_2, v_2) \in \bar{P}_2(\alpha) \right\} \quad (3.12)$$

dir. $\bar{L}_3$ fuzzy doğrusu,

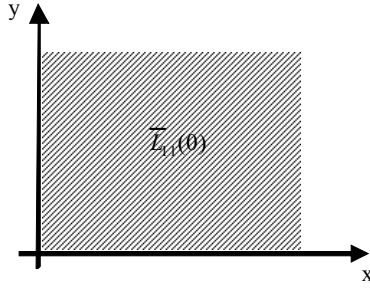
$$\mu \left((x, y) / \bar{L}_3 \right) = \sup \{ \alpha : (x, y) \in \Omega_3(\alpha) \} \quad (3.13)$$

dir.

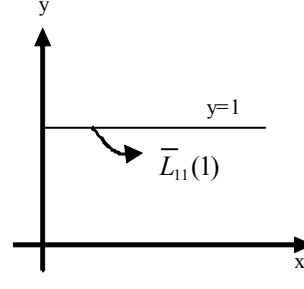
3.3.Örnekler:

Örnek 3.3.1. ("Fat (Kalın)" Fuzzy Doğrusu)

$\bar{A} = (-1/0/1)$, $\bar{B} = (-1/1/2)$, $\bar{C} = (0/1/2)$ hepsi üçgen fuzzy sayılar olsun. $\bar{L}_{11}$ in desteği, $\bar{L}_{11}(0), R^2$ 'nin tamamıdır. $\bar{L}_{11}(1), y = 1$ crisp doğrusudur.



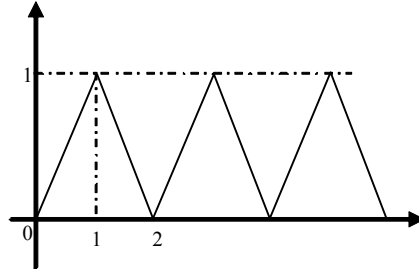
Şekil 3.3



Şekil 3.4

Örnek 3.3.2. ("Thin(Zayıf)" Fuzzy Doğrusu):

Metod 4 'ü kullanarak $\bar{L}_{12} y = 2x + \bar{B}$, $\bar{B} = (0/1/2)$ ile tanımlansın. Burada $\bar{M}$, 2 fuzzy sayıdır. $z = \mu \left((x, y) / \bar{L}_2 \right)$ nin grafiği tabanı $[0, 2]$ aralığı üzerinde, y -ekseni üzerine $\bar{B}$ 'nin yerleştirilmesiyle elde edilir ve $y = 2x + 1$ crisp doğrusu boyunca B üçgeni sürekli olarak.



Şekil 3.5

Örnek 3.3.3.(Metod 5 Kullanılarak Diğer "Thin" Fuzzy Doğrusu):

$\bar{M} = 1(crisp)$ ve $\bar{K}(1, 1)$ noktasında bir fuzzy nokta olsun. O zaman $\bar{L}_2(\alpha), \bar{K}(\alpha)$ 'daki bir noktadan geçen 1 eğimli ,tüm doğrular olur. $\bar{L}_2(1) y = x$ crisp doğrusudur. $\bar{K}(0)$ "small(küçük)" olduğunda $\bar{L}_2$ "thin" dir.

NOT:

$\bar{K}(0)$ 'ın "small" olması:

$$y - v = m(x - u), m = 1$$

$$\implies y - v = x - u$$

$$\implies y = x - u + v$$

$$\implies v - u = 1$$

$$(u, v) = (0, 1) \vee (-1, 0)$$

$\bar{K}(0)$ α -kesimlerinin elemanlarının küçük olması $\bar{L}_2$ doğrusunun "thin" olmasını gerektirir.

Örnek 3.3.4. ("Thin" ve "Fat" Fuzzy Doğrusu) :

$\bar{P}_1(0, 0)$ ve $\bar{P}_2(1, 1)$ grafiği bir sağ dairesel koni olan iki fuzzy nokta olsun. $\bar{P}_1(0, 0)$ 'ın tabanı

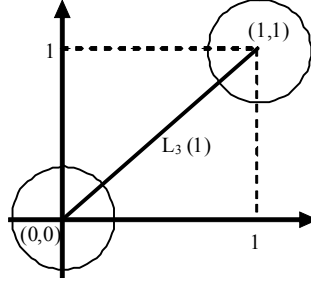
$$B_1 = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\}$$

ve köşesi $(0, 0)$ noktasındadır. $\bar{P}_2(1, 1)$ 'in tabanı

$$B_2 = \left\{ (x, y) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\}$$

ve köşesi $(1, 1)$ noktasındadır. O zaman $\bar{L}_3(0), \bar{L}_3$ ün desteği (Metod 6 ile), B_1 'deki bir noktadan ve B_2 'deki bir noktadan geçen tüm doğrulardır. $\bar{L}_3(1) y = x$ crisp doğrusudur. $z = \mu\left((x, y) \nearrow \bar{L}_3\right)$ ün grafiği B_1 ve B_2 arasında "thin" dir, fakat $x > 1$ veya $x < 0$ için

$y = x$ boyunca hareket ederse gittikçe genişler.



Şekil 3.6

3.4. Fuzzy Doğruların α - Kesimleri

Teorem 3.4.1 :

$\bar{L}_a(\alpha) = \Omega_a(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha = 1, 2, 3$ için .

İspat:

Teorem 3.1.1'de $\bar{D}(\alpha) = \Omega(\alpha)$ olduğundan ispat benzerdir.

3.5. Bazı Temel Özellikler:

3.5.1. $\bar{L}_2$

$\bar{L}_2$ 'nin tanımında $\bar{K}$ fuzzy nokta ve $\bar{M}$ fuzzy eğim olsun. Eğer $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ düzlemin iki fuzzy alt cümlesi ise $\bar{A} \leq \bar{B}$ yazılabilir gerek ve yeter şart $\mu\left((x, y) \nearrow \bar{A}\right) \leq \mu\left((x, y) \nearrow \bar{B}\right)$, R^2 deki tüm (x, y) 'ler için.

Tanım 3.5.1:

$\bar{L}$ fuzzy doğrusu $\bar{Q}$ fuzzy noktasını içerir gerek ve yeter şart $\bar{Q} \leq \bar{L}$ dir.

Açık olarak $\bar{L}_2$ $\bar{K}$ 'yı içerir çünkü $\bar{K} \leq \bar{L}_2$ olduğunu görmek kolaydır. Eğer $\bar{P}(c, d)$, (c, d) noktasında bir fuzzy nokta ve $\bar{L}_2$, $\bar{P}(c, d)$ 'yi içeriyorsa (c, d) , $\Omega_2(1)$ 'de olmalıdır. $\bar{M}(1) = [m_1, m_2]$ bir aralık olsun. $\Omega_2(1)$ $m_1 \leq m \leq m_2$, m eğimli (a, b) noktasından geçen tüm doğrulardır. Eğer $\bar{M}$ bir üçgen fuzzy ise, $\bar{M}(1) = m$, bir tek $\Omega_2(1)$, $y - b = m(x - a)$ crisp doğrusudur.

3.5.2. $\bar{L}_3$

$\bar{P}_1 = \bar{P}(a_1, b_1)$ ve $\bar{P}_2 = \bar{P}(a_2, b_2)$ Metod 6 ile $\bar{L}_3$ de tanımlanan iki fuzzy nokta olsun. Açık olarak $\bar{L}_3$ hem $\bar{P}_1$ hem de $\bar{P}_2$ yi içerir. Ayrıca $\bar{L}_3(1) = \Omega_3(1)$ daima (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) noktalarından geçen crisp doğrusu olacaktır. $\bar{L}_3$ bazı diğer $\bar{Q}$ fuzzy noktasını içerirse $\bar{Q}(1)$, $\Omega_3(1)$ α -kesiminde bulunan doğru üzerindedir.

3.6.İlişkiler :

3.6.1. $\bar{L}_{11}$ bir $\bar{L}_{12}$ dir:

Sıfırın $\bar{B}(0)$ ait olmadığını kabul edelim.

$$\Omega_m(\alpha) = \left\{ -\frac{a}{b} : a \in \bar{A}(\alpha), b \in \bar{B}(\alpha) \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.14)$$

tanımlansın ve $\bar{M}$,

$$\mu\left(x/\bar{M}\right) = \sup\{\alpha : x \in \Omega_m(\alpha)\} \quad (3.15)$$

olarak tanımlansın.

$$\Omega_b(\alpha) = \left\{ \frac{c}{b} : b \in \bar{B}(\alpha), c \in \bar{C}(\alpha) \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.16)$$

ve $\bar{B}_0$,

$$\mu\left(x/\bar{B}_0\right) = \sup\{\alpha : x \in \Omega_b(\alpha)\}$$

olarak tanımlansın.

Tanımlar altında $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{L}_{11}$ 'in tanımındaki fuzzy sayılardır. $\bar{M}$ ve $\bar{B}_0$ 'ın da fuzzy sayılar ve $\bar{M}(\alpha) = \Omega_m(\alpha), \bar{B}_0(\alpha) = \Omega_b(\alpha)$, tüm α 'lar için, olduğu gösterilebilir. Bu yüzden $\bar{M}$ ve $\bar{B}_0, \bar{L}_{12}$ 'nin tanımındaki fuzzy sayılar olur.

Teorem 3.6.1:

$$\bar{L}_{11} = \bar{L}_{12}.$$

İspat :

$\bar{L}_{11}(\alpha) = \Omega_{11}(\alpha)$ 'nın $\bar{L}_{12}(\alpha) = \Omega_{12}(\alpha)$,tüm α 'lar için aynı olduğunu göstereceğiz. Eğer $(x, y) \in \Omega_{11}(\alpha)$ ise bazı $a \in \bar{A}(\alpha), b \in \bar{B}(\alpha), c \in \bar{C}(\alpha)$ için $ax + by = c$ dir. O zaman $m = -\frac{a}{b}, b_0 = \frac{c}{b}$ için $y = mx + b_0$ dir. Fakat $m \in \bar{M}(\alpha), b_0 \in \bar{B}_0(\alpha)$ öyle ki $(x, y) \in \Omega_{12}(\alpha)$ dir. Böylece $\Omega_{11}(\alpha), \Omega_{12}(\alpha)$ 'nın bir alt cümlesidir.

Benzer olarak $\Omega_{12}(\alpha)$ α -kesiminin $\Omega_{11}(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesi olduğunu gösterebiliriz.

3.6.2. $\bar{L}_3$ bir $\bar{L}_2$ dir.

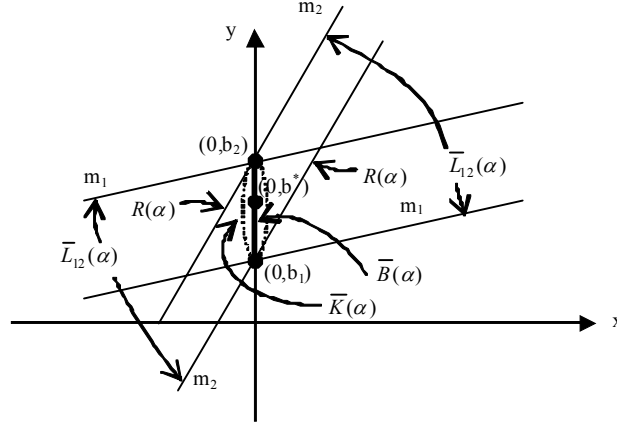
$\bar{P}_1 = \bar{P}(a_1, b_1)$ ve $\bar{P}_2 = \bar{P}(a_2, b_2)$ $\bar{L}_3$ tanımındaki iki fuzzy nokta olsun. $Proj_x$ ($Proj_y$) x -ekseninin (y -ekseninin) üzerindeki düzlemin bir alt cümlesinin izdüşümü olarak tanımlansın.

$Proj_x \bar{P}_1(0) \cap Proj_y \bar{P}_2(0)$ m boş olduğunu kabul edelim. Bu eğer $(u_1, v_1) \in \bar{P}_1(0)$ ve $(u_2, v_2) \in \bar{P}_2(0)$ ise $u_1 - u_2$ nin asla sıfır olmayacağı anlamına gelir.

$$\Omega_m(\alpha) = \left\{ m : m = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}, (u_1, v_1) \in \bar{P}_1(\alpha), (u_2, v_2) \in \bar{P}_2(\alpha) \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için}$$

tanımlansın.

$$\mu \left(x / \bar{M} \right) = \sup \{ \alpha : x \in \Omega_m(\alpha) \}$$



Şekil 3.7

$\bar{M}$ 'nin bir fuzzy sayı ve $\bar{M}(\alpha) = \Omega_m(\alpha)$, tüm α 'lar için ,olduğu gösterilebilir.Şimdi $\bar{M}$ ve $\bar{P}_1 \bar{L}_2$ 'nin tanımındaki fuzzy cümleler olur.

Teorem 3.6.3:

$$\bar{L}_3 = \bar{L}_2$$

İspat :

Tüm α 'lar için, $\Omega_3(\alpha) = \Omega_2(\alpha)$ olduğunu göstereceğiz. $(x, y) \in \bar{L}_3(\alpha)$ olsun.O zaman

$$y - v_1 = m(x - u_1), m \in \bar{M}(\alpha), (u_1, v_1) \in \bar{P}_1(\alpha)$$

dır.Fakat o zaman $(x, y) \in \Omega_2(\alpha)$ ve $\Omega_3(\alpha)$, $\Omega_2(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesidir.Benzer olarak , $\Omega_2(\alpha)$ α -kesiminin $\Omega_3(\alpha)$ α -kesiminin bir alt cümlesi olduğu gösterilir.

3.6.3. $\bar{L}_{12} \bar{L}_2$ ye karşılık gelir :

$\bar{L}_{12}$ verilsin, bir $\bar{L}_2$ tanımlanabilir öyle ki $\bar{L}_2 = \bar{L}_{12}$ dir. $\bar{M}, \bar{B} \bar{L}_{12}$ 'nin tanımındaki iki fuzzy sayı olsun. $\bar{L}_2$ için aynı $\bar{M}$ kullanılacaktır.Şekil 3.7 $\bar{L}_{12}$ 'nin belli bir α -kesimini gösterir. $\bar{L}_{12}(\alpha) = \Omega_{12}(\alpha)$ dir. $\bar{L}_2$ tanımındaki $\bar{K}$ fuzzy nokta belirtilmelidir. $\bar{M}(\alpha) = [m_1, m_2]$ ve $\bar{B}(\alpha) = [b_1, b_2]$ olsun.Şimdi, $\mu \left(x / \bar{B} \right) = 1$ dir.Gerek ve yeter şart $b_1 < b^* < b_2$ için $x = b^*$ olduğunu kabul edelim.Yani, $\bar{B}$ sadece bir noktada normalleştirilmiştir. $\bar{K}, \alpha$ -kesimi şekil 3.7 deki $R(\alpha)$ bölgesinde yatan bir fuzzy nokta olarak tanımlansın.O zaman

$$\Omega_2(\alpha) = \Omega_{12}(\alpha) \text{ ve } \bar{L}_2, \bar{L}_{12} \text{ ile aynı olacaktır.}$$

Tam tersine , $\bar{M}$ ve $\bar{K} \bar{L}_2$ 'nin tanımındaki fuzzy cümle olsun. $\bar{K}$ y-ekseni üzerindeki bir fuzzy nokta olmalıdır. $\bar{K}, (0, b^*)$ noktasında bir fuzzy nokta olsun öyle ki onun α -kesimi

şekil 3.7 nin $R(\alpha)$ bölgesinin içine düşer. $Proj_{\bar{K}}(\alpha)$ şekil 3.7 deki $[b_1, b_2]$ olacaktır. $\bar{B}$ fuzzy sayısı tanımlansın öyle ki $\bar{B}(\alpha) = Proj_{\bar{K}}(\alpha)$, tüm α 'lar için. $\bar{L}_{12}$ için aynı $\bar{M}$ kullanılır. O zaman tüm α lar için $\Omega_{12}(\alpha) = \Omega_2(\alpha)$ dır öyle ki $\bar{L}_{12} = \bar{L}_2$ dir.

3.7.Genel Özellikler

Bir $\bar{L}$ fuzzy doğrusu bir $\bar{L}_{11}, \bar{L}_{12}, \bar{L}_2$ veya bir $\bar{L}_3$ olur. Genelde

- 1) $\bar{L}$ 'nin α -kesimi kapalı, birleşimli ve arcwise connected'dır fakat konveks değildir.
- 2) $\mu\left((x, y) \nearrow \bar{L}\right)$ üst yarı sürekli olacaktır(α -kesimi kapalı olduğundan)
- 3) $\bar{L}$ normalleştirilmiştir veya $\bar{L}(1)$ 'de daima en az bir crisp doğrusu vardır.

3.8.Paralel ve Kesişen Fuzzy Doğrular:

Tanım 3.8.1:

$\bar{L}_a, \bar{L}_b$ iki fuzzy doğrusu olsun. $\bar{L}_a$ ve $\bar{L}_b$ nin paralellığının (ρ) ölçüsü

$$\lambda = \sup_{R^2} \left\{ \min \left(\mu \left((x, y) \nearrow \bar{L}_a \right), \mu \left((x, y) \nearrow \bar{L}_b \right) \right) \right\} \quad (3.17)$$

olmak üzere $1 - \lambda$ olarak tanımlanır.

(3.17) eşitliğinde, λ sadece $\bar{L}_a$ ve $\bar{L}_b$ nin arakesitinin yüksekliğidir. Bu yüzden, eğer $\bar{L}_a \cap \bar{L}_b$ boş cümle (tamamen paralel) ise, o zaman $\lambda = 0$ ve $\rho = 1$ dir. $l_a(l_b) \bar{L}_a(1) \left(\bar{L}_b(1) \right)$ de bir crisp doğru olsun. Eğer l_a ve l_b kesişirse, o zaman $\lambda = 1$ ve $\rho = 0$ dır. Bu yüzden ρ 'nun paralellığının ölçüsü için bilinen bazı özelliklere sahip olduğu görülür.

$\bar{L}_a$ ve $\bar{L}_b$ iki crisp doğrusu olduğunu kabul edelim. O zaman $\rho = 1$ dir. Gerek ve yeter şart $\bar{L}_a$ ve $\bar{L}_b$ paraleldir.

Şimdi $\bar{L}_a$ bir crisp doğrusu ve $\bar{L}_b$ bir fuzzy doğrusu olsun. Örneğin, $\bar{L}_b = \bar{L}_{12}$ veya $\bar{L}_2$ olsun. Eğer $\bar{M}(1) = [m_1, m_2], m_1 < m_2$, ise $\bar{L}_a, \bar{L}_b(1)$ de bir crisp doğru kesmelidir ve $\rho = 0$ dır. Bu yüzden bir fuzzy doğru ve bir crisp doğrusu için $\rho = 0$ elde edilebileceği görülür.

Tanım 3.8.2:

$\bar{L}_a$ ve $\bar{L}_b$ iki fuzzy doğrusu olsun. $\rho < 1$ kabul edelim. $\bar{L}_a$ ve $\bar{L}_b$ 'nin arakesitinin $\bar{R}$ fuzzy bölgesi $\bar{R} = \bar{L}_a \cap \bar{L}_b$ dir. $\bar{R}$ için üyelik fonksiyonu

$$\mu \left((x, y) \nearrow \bar{R} \right) = \min \left(\mu \left((x, y) \nearrow \bar{L}_a \right), \mu \left((x, y) \nearrow \bar{L}_b \right) \right) \quad (3.18)$$

dir. Açık olarak, $\rho = 1$ ise $\bar{R}$ arakesitinin fuzzy bölgesi boş cümledir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bogomolny A.** , (1983),On the perimeter and area of fuzzy sets,*Fuzzy Sets and Systems* **23** 257-269.
- [2] **Buckley J.J.**, (1992) ,Solving fuzzy equations,*Fuzzy Sets and Systems* **50** 1-14.
- [3] **Buckley J.J. and Eslami E.** ,Fuzzy plane geometry II:Circles and polygons,*Fuzzy Sets And Systems* ,to appear.
- [4] **Buckley J.J. and Qu Y.** , (1991) ,Solving systems of fuzzy linear equations,*Fuzzy Sets and Systems* **43** 33-43.
- [5] **Buckley J.J. and Qu Y.** , (1991) ,Solving fuzzy equations:a new solution concept,*Fuzzy Sets and Systems* **39** 291-301.
- [6] **Goetschel R. and Voxman W.** , (1983) Topological properties of fuzzy numbers,*Fuzzy Sets And Systems* **10** 87-99.
- [7] **Goetschel R. and Voxman W.** , (1986) , Elemantry fuzzy calculus,*Fuzzy Sets and Systems* **18** 31-43.
- [8] **Rosenfeld A.** , (1984) , The diameter of a fuzzy set, *Fuzzy Sets and Systems* **13** 241-246.
- [9] **Rosenfeld A.** , (1990) , Fuzzy rectangles,*Pattern Recognition Lett*,**11** 677-679
- [10] **Rosenfeld A.** , (Orlando,26-29 June 1994) Fuzzy plane geometry :triangles , in:Proc.3rd IEEE Internat.Conf. on Fuzzy Systems,**Vol.II** 891-893
- [11] **Rosenfeld A. and Haber S.** , (1985) ,The perimeter of a fuzzy set, *Pattern Recognition* **18** 125-130.
- [12] **Balcı M.** , Analitik Geometri ,2007,Balcı Yayınları,Ankara.
- [13] **Karlığa B.** ,Düzlem Analitik Geometri ,2002 ,G.Ü. Basımevi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1985 Elazığ doğumluyum. İlk ve ortaokulu Elazığ'da tamamladım. 2003 yılında Elazığ Anadolu Lisesi'nden mezun oldum. 2004 yılında F.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2008 yılında mezun oldum. Aynı sene içinde F.Ü. Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladım. Halen bu bölümde yüksek lisansa devam etmekteyim.