

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN
YENİ JAKOBİ ELİPTİK VE KOMPAKTON ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Eda FENDOĞLU**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

OCAK-2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YENİ JAKOBİ ELİPTİK VE KOMPAKTON ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Eda FENDOĞLU
(08121115)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11/01/2011

OCAK-2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YENİ JAKOBİ ELİPTİK VE KOMPAKTON ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eda FENDOĞLU

(08121115)

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11/01/2011
Tezin Savunulduğu Tarih: 25/01/2011**

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Yrd. Doç. Dr. İ. Enam İNAN

OCAK-2011

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca beni yönlendiren, tez konusunun belirlenmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü) hocama teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eda FENDOĞLU
ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. BÖLÜM	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	1
2. BÖLÜM	7
2.1. Genelleştirilmiş KdV Denklemini	7
2.2. Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi	8
2.3. Kompaktonlar	12
3. BÖLÜM	14
3.1. Nonlinear D(m,n) Denkleminin Soliton Çözümleri	14
4. BÖLÜM	29
4.1. Nonlinear R(m,n) Denkleminin Soliton Çözümleri	29
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	41

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferansiyel denklemlerle ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde genelleştirilmiş KdV denklemi, soliton ve soliton etkileşiminin tarihçesi ve kompaktlar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise tezimizin asıl kısmını oluşturan lineer olmayan Drinfel'd-Sokolov ($D(m,n)$) denklemi ve lineer olmayan $R(m,n)$ denkleminin Jakobi eliptik fonksiyonlar yardımı ile yeni çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: KdV denklemi, Jakobi eliptik fonksiyon, Eliptik fonksiyon modülü, Kompakt ve soliton çözümleri, Drinfel'd-Sokolov ($D(m,n)$) denklemi, Lineer olmayan $R(m,n)$ denklemi, Sine-cosine metodu.

SUMMARY

New Exact Jacobi Elliptic and Compacton Solutions of Nonlinear Some Partial Differential Equations

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, provides fundamental definitions related to differential equations.

In the second chapter, we give the generalized KdV equations, soliton and soliton interaction history and compacton.

In the third and fourth chapter, produced new solutions by the help of fundamental part of thesis Non-linear Drinfel'd-Sokolov ($D(m,n)$) equation and Non-linear $R(m,n)$ equation's Jacobi elliptic function.

Key Words: KdV equation, Jacobi elliptic functions, Elliptic function modulus, Compacton and soliton solution, Drinfel'd – Sokolov $D(m,n)$ equation, Non-linear $R(m,n)$ equation, Sine – cosine method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.2.1 Tek dalga (Solitary wave).....	9
Şekil 2.2.2 Bir sarmal (envelope) soliton.....	11
Şekil 2.2.3 Soliton veya antisoliton.....	12
Şekil 2.2.4 Aynı eksene göre simetrik solitonlar (Breather solitonları).....	12

SEMBOLLER LİSTESİ

L	: Diferensiyel operatörü
∇	: Laplace operatörü
Δ	: Delta
R	: Reel sayı sistemi
f	: Bir fonksiyon
$u(x, t)$	: Çözüm fonksiyonu
λ	: Lamda
ε	: Epsilon
Ω	: Omega
ξ	: Xi
φ	: Phi
σ	: Sigma

KISALTMALAR

KdV	: Korteweg-de Vries Denklemleri
mKdV	: Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries Denklemleri
GKdV	: Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries Denklemleri
NLS	: Lineer Olmayan Schrödinger Denklemleri
R(m,n)	: Regüle Edilmiş Uzun Dalga Denklemleri
D(m,n)	: Drinfel'd – Sokolov Denklemleri

1. BÖLÜM

1.1. TEMEL TANIMLAR

Tanım 1.1.1

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 ,$$

veya genel olarak

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 ,$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferansiyel denklemler olarak adlandırılır [1] .

Tanım 1.1.2

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denklemlere kısmi türevli denklem adı verilir [2] .

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere kısmi türevli denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 ,$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.3

Tam ve rasyonel şekle sokulabilen bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden ve bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir.

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [2].

Tanım 1.1.4

$sn\xi = sn(\xi, m)$, $cn\xi = cn(\xi, m)$ ve $dn\xi = dn(\xi, m)$ Jacobi eliptik sine fonksiyon, Jacobi eliptic cosine fonksiyon ve üçüncüsü de Jacobi eliptik fonksiyon olarak isimlendirilmektedir ve $0 < m < 1$ Jacobi eliptik fonksiyonun modülüdür. Glaisher'in sembolleri olarak gösterilen Jacobi eliptik fonksiyonları, aşağıdaki şekilde dört ana gruba ayrılır [3] .

$$(1): sn\xi , cn\xi \text{ and } dn\xi$$

$$(2): ns\xi = \frac{1}{sn\xi} , nc\xi = \frac{1}{cn\xi} \text{ and } nd\xi = \frac{1}{dn\xi}$$

$$(3): sc\xi = \frac{sn\xi}{cn\xi} , sd\xi = \frac{sn\xi}{dn\xi} \text{ and } cd\xi = \frac{cn\xi}{dn\xi}$$

$$(4): cs\xi = \frac{1}{sc\xi} , ds\xi = \frac{1}{sd\xi} \text{ and } dc\xi = \frac{1}{cd\xi}$$

Jakobi eliptik fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$(1): cn^2\xi + sn^2\xi = 1 , dn^2\xi + m^2 sn^2\xi = 1 , m^2 (cn^2\xi - 1) = dn^2\xi - 1$$

$$(2): ns^2\xi - cs^2\xi = 1 , ns^2\xi - ds^2\xi = m^2 , ds^2\xi - cs^2\xi = 1 - m^2$$

$$(3): nc^2\xi - sc^2\xi = 1 , dc^2\xi - (1 - m^2)sc^2\xi = 1 , dc^2\xi(1 - m^2)nc^2\xi = m^2$$

$$(4): cd^2\xi + (1 - m^2)sd^2\xi = 1 , nd^2\xi - m^2sd^2\xi = 1 , m^2cd^2\xi + (1 - m^2)nd^2\xi = 1$$

$$(1): (sn\xi)' = cn\xi dn\xi , (cn\xi)' = -sn\xi dn\xi , (dn\xi)' = -m^2 sn\xi cn\xi$$

$$(2): (ns\xi)' = -cs\xi ds\xi , (cs\xi)' = -ns\xi ds\xi , (ds\xi)' = -ns\xi cs\xi$$

$$(3): (sc\xi)' = nc\xi dc\xi , (nc\xi)' = sc\xi dc\xi , (dc\xi)' = (1 - m^2)nc\xi sc\xi$$

$$(4): (sd\xi)' = nd\xi cd\xi , (cd\xi)' = (m^2 - 1)sd\xi nd\xi , (nd\xi)' = m^2 cd\xi sd\xi$$

Jakobi eliptik fonksiyonların m modülü $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ için aşağıdaki trigonometrik fonksiyonlara dönüşür:

$$m \rightarrow 0 \text{ için } sn\xi \rightarrow \sin\xi , cn\xi \rightarrow \cos\xi , sc\xi \rightarrow \tan\xi , cs\xi \rightarrow \cot\xi , nc\xi \rightarrow \sec\xi ,$$

$$m \rightarrow 1 \text{ için } sn\xi \rightarrow \tanh\xi , cn\xi \rightarrow \operatorname{sech}\xi , sc\xi \rightarrow \sinh\xi , cs\xi \rightarrow \operatorname{csc}h\xi , nc\xi \rightarrow \cosh\xi .$$

Tanım 1.1.5

Bir diferansiyel denklemde ki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [2].

Eğer diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-lineer) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y)z_x + Q(x, y) + R(x, y)z = S(x, y),$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y).$$

Tanım 1.1.6

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y)z = 0.$$

Tanım 1.1.7

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f 'in k . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k -sınıfındandır denir [2].

Tanım 1.1.8

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y)z = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

Tanım 1.1.9

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının herbir elemanına Y uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir [4].

Tanım 1.1.10

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan ∇ Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

şeklinde ki bir denkleme de ∇' nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca $\nabla U, t$ ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [2].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [2]

a) İki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

b) Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

c) İki boyutlu Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

d) Biharmonik denklem

$$\nabla^4 u = 0,$$

e) Biharmonik dalga denklemi

$$\nabla^4 u = \nabla^2 (\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

f) Telegraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha[E - V(x, y, z)]u = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

1.1.1 Teorem

(Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi):

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ve $R(x,y,z)$ fonksiyonları (x_0, y_0, z_0) noktasını kapsayan bir $D \subset \mathbb{R}^3$ bölgesinde C^1 sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0$$

olsun. O zaman (x_0, y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U 'nun içinde yatan C eğrisinin her noktasında $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $Pz_x + Qz_y = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x, y)$ çözümü vardır.

1.1.2 Teorem (Cauchy-Kowalewski teoremi):

$$LA(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y),$$

denklemindeki katsayılar ve G fonksiyonu, xy -düzleminde, orjini kapsayan bir $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde analitik olsunlar. Ω da $C(x,y) \neq 0$ olsun. x -ekseninin Ω tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $(0,0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $Lz = G$ denkleminin bir tek analitik $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır, Öyle ki N komşuluğu tarafından kapsanan x -ekseni üzerinde $\varphi_x(x, 0) = h(x)$, $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$ sağlanır.

2. BÖLÜM

2.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ

KdV denklemi olarak bilinen denklem, 1855 yılında D.J. Korteweg ve G.de Vries [5] adında iki bilim adamı tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlenmesiyle oluşturulmuştur. Bu denklem geçen yüzyıldan beri bilinmesine rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi 1844’de John Scott Russel tarafından gözlemlenmiş tek dalgalar (solitary wave) için en basit ve faydalı modellerden biridir. Martin Kruskal ve Norman Zabusky [6] adındaki iki bilim adamı, dalga hareketine benzer tekrarlamaları KdV denklemi ile oluşmuş bir sistemle gözlemlemişlerdir. Bu tek dalganın özelliklerinden biri de birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonunda şekil ve biçimlerini korumalarıdır. Bu da tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir. Dalganın doğal yapısından dolayı, Zabusky ve Kruskal bu tek dalgayı “ soliton” olarak adlandırmıştır. Ayrıca Zabusky ve Kruskal [6], periyodik sınır şartlarıyla KdV denkleminin sayısal çözümünü gözlemlemişlerdir.

Lineer olmayan dalga yapısı hakkındaki bilgiler, modern matematiksel fiziğin gelişmesinde önemli kavramlardan biri olan soliton tanımının kullanıldığı fizik ve matematik arasındaki ortak çalışmalarla elde edilir. KdV denkleminin çözümünde solitonlar dağılma özelliği göstermezler. Klasik KdV denklemi lineer olmayan bazı fiziksel bölgelerde gözlemlenebilir. Başlangıç olarak Karpman [8] ve Bisognano [9] tarafından lineer olmayan nötr yüzeylerdeki dalga hareketi ve dairesel bir çemberdeki şiddetli ışınlar için KdV denkleminin yararlanılarak teorik modeller geliştirilmiştir. Bu denklem; katı, sıvı, gaz ve plazma soğuk bir yüzeyde ki magnetikhidrodinamiklerde; lineer olmayan yaylarla birleştirilmiş eşit kütleli bir boyutlu kafeslerde ki boylamsal dalga yayılımlarında; Fermi probleminde, soğuk bir plazmadaki akustik iyon dalgalarında, tüpteki akışkanın yönünde ve elastiki çubuklardaki boylamsal dalgalarda ve bunlar gibi daha birçok fiziksel uygulamaya sahiptir.

Geçen 50 yıl boyunca lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerinin yorumları için geniş bir araştırma sahası oluşturulmuştur. Lineer olmayan denklemler içersinde en iyi bilinenlerden biri de KdV denklemdir. Bununla birlikte matematik ve fiziğin çeşitli dallarında lineer olmayan KdV denklemi kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi (GKdV)

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0$$

şeklinde verilebilir. Buradaki ikinci $u^n u_x$ ve üçüncü u_{xxx} terimleri sırasıyla iletim ve dağılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve dağılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur. Dağılma etkisi dalgaformunun hızını oluştururken lineer olmayan iletim etkisi de dalgaformunun şeklini oluşturur. Bu iki terimin karşılıklı etkileşimlerinden sabit bir dalgaformu oluşur (solitary wave). Her bir soliton karşılıklı etkileşimlerine rağmen değişmez. Solitonların yapısı sistemin parametrelerinin zamana bağlı olduğunu garanti eder ve böylece solitonların stabil olduğu görülür. GKdV denkleminin en önemli durumlarından biri modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemidir. Bu denklem $n=2$ için GKdV denkleminin türetilmesiyle oluşur ve bu denklem elektrodinamikler de, ince tabakalardaki elektromagnetik dalgalarda, yoğunluk katmanlarının iç kısımlarında, elastik araçlarda ve trafik akışları gibi birçok fiziksel uygulama alanına sahiptir.

2.2. SOLİTON VE SOLİTON ETKİLEŞİMİNİN TARİHÇESİ

1834’de John Scott Rusell tek dalga (solitary wave)’yı Edinburg-Glasgow kanalında, şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemlemiştir. Bu dalgayı “büyük dalga kayması” olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844’de “Dalgalar üzerinde rapor (Repor on Wave)” makalesinde açıklamıştır. Bu makalede, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş şekilde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bunu takriben, benzer dalgaların üretilmesiyle ilgili daha yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bu deneysel bilgilere dayalı olarak Rusell, tek dalganın u hızı ve sonlu bir h derinliğindeki sıvının serbest yüzey üzerinde maksimum a genliği arasında

$$u^2 = g(h + a) \quad (2.2.1)$$

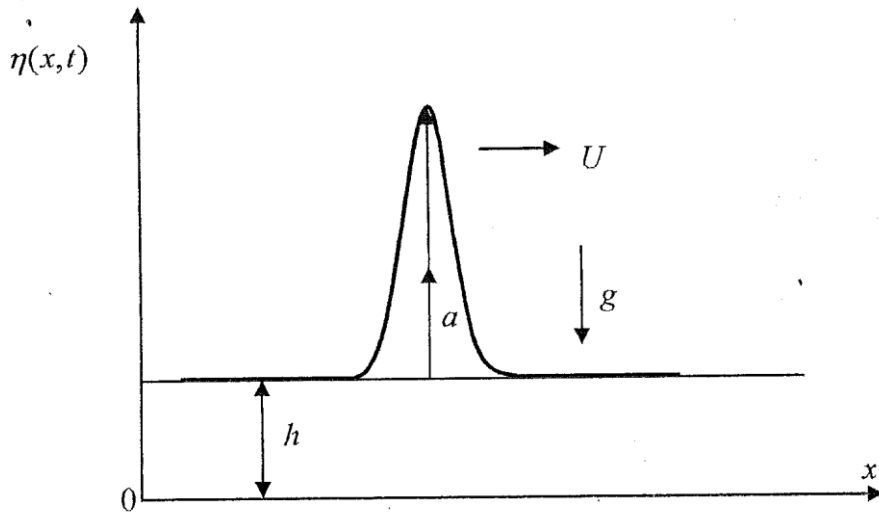
formunda önemli bir bağıntı bulmuştur. Burada g yerçekimi ivmesidir. Su dalgalarıyla ilgili, Airy ve Stokes’in teorilerine zıt olan bu görüşler, yani Rusell’in tek dalga hakkındaki yorumu, tek dalganın varlığı ve bu dalganın bir sıvı ortamında şeklini değiştirmeden yayılmasıyla ilgili düşüncesiyle birlikte pek çok problem ortaya çıkmıştır. 1870’lere kadar bu fikirler pek kabul görmemesine rağmen, yalnız 1871’de J. Boussinesq [10] ve 1876’da Lord Rayleigh [11] tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları da yapışkan olmayan ve

sıkıştırılmayan sıvıların hareket denklemini (2.2.1) formunda çıkarmışlardır. Gerçektende onlar tek dalga profilini Şekil 1’de ki, herhangi bir $a > 0$ için

$z = \eta(x, t)$, $\beta^2 = 3a / \{4h^2(h + a)\}$ olmak üzere;

$$\eta(x, t) = a \sec^2 \{ \beta(x - ut) \} \quad (2.2.2)$$

çözümünü bulmuşlardır.



Şekil 2.2.1. Tek dalga (Solitary wave)

Bu yazarlar sadece $a < h$ olmak üzere geçerli olan $\sec^2$ çözümünü bulmalarına rağmen, (2.2.2.)’yi çözüm kabul eden herhangi bir diferansiyel denklem bulamamışlardır. Bununla birlikte Boussinesq, $c = \sqrt{gh}$ sığ su dalgalarının hızı olmak üzere böylesi uzun dalgalar için;

$$\eta_{tt} = c^2 \left[\eta_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxxx} \right] \quad (2.2.3)$$

şeklinde lineer olmayan yayılma denklemini ortaya koymuştur. Bu Boussinesq [10] denklemi olarak bilinir ve bunun çözümü;

$$\eta(x, t) = a \sec^2 \left[(3a / h^3)^{1/2} (x \pm ut) \right] \quad (2.2.4)$$

formundadır. Bu çözüm ise hem pozitif hem de negatif yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmadan 60 yıl sonra, 1885’de D.J. Korteweg ve G.de Vries [7] adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından gözlemlenen olayın bir açıklamasını veren matematiksel bir model ortaya koyarak ρ yoğunluklu bir su yüzeyi üzerinde tek yöndeki dalgaların yayılışı için, şimdi iyi bilinen;

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left[\left(\varepsilon + \frac{3}{2} \eta \right) \eta_x + \frac{1}{2} \sigma \eta_{xxx} \right] \quad (2.2.5)$$

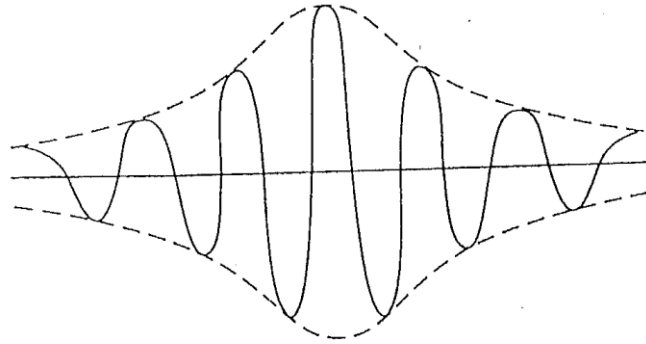
denklemini elde etmişlerdir. Bu denklem KdV denklemi olarak bilinir.

1955’de Fermi, Pasta ve Ulam’ın [7] Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamada ki gelişmeler devam etmiştir. 1914’de Debye iddia etti ki;“Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir.” Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam’ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu gerçek Fermi, Pasta ve Ulam’ın (FBU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

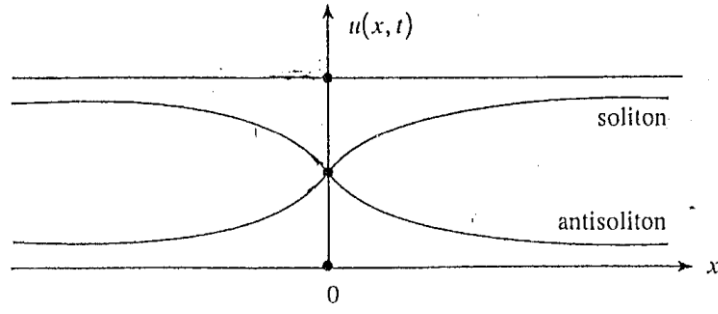
(FBU)’nun dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky’nin [6], tekrarlamının nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Kruskal ve Zabusky Bölüm (2.1) de bahsedildiği gibi bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır.

Daha sonra, Gardner ve diğerleri [12] ve Hirota [13-14] herhangi bir pozitif n tamsayısı için n-soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [15], Hammack ve Segur [16], Weidman ve Maxworthy [17] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdi benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metot geliştirilmiştir [18-19]. Son olarak aşağıdaki ifadeleri vermemiz uygun olacaktır. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle

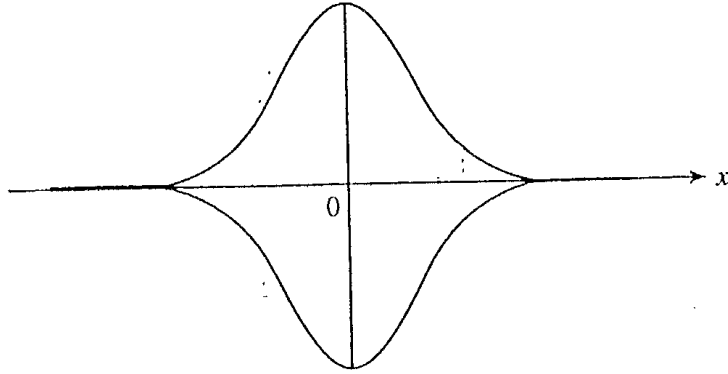
ilişkilendirilebilir. KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü (solitary-wave) genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminin başka denklemler için tek dalga çözümü sech^2 fonksiyonu olmayabilir, fakat sech veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Gerçekten de bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denklemi gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Gerçekten soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizm olarak şekil almıştır. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) [20]: plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını modellemek için kullanılır. NLS denklemi sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğu söylenmiştir [21-23]. Bir başka önemli model denklemi de Sine-Gordon denklemidir. Bu denklem de elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. SG denklemi ise soliton , antisoliton (veya kink, anti-kink) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.



Şekil 2.2.2. Bir sarmal (envelope) soliton



Şekil 2.2.3. Soliton veya antisoliton



Şekil 2.2.4. Aynı eksene göre simetrik solitonlar (Breather solitonları)

2.3. KOMPAKTONLAR

1993 yılının başında Rosenau ve Hyman [24], kompakt olarak adlandırılan kompakt destekli solitary dalgaların bir sınıfını verdi. Kompaktonlar, sonlu dalga uzunluğuna sahip veya üst üste gelmeyen solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir deyişle kompaktonlar, uçları sonsuza gitmeyen solitonlar olarak ifade edilir ve solitonların aksine bir kompaktın genişliği, genlikten bağımsızdır. Rosenau ve Hyman doğa olaylarında, solitary dalgalarının; nitelik olarak büyük değişikliklere neden olabilen lineer olmayan bir saçılmanın etkisi altında kompaktlaşabileceğini ispatladı. Kompaktonların esnek bir şekilde çarpıştığı ve daha sonra benzer bir şekilde tekrar ortaya çıktığı ispatlanmıştır. Sonlu bir merkez bölgenin dışında ortadan kaybolan solitary dalga çözümleri;

$$u_t + (u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad n > 1$$

olarak verilen lineer olmayan $K(n,n)$ saçılma denklemlerinin iki parametreye sahip ailesinin çözümleridir.

Daha önce verildiği gibi, solitonlar; zayıf lineer olmayanlık ile saçılma arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bununla birlikte, dalga saçılması tamamen lineer olmayan olduğu zaman bazı orijinal özellikler gözlenebilir. Lineer olmayan saçılmanın en ilgi çekici özelliği, sonlu dalga uzunluğuna sahip ve üst üste gelmeyen solitonlar olan kompaktınların varlığıdır.

Kompaktınlar, solitonların olağanüstü bir özelliği olan, diğer kompaktınlarla çarpışmadan sonra aynı şekil ile ortaya çıkma özellikli, solitary dalgaları olarak tanımlanır. Dalga saçılması tamamen lineer olmayan ise, bazı orijinal özelliklerin gözlemlenebildiği ve bu olağanüstü özelliklerden en kayda değer olanının kompaktınların varlığı olduğu [24]’ de verilmiştir. Şu ana kadar verilen kompaktın tanımları aşağıdaki gibidir:

- (i) Kompaktınlar, sonlu dalga uzunluğuna sahip solitonlardır.
- (ii) Kompaktınlar, kompakt destekli solitary dalgalarıdır.
- (iii) Kompaktınlar, üst üste gelmeyen solitonlardır.
- (iv) Kompaktınlar, solitonlara benzer dirençli solitonlardır.

Lineer olmayan $K(n,n)$ saçılma denklemleri , $a > 0$ için kompakt solitary yapıya sahip ve

$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xx} = 0, \quad a > 0, \quad n > 1 \quad (2.3.1)$$

formunda bir lineer olmayan KdV denklemi ailesidir. Kompakt yapıların kararlılığı ve varlığı [25] de incelenmiştir.

(2.3.1) denkleminde a ilave edilmesi ile elde edilen denklem odaklama kolu olarak adlandırılır. Bununla birlikte, [24] ve [26]’ da çalışılan ;

$$u_t - a(u^n)_x + (u^n)_{xx} = 0, \quad a > 0, \quad n > 1 \quad (2.3.2)$$

denkleminde defocusing branch denklemi denilir. (2.3.1) denklemi focusing branch denklemi olup, (2.3.1) ve (2.3.2) denklemlerinin her biri farklı fiziksel yapılara neden olan iki farklı model sunar. Kompaktınların bu önemli keşfi, son yıllardaki birçok önemli çalışmaya öncülük etmiştir. Kompaktın çalışması Hidrodinamik modellerdeki demetlerin performansı, akışkan damlalarının fizyonu ve eylemsiz füzyon gibi birçok bilimsel yöntemi anlayabilme imkanı verir.

Kompaktınlar hakkında daha fazla bilgi için [25-30] daki referanslara bakılabilir.

3.BÖLÜM

3.1. NONLINEAR DRINFEL' D – SOKOLOV (D(m,n)) DENKLEMİNİN YENİ ÇÖZÜMLERİ

$$\begin{cases} u_t + (v^m)_x = 0 \\ v_t + a(v^n)_{3x} + bu_x v + cuv_x = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

formundaki Drinfel'd-Sokolov (D(m,n)) denklemini göz önüne alalım, burada $a,b,c \in R$ dir. (3.1) denklemi, sıg su dalgalarını modellemek için kullanılan bir denklemdir. Inc [31] tarafından başlangıç şartlı (3.1) denkleminin Jakobi eliptik çözümleri Adomian ayrışım yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Xie ve Yan [32], (3.1) denkleminin kompaktan çözümlerini sine-cosine metodu kullanarak elde etmiştir. Pek çok analitik yöntem kullanılarak (3.1) denkleminin dalga çözümleri bulunmuş ve faz yörüngeleri çizilmiştir [33-35]. (3.1) sisteminin literatürde var olan ve yeni çözümlerini elde etmek istiyoruz.

Bunun için (3.1) denklemine

$$u(x,t) = U(\xi), \quad v(x,t) = V(\xi), \quad \xi = k(x - \lambda t), \quad k, \lambda \in R \quad (3.2)$$

şeklindeki dönüşümleri uygularsak,

$$\begin{cases} \lambda U' - (V^m)' = 0, \\ -\lambda V' + ak^2(V^n)''' + bUV' + cUV' = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

formunda ki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir, burada a,b,c,m ve n parametrelerdir.

(3.3) deki ilk denklemin integralini alırsak;

$$U = \frac{1}{\lambda} V^m + C, \quad (3.4)$$

bulunur, burada C integral sabitidir. (3.4) denklemini (3.3) sisteminde kullanır ve her iki tarafı bir kez integre edersek C_0 integral sabiti olmak üzere,

$$(cC - \lambda)V + ak^2(V^n)'' + \frac{bm + c}{\lambda(m+1)}V^{(m+1)} = C_0, \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada cebirsel işlemlerin daha kolay olması için C_0 integral sabitini sıfır alalım.

(3.5) denkleminin Jakobi eliptik çözümlerini elde etmek için aşağıdaki bağıntıyı kullanacağız,

$$V(\xi) = Asn^\beta(B\xi, \ell) \quad (3.6)$$

burada A ve B belirlenecek sabitler, ℓ , Jakobi eliptik fonksiyonun modülüdür.

(3.6) bağıntısından gerekli türevler alınırsa;

$$V(\xi) = Asn^\beta(B\xi, \ell),$$

$$V^n(\xi) = A^n sn^{n\beta}(B\xi, \ell),$$

$$(V^n(\xi))' = BA^n n\beta cn(B\xi, \ell) dn(B\xi, \ell) sn^{n\beta-1}(B\xi, \ell),$$

$$(V^n(\xi))'' = B^2 A^n (n\beta - 1) n\beta sn^{n\beta-2}(B\xi, \ell) - B^2 A^n n\beta [(n\beta - 1)(1 + \ell^2) + (\ell + 1)] sn^{n\beta}(B\xi, \ell) \\ + B^2 A^n n\beta [\ell^2 (n\beta - 1) + \ell(\ell + 1)] sn^{n\beta+2}(B\xi, \ell),$$

(3.7)

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerlerini (3.5) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$(cC - \lambda) Asn^\beta(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 n\beta (n\beta - 1) A^n sn^{n\beta-2}(B\xi, \ell) - ak^2 B^2 A^n n\beta \\ \left[(n\beta - 1)(1 + \ell^2) + (1 + \ell) \right] sn^{n\beta}(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 A^n n\beta \left[\ell^2 (n\beta - 1) + \ell(\ell + 1) \right] sn^{n\beta+2}(B\xi, \ell) \\ + \frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} sn^{\beta(m+1)}(B\xi, \ell) = 0, \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) denklemini için iki farklı durum söz konusudur. Bunlar aşağıdaki durumlardır.

Durum 1: $\beta = n\beta - 2, \quad n \neq 1$

$$n\beta = (m + 1)\beta,$$

$$(cC - \lambda)A + ak^2 B^2 n\beta (n\beta - 1) A^n = 0,$$

$$\frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} - ak^2 B^2 A^n n\beta \left[(n\beta - 1)(1 + \ell^2) + (\ell + 1) \right] = 0, \quad (3.9)$$

Durum 2: $\beta = n\beta, \quad n = 1,$

$$\beta(m + 1) = \beta - 2,$$

$$(cC - \lambda)A - ak^2 B^2 A^n n\beta \left[(n\beta - 1)(1 + \ell^2) + (\ell + 1) \right] = 0,$$

$$\frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} + ak^2 B^2 n\beta (n\beta - 1) A^n = 0, \quad (3.10)$$

Yukarıdaki iki farklı durumun çözülmesiyle,

$$n = m + 1, \quad \beta = \frac{2}{n-1}, \quad A^{n-1} = \frac{\lambda(m+1)(\lambda - cC) \left[(2m+1)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}{(bm + c)(m + 2)},$$

$$k = \frac{m}{(m+1)B} \sqrt{\frac{(bm + c)}{2\lambda a \left[(2m+1)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}}, \quad (3.11)$$

$$n = 1, \quad \beta = -\frac{2}{m}, \quad A^{-m} = \frac{(bm + c) \left[(2 + m)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}{\lambda(\lambda - cC)(m + 1)(m + 2)},$$

$$k = \frac{m}{B} \sqrt{\frac{cC - \lambda}{2(m + 2)(1 + \ell^2) - 2m(1 + \ell)}}, \quad (3.12)$$

değerleri elde edilir.

Tip 1: $D(n-1, n)$ denkleminin kompakt çözümlerini bulmak için $n > 1$ olmak üzere (3.11) deki değerleri kullanırsak,

$$v_1(\xi) = \left[\frac{\lambda(m+1)(\lambda - cC) \left[(2m+1)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}{(bm + c)(m + 2)} \times \right.$$

$$\left. \operatorname{sn}^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{\frac{(bm + c)}{2\lambda a \left[(2m+1)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.13)$$

$$u_1(\xi) = \left[\frac{(m+1)(\lambda - cC) \left[(2m+1)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}{(bm + c)(m + 2)} \times \right.$$

$$\left. \operatorname{sn}^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{\frac{(bm + c)}{2\lambda a \left[(2m+1)(1 + \ell^2) + m(1 + \ell) \right]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.14)$$

Jakobi eliptik çözümleri elde edilir. (3.13) ve (3.14) çözümlerinde eliptik fonksiyonların modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için alırsak;

$$v_{1,1}(\xi) = \left[\frac{\lambda(m+1)(\lambda - cC)[(3m+1)]}{(bm+c)(m+2)} \times \sin^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(3m+1)]}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.15)$$

$$u_{1,1}(\xi) = \left[\frac{(m+1)(\lambda - cC)[(3m+1)]}{(bm+c)(m+2)} \times \sin^2 \left(\frac{m}{(m+1)B} \sqrt{\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(3m+1)]}} (x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.16)$$

$$v_{1,2}(\xi) = \left[\frac{\lambda(m+1)(\lambda - cC)[(6m+2)]}{(bm+c)(m+2)} \times \tanh^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(6m+2)]}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.17)$$

$$u_{1,2}(\xi) = \left[\frac{(m+1)(\lambda - cC)[(6m+2)]}{(bm+c)(m+2)} \times \tanh^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(6m+2)]}} (x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.18)$$

sırasıyla, formundaki kompakt ve soliton çözümleri bulunur.

Tip 2: $D(m,1)$ denkleminin kompakt çözümlerini bulmak için $m < 0$ olmak üzere, (3.12) denklemini kullanırsak,

$$v_2(\xi) = \left[\frac{(bm+c)[(m+2)(1+\ell^2) - m(1+\ell)]}{\lambda(\lambda - cC)(m+1)(m+2)} \times \operatorname{sn}^2 \left(m \sqrt{\frac{(cC - \lambda)}{2[(2+m)(1+\ell^2) - m(1+\ell)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.19)$$

$$u_2(\xi) = \left[\frac{(bm+c) \left[(m+2)(1+\ell^2) - m(1+\ell) \right]}{\lambda^2(\lambda-cC)(m+1)(m+2)} \times \right. \\ \left. sn^2 \left(m \sqrt{\frac{(cC-\lambda)}{2 \left[(2+m)(1+\ell^2) - m(1+\ell) \right]}} (x-\lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.20)$$

formundaki yeni Jakobi eliptik çözümleri elde edilir. (3.19) ve (3.20) çözümlerinde modülü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için alırsak;

$$v_{2,1}(\xi) = \left[\frac{2(bm+c)}{\lambda(\lambda-cC)(m+1)(m+2)} \times \sin^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{(cC-\lambda)} (x-\lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.21)$$

$$u_{2,1}(\xi) = \left[\frac{2(bm+c)}{\lambda^2(\lambda-cC)(m+1)(m+2)} \times \sin^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{(cC-\lambda)} (x-\lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.22)$$

$$v_{2,2}(\xi) = \left[\frac{4(bm+c)}{\lambda(\lambda-cC)(m+1)(m+2)} \times \tanh^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{\frac{(cC-\lambda)}{2}} (x-\lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.23)$$

$$u_{2,2}(\xi) = \left[\frac{4(bm+c)}{\lambda^2(\lambda-cC)(m+1)(m+2)} \times \tanh^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{\frac{(cC-\lambda)}{2}} (x-\lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.24)$$

kompakton ve soliton çözümleri bulunur.

(3.5) denkleminin ikinci tip eliptik çözümlerini elde etmek için

$$V(\xi) = A c n^\beta(B\xi, \ell) \quad (3.25)$$

bağıntısını kullanacağız. (3.25) bağıntısından (3.5) denklemi için gerekli türevleri

$$\begin{aligned} V(\xi) &= A c n^\beta(B\xi, \ell), \\ V^n(\xi) &= A^n c n^{n\beta}(B\xi, \ell), \\ (V^n(\xi))' &= -B A^n n \beta dn(B\xi, \ell) sn(B\xi, \ell) cn^{n\beta-1}(B\xi, \ell), \\ (V^n(\xi))'' &= B^2 A^n (n\beta-1) n \beta (1-\ell^2) cn^{n\beta-2}(B\xi, \ell) + B^2 A^n n \beta [(\ell^2 + \ell - 1 + (n\beta-1)(2\ell^2-1))] \\ &\quad cn^{n\beta}(B\xi, \ell) - B^2 A^n n \beta \ell [\ell + 1 + \ell(n\beta-1)] cn^{n\beta+2}(B\xi, \ell), \end{aligned} \quad (3.26)$$

bulunur. Bulunan bu türev değerlerini (3.5) denkleminde yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned} & (cC - \lambda)A c n^{\beta}(B\xi, \ell) + a k^2 B^2 A^n (n\beta - 1) n \beta (1 - \ell^2) c n^{n\beta-2}(B\xi, \ell) + a k^2 B^2 A^n n \beta \times \\ & [(\ell^2 + \ell + 1) + (n\beta - 1)(2\ell^2 - 1)] c n^{n\beta}(B\xi, \ell) - a k^2 B^2 A^n n \beta \ell [(1 + \ell) + \ell(n\beta - 1)] c n^{n\beta+2}(B\xi, \ell) \\ & + \frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} c n^{\beta(m+1)}(B\xi, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) denklemi için de iki farklı durum söz konusudur. Bunlar aşağıdaki durumlardır.

Durum 1: $n\beta = \beta(m + 1)$, $n \neq 1$

$$\beta = n\beta - 2,$$

$$(cC - \lambda)A + a k^2 B^2 A^n (n\beta - 1) n \beta (1 - \ell^2) = 0,$$

$$a k^2 B^2 A^n n \beta [(\ell^2 + \ell - 1) + (n\beta - 1)(2\ell^2 - 1)] + \frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} = 0, \quad (3.28)$$

Durum 2: $\beta = n\beta$, $n = 1$

$$\beta(m + 1) = n\beta - 2,$$

$$(cC - \lambda)A + a k^2 B^2 A^n n \beta [(\ell^2 + \ell + 1) + (n\beta - 1)(2\ell^2 - 1)] = 0,$$

$$a k^2 B^2 A^n (n\beta - 1) n \beta (1 - \ell^2) + \frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} = 0, \quad (3.29)$$

Yukarıdaki iki farklı durumun çözülmesiyle,

$$n = m + 1, \quad \beta = \frac{2}{n - 1}, \quad A^{n-1} = \frac{\lambda(m + 1)(cC - \lambda)[m(\ell^2 + \ell - 1) + (m + 2)(2\ell^2 - 1)]}{(bm + c)(m + 2)(1 - \ell^2)},$$

$$k = \frac{m}{(m + 1)B} \sqrt{-\frac{(bm + c)}{2\lambda a [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m + 2)(2\ell^2 - 1)]}}, \quad (3.30)$$

$$n = 1, \quad \beta = -\frac{2}{m}, \quad A^{-m} = \frac{(bm + c)[m(\ell^2 + \ell - 1) + (m + 2)(2\ell^2 - 1)]}{\lambda(\lambda - cC)(m + 2)(1 - \ell^2)},$$

$$k = \frac{m}{B} \sqrt{\frac{\lambda - cC}{2a [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m + 2)(2\ell^2 - 1)]}}, \quad (3.31)$$

değerleri elde edilir.

Tip 1: $D(n-1, n)$ denkleminin kompakt çözümlerini bulmak için $n > 1$ olmak üzere (3.30) denklemindeki değerleri kullanırsak;

$$v_3(\xi) = \left[\frac{\lambda(m+1)(cC - \lambda) [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}{(bm+c)(m+2)(1-\ell^2)} \times \right. \\ \left. cn^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.32)$$

$$u_3(\xi) = \left[\frac{(m+1)(cC - \lambda) [m(\ell^2 + \ell - 1) + 2(m+1)(2\ell^2 - 1)]}{(bm+c)(m+2)(1-\ell^2)} \times \right. \\ \left. cn^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.33)$$

yeni Jakobi eliptik çözümleri bulunur. (3.32) ve (3.33) çözümlerinde modülü $\ell \rightarrow 0$ için alırsak;

$$v_{3,1}(\xi) = \left[\frac{2\lambda(m+1)^2(\lambda - cC)}{(bm+c)(m+2)} \times \cos^2 \left(\frac{m}{2(m+1)} \sqrt{\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.34)$$

$$u_{3,1}(\xi) = \left[\frac{2(m+1)^2(\lambda - cC)}{(bm+c)(m+2)} \times \cos^2 \left(\frac{m}{2(m+1)} \sqrt{\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.35)$$

kompakt çözümleri elde edilir. Aynı çözümlerde modülü $\ell \rightarrow 1$ için alırsak;

$$v_{3,2}(\xi) \rightarrow \infty \text{ ve } u_{3,2} \rightarrow C, \quad (3.36)$$

bulunur.

Tip 2: $D(m, 1)$ denkleminin kompakt çözümünü bulmak için $m < 0$ için (3.31) değerlerini kullanırsak;

$$v_4(\xi) = \left[\frac{(bm+c) [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}{\lambda(\lambda - cC)(m+2)(1 - \ell^2)} \times \right. \\ \left. cn^2 \left(m \sqrt{\frac{\lambda - cC}{2a [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.37)$$

$$u_4(\xi) = \left[\frac{(bm+c) [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}{\lambda^2(\lambda - cC)(m+2)(1 - \ell^2)} \times \right. \\ \left. cn^2 \left(m \sqrt{\frac{\lambda - cC}{2a [m(\ell^2 + \ell - 1) + (m+2)(2\ell^2 - 1)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.38)$$

şeklindeki ikinci tip Jakobi eliptik çözümleri bulunur.

(3.37)ve (3.38) çözümlerinde eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ için alırsak;

$$v_{4,1}(\xi) = \left[\frac{-2(m+1)(bm+c)}{\lambda^2(\lambda - cC)(m+2)} \times \cos^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{\frac{cC - \lambda}{a}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.39)$$

ve

$$u_{4,1}(\xi) = \left[\frac{-2(m+1)(bm+c)}{\lambda^2(\lambda - cC)(m+2)} \times \cos^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{\frac{cC - \lambda}{a}} (x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.40)$$

kompakton çözümleri elde edilir.

Aynı çözümlerde modülü $\ell \rightarrow 1$ için alırsak;

$$v_{4,2}(\xi) \rightarrow \infty \text{ ve } u_{4,2} \rightarrow C, \quad (3.41)$$

bulunur.

(3.5) denkleminin farklı bir Jakobi eliptik çözümlerini elde etmek için aşağıdaki bağıntıyı kullanır ve

$$V(\xi) = Asc^\beta(B\xi, \ell) \quad (3.42)$$

gerekli türevleri alırsak;

$$\begin{aligned}
V(\xi) &= Asc^\beta(B\xi, \ell), \\
V^n(\xi) &= A^n sc^{n\beta}(B\xi, \ell), \\
(V^n(\xi))' &= BA^n n\beta dc(B\xi, \ell) nc(B\xi, \ell) sc^{n\beta-1}(B\xi, \ell), \\
(V^n(\xi))'' &= B^2 A^n n\beta(n\beta-1) sc^{n\beta-2}(B\xi, \ell) + B^2 A^n n\beta[(n\beta-1)(2-\ell^2) + 2 - \ell] sc^{n\beta}(B\xi, \ell) + \\
&\quad B^2 A^n (n\beta)^2 (1 - \ell^2) sc^{n\beta+2}(B\xi, \ell), \tag{3.43}
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu türev değerlerini (3.5) denkleminde yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
&(cC - \lambda)Asc^\beta(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 A^n n\beta(n\beta-1) sc^{n\beta-2}(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 A^n n\beta \\
&\quad [(n\beta-1)(2-\ell^2) + (2-\ell)] sc^{n\beta}(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 A^n (n\beta)^2 (1 - \ell^2) sc^{n\beta+2}(B\xi, \ell) \tag{3.44} \\
&\quad + \frac{bm+c}{\lambda(m+1)} A^{m+1} sc^{\beta(m+1)}(b\xi, \ell) = 0
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (3.44) denkleminde ise aşağıdaki farklı iki durum söz konusudur.

Durum 1: $\beta = n\beta - 2, \quad n \neq 1$

$$\begin{aligned}
n\beta &= (m+1)\beta, \\
(cC - \lambda)A + ak^2 B^2 n\beta(n\beta-1)A^n &= 0, \\
\frac{bm+c}{\lambda(m+1)} A^{m+1} + ak^2 B^2 A^n n\beta[(n\beta-1)(2-\ell^2) + 2 - \ell] &= 0. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Durum 2: $\beta = n\beta, \quad n = 1,$

$$\begin{aligned}
\beta(m+1) &= n\beta - 2, \\
(cC - \lambda)A + ak^2 B^2 A^n n\beta[(n\beta-1)(2-\ell^2) + 2 - \ell] &= 0, \\
\frac{bm+c}{\lambda(m+1)} A^{m+1} + ak^2 B^2 A^n n\beta(n\beta-1) &= 0. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

(3.45) ve (3.46) cebirsel denklemlerini çözersek;

$$\begin{aligned}
n = m+1, \quad \beta &= \frac{2}{n-1}, \quad A^{n-1} = \frac{\lambda(m+1)(cC - \lambda)[(m+2)(2-\ell^2) + m(2-\ell)]}{(bm+c)(m+2)}, \\
k &= \frac{m}{(m+1)B} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(m+2)(2-\ell^2) + m(2-\ell)]}}, \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Ve

$$n=1, \quad \beta = -\frac{2}{m}, \quad A^{-m} = \frac{(bm+c)[(m+2)(2-\ell^2)-m(2-\ell)]}{\lambda(m+1)(cC-\lambda)(m+2)},$$

$$k = \frac{m}{B} \sqrt{\frac{\lambda - cC}{2[(m+2)(2-\ell^2)-m(2-\ell)]}}, \quad (3.48)$$

değerleri elde edilir.

Tip 1: $D(n-1, n)$ denkleminin kompakt çözümlerini bulmak için (3.47) bağıntısındaki değerleri kullanırsak aşağıdaki yeni tip Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunur.

$$v_5(\xi) = \left[\frac{\lambda(m+1)(cC-\lambda)[(m+2)(2-\ell^2)+m(2-\ell)]}{(bm+c)(m+2)} \times \right. \\ \left. sc^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(m+2)(2-\ell^2)+m(2-\ell)]}} (x-\lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.49)$$

$$u_5(\xi) = \left[\frac{(m+1)(cC-\lambda)[(m+2)(2-\ell^2)+m(2-\ell)]}{(bm+c)(m+2)} \times \right. \\ \left. sc^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a[(m+2)(2-\ell^2)+m(2-\ell)]}} (x-\lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.50)$$

Yukarıdaki (3.49) ve (3.50) çözümlerinde eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için göz önüne alırsak,

$$v_{5,1}(\xi) = \left[\frac{4\lambda(m+1)^2(cC-\lambda)}{(bm+c)(m+2)} \times \tan^2 \left(\frac{m}{2\sqrt{2}(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x-\lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.51)$$

$$u_{5,1}(\xi) = \left[\frac{4(m+1)^2(cC-\lambda)}{(bm+c)(m+2)} \times \tan^2 \left(\frac{m}{2\sqrt{2}(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x-\lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.52)$$

$$v_{5,2}(\xi) = \left[\frac{2\lambda(m+1)^2(cC-\lambda)}{(bm+c)(m+2)} \times \sinh^2 \left(\frac{m}{2(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x-\lambda t), 1 \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.53)$$

$$u_{5,2}(\xi) = \left[\frac{2(m+1)^2(cC - \lambda)}{(bm+c)(m+2)} \times \sinh^2 \left(\frac{m}{2(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}}(x - \lambda t), 1 \right) \right] + C, \quad (3.54)$$

sırasıyla, soliton ve solitary pattern çözümleri bulunur.

Tip 2: $D(m,1)$ denkleminin $m < 0$ için yeni tip Jakobi eliptik çözümlerini elde etmek için (3.48) deki değerleri kullanırsak,

$$v_6(\xi) = \left[\frac{(bm+c)[(m+2)(2-\ell^2) - m(2-\ell)]}{\lambda(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \right. \\ \left. sc^2 \left(m \sqrt{\frac{\lambda - cC}{2(m+2)(2-\ell^2) - m(2-\ell)}}(x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.55)$$

$$u_6(\xi) = \left[\frac{(bm+c)[(m+2)(2-\ell^2) - m(2-\ell)]}{\lambda^2(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \right. \\ \left. sc^2 \left(m \sqrt{\frac{\lambda - cC}{2(m+2)(2-\ell^2) - m(2-\ell)}}(x - \lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.55) ve (3.56) çözümlerinde modülü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için göz önüne alırsak,

$$v_{6,1}(\xi) = \left[\frac{4(bm+c)}{\lambda(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \tan^2 \left(\frac{m}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\lambda - cC)}(x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.57)$$

$$u_{6,1}(\xi) = \left[\frac{4(bm+c)}{\lambda^2(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \tan^2 \left(\frac{m}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\lambda - cC)}(x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.58)$$

$$v_{6,2}(\xi) = \left[\frac{2(bm+c)}{\lambda(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \sinh^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{(\lambda - cC)}(x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.59)$$

$$u_{6,2}(\xi) = \left[\frac{2(bm+c)}{\lambda^2(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \sinh^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{(\lambda - cC)}(x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.60)$$

çözümleri bulunur.

(3.5) denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümlerini elde etmek için aşağıdaki bağıntıyı kullanacağız,

$$V(\xi) = Anc^\beta(B\xi, \ell) \quad (3.61)$$

(3.61) bağıntısından gerekli türevler alınır;

$$V(\xi) = Anc^\beta(B\xi, \ell),$$

$$V^n(\xi) = A^n nc^{n\beta}(B\xi, \ell),$$

$$(V^n(\xi))' = BA^n n\beta dc(B\xi, \ell) sc(B\xi, \ell) nc^{n\beta-1}(B\xi, \ell),$$

$$\begin{aligned} (V^n(\xi))'' &= -B^2 A^n n\beta \ell^2 (n\beta - 1) nc^{n\beta-2}(B\xi, \ell) + B^2 A^n n\beta [(n\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell)] nc^{n\beta}(B\xi, \ell) + \\ &B^2 A^n n\beta [n\beta(1 - \ell^2) + 1 - \ell] nc^{n\beta+2}(B\xi, \ell), \end{aligned} \quad (3.62)$$

bulunur. Bulunan bu türev değerlerini (3.5) denkleminde yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned} &(cC - \lambda)Anc^\beta(B\xi, \ell) - ak^2 B^2 A^n n\beta(n\beta - 1)\ell^2 nc^{n\beta-2}(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 A^n n\beta \\ &[n\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell] nc^{n\beta}(B\xi, \ell) + ak^2 B^2 A^n n\beta [n\beta(1 - \ell^2) + 1 - \ell] nc^{n\beta+2}(B\xi, \ell) \\ &+ \frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} nc^{\beta(m+1)}(b\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

denklemini elde edilir. (3.63) denkleminde ise farklı iki durum ortaya çıkar. Bunlar

Durum 1: $\beta = n\beta - 2, \quad n \neq 1$

$$n\beta = (m + 1)\beta,$$

$$(cC - \lambda)A - ak^2 B^2 A^n n\beta(n\beta - 1)\ell^2 = 0,$$

$$\frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} + ak^2 B^2 A^n n\beta [n\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell] = 0. \quad (3.64)$$

Durum 2: $\beta = n\beta, \quad n = 1,$

$$\beta(m + 1) = n\beta - 2,$$

$$(cC - \lambda)A + ak^2 B^2 A^n n\beta [n\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell] = 0,$$

$$\frac{bm + c}{\lambda(m + 1)} A^{m+1} - ak^2 B^2 A^n n\beta(n\beta - 1)\ell^2 = 0. \quad (3.65)$$

şeklindedir. (3.64) ve (3.65) cebirsel denklemlerini çözersek,

$$n = m + 1, \quad \beta = \frac{2}{n-1}, \quad A^{n-1} = \frac{\lambda(m+1)(\lambda - cC) [2(m+1)(2\ell^2 - 1) + m(\ell - \ell^2)]}{(bm+c)(m+2)\ell^2},$$

$$k = \frac{m}{(m+1)B} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a [2(m+1)(2\ell^2 - 1) + m(\ell - \ell^2)]}}, \quad (3.66)$$

$$n = 1, \quad \beta = -\frac{2}{m}, \quad A^{-m} = \frac{(bm+c) [2(1-2\ell^2) + m(\ell - \ell^2)]}{\lambda(m+1)(cC - \lambda)(m+2)\ell^2},$$

$$k = \frac{m}{B} \sqrt{\frac{(cC - \lambda)}{2a [2(1-2\ell^2) + m(\ell - \ell^2)]}}, \quad (3.67)$$

değerleri bulunur.

Tip 1: $D(n-1, n)$ denkleminin yeni tip Jakobi eliptik ve kompakton çözümlerini bulmak için $(m < 0)$ (3.66) da ki değerleri (3.61) denkleminde yerine yazarsak,

$$v_7(\xi) = \left[\frac{(m+1)(\lambda - cC) [2(m+1)(2\ell^2 - 1) + m(\ell - \ell^2)]}{(bm+c)(m+2)\ell^2} \right] \times$$

$$nc^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a [2(m+1)(2\ell^2 - 1) + m(\ell - \ell^2)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \Bigg]^{1/(n-1)}, \quad (3.68)$$

$$u_7(\xi) = \left[\frac{(m+1)(\lambda - cC) [2(m+1)(2\ell^2 - 1) + m(\ell - \ell^2)]}{(bm+c)(m+2)\ell^2} \right] \times$$

$$nc^2 \left(\frac{m}{(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{2\lambda a [2(m+1)(2\ell^2 - 1) + m(\ell - \ell^2)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \Bigg] + C, \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.68) ve (3.69) çözümlerinde eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için göz önüne alırsak.

$$v_{7,1} \rightarrow \infty \quad \text{ve} \quad u_{7,1} \rightarrow C, \quad (3.70)$$

ve

$$v_{7,2}(\xi) = \left[\frac{2\lambda(m+1)^2(\lambda - cC)}{(bm+c)(m+2)} \times \cosh^2 \left(\frac{m}{2(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(n-1)}}, \quad (3.71)$$

$$u_{7,2}(\xi) = \left[\frac{2(m+1)^2(\lambda - cC)}{(bm+c)(m+2)} \times \cosh^2 \left(\frac{m}{2(m+1)} \sqrt{-\frac{(bm+c)}{\lambda a(m+1)}} (x - \lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.72)$$

solitary pattern çözümleri bulunur.

Tip 2: $D(m,1)$ denkleminin yeni çözümlerini elde etmek için (3.67) ifadesindeki değerleri (3.61) denkleminde yerine yazarsak,

$$v_8 = \left[\frac{(bm+c)[2(1-2\ell^2) + m(\ell - \ell^2)]}{\lambda(m+1)(cC - \lambda)(m+2)\ell^2} \times \right. \\ \left. nc^2 \left(m \sqrt{\frac{(cC - \lambda)}{2a[2(1-2\ell^2) + m(\ell - \ell^2)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.73)$$

$$u_8 = \left[\frac{(bm+c)[2(1-2\ell^2) + m(\ell - \ell^2)]}{\lambda^2(m+1)(cC - \lambda)(m+2)\ell^2} \times \right. \\ \left. nc^2 \left(m \sqrt{\frac{(cC - \lambda)}{2a[2(1-2\ell^2) + m(\ell - \ell^2)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right] + C, \quad (3.74)$$

formundaki yeni tip Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunur. (3.73) ve (3.74) çözümlerinde modülü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için ele alırsak, sırasıyla,

$$v_{8,1} \rightarrow \infty \text{ ve } u_{8,1} \rightarrow C, \quad (3.75)$$

$$v_{8,2} = \left[\frac{-2(bm+c)}{\lambda(m+1)(cC - \lambda)(m+2)} \times \cosh^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - cC)}{a}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (3.76)$$

$$u_{8,2} = \left[\frac{-2(bm+c)}{\lambda^2(m+1)(cC-\lambda)(m+2)} \times \cosh^2 \left(\frac{m}{2} \sqrt{\frac{(\lambda-cC)}{a}} (x-\lambda t) \right) \right] + C, \quad (3.77)$$

çözümleri bulunur.

Hatırlatma 1. D(m,n) denkleminin (3.15) ve (3.16), (3.21), (3.22), (3.34), (3.35), (3.39), (3.40), (3.71) ve (3.72) çözümleri Xie ve Yan [32] tarafından elde edilen çözümlere benzer olup, diğer çözümler bu çalışmada elde edilmiştir.

4.BÖLÜM

4.1 R(m,n) Denkleminin Soliton Çözümleri

Regüle edilmiş uzun dalga denklemi (RLW) [36-37],

$$u_t + au_x - 6uu_x + bu_{xxt} = 0, \quad (4.1)$$

formunda olup, bizim bu çalışmada kullandığımız $R(m,n)$ denklemi RLW denkleminden türetilmiştir. RLW denklemi KdV denklemine alternatif bir model denklemdir ve küçük genliklere sahip sıg su dalgalarını modellemek için kullanılır.

Bu bölümde,

$$R(m,n): u_{tt} + a(u^n)_{xx} + b(u^m)_{xxt} = 0, \quad m, n > 1 \quad (4.2)$$

formundaki $R(m,n)$ denkleminin soliton çözümlerini bulmaya çalışacağız. Bunun için (4.2) denkleminde

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - \lambda t, \quad \lambda \in R,$$

dönüşümünü uygularsak,

$$\lambda^2 u'' + a(u^n)'' + b\lambda^2 (u^m)''' = 0, \quad (4.3)$$

adi diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklemin her iki tarafını iki kez integre eder ve integral sabitlerini sıfır alırsak,

$$\lambda^2 u + a(u^n) + b\lambda^2 (u^m)'' = 0, \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.2) denkleminin (3.6) formundaki çözümünü elde etmek için (3.7) türevlerini (4.4) denkleminde kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \lambda^2 A sn^\beta(B\xi, \ell) + aA^n sn^{n\beta}(B\xi, \ell) + b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta sn^{m\beta-2}(B\xi, \ell) - \\ & b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [(m\beta - 1)(1 + \ell^2) + (1 + \ell)] sn^{m\beta}(B\xi, \ell) + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta \\ & [\ell^2 (m\beta - 1) + \ell(1 + \ell)] sn^{m\beta+2}(B\xi, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur. (4.5) denklemi için iki farklı durum söz konusudur. Bunlar,

Durum 1: $\beta = m\beta - 2$,

$$n\beta = m\beta,$$

$$\lambda^2 A + b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta = 0,$$

$$aA^n - b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [(m\beta - 1)(1 + \ell^2) + (1 + \ell)] = 0, \quad (4.6)$$

Durum 2: $\beta = m\beta$,

$$n\beta = m\beta - 2,$$

$$\lambda^2 A - b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [(m\beta - 1)(1 + \ell^2) + (1 + \ell)] = 0,$$

$$aA^n + b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta = 0, \quad (4.7)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki (4.6) ve (4.7) cebirsel denklem sistemlerini çözersek,

$$n = m, \quad \beta = \frac{2}{m-1}, \quad A^{m-1} = -\frac{\lambda^2 [m(1 + \ell^2) + (m-1)(1 + \ell)]}{a(m+1)},$$

$$B = \frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{2mb[m(1 + \ell^2) + (m-1)(1 + \ell)]}}, \quad (4.8)$$

$$m = 1, \quad \beta = \frac{2}{1-n}, \quad A^{1-n} = -\frac{a[(n+1)(1 + \ell^2) + (1-n)(1 + \ell)]}{\lambda^2(n+1)},$$

$$B = (1-n) \sqrt{\frac{1}{2b[(n+1)(1 + \ell^2) + (1-n)(1 + \ell)]}}, \quad (4.9)$$

elde edilir.

Tip 1: $m = n \neq 1$ olmak üzere $R(m, m)$ denkleminin kompakt çözümlerini bulmak için (4.8) değerlerini (3.6) ifadesinde yerine yazarsak,

$$u_1(\xi) = \left[-\frac{\lambda^2 [m(1 + \ell^2) + (m-1)(1 + \ell)]}{a(m+1)} \times \right. \\ \left. sn^2 \left(\frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{2mb[m(1 + \ell^2) + (m-1)(1 + \ell)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.10)$$

formunda ki Jakobi eliptik fonksiyon çözümü bulunur. Bu çözümde eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için ele alırsak, sırasıyla,

$$u_{1,1}(\xi) = \left[-\frac{\lambda^2(2m-1)}{a(m+1)} \times \sin^2 \left(\frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{2mb(2m-1)}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.11)$$

$$u_{1,2}(\xi) = \left[-\frac{\lambda^2(4m-2)}{a(m+1)} \times \tanh^2 \left(\frac{(m-1)}{2\lambda} \sqrt{\frac{a}{mb(2m-1)}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.12)$$

kompakton ve periyodik dalga çözümü elde edilir.

Tip 2: $n > 1$ olmak üzere $R(1, n)$ denkleminin kompakton çözümü için (4.9) değerlerini (3.6) denkleminin çözümünde kullanırsak,

$$u_2 = \left[-\frac{a[(n+1)(1+\ell^2) + (1-n)(1+\ell)]}{\lambda^2(n+1)} \times \right. \\ \left. \sin^2 \left((1-n) \sqrt{\frac{1}{2b[(n+1)(1+\ell^2) + (1-n)(1+\ell)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.13)$$

yeni tip Jakobi eliptik çözümü bulunur. Bu çözümde modülü sırasıyla $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için alırsak,

$$u_{2,1} = \left[-\frac{2a}{\lambda^2(n+1)} \times \sin^2 \left(\frac{(1-n)}{2} \sqrt{\frac{1}{b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.14)$$

$$u_{2,2} = \left[-\frac{4a}{\lambda^2(n+1)} \times \tanh^2 \left(\frac{(1-n)}{2} \sqrt{\frac{1}{2b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.15)$$

bulunur.

$R(m, n)$ denkleminin (3.25) formundaki çözümlerini bulmak için (3.26) türevlerini (4.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(\xi) = A c n^\beta(B\xi, \ell),$$

$$u^n(\xi) = A^n c n^{n\beta}(B\xi, \ell),$$

$$(u^m(\xi))'' = B^2 A^m (m\beta - 1) m\beta (1 - \ell^2) c n^{m\beta-2}(B\xi, \ell) + B^2 A^m m\beta [\ell^2 + \ell - 1 + (m\beta - 1)(2\ell^2 - 1)] c n^{m\beta}(B\xi, \ell) \\ - B^2 A^m n\beta \ell [\ell + 1 + \ell(m\beta - 1)] c n^{m\beta+2}(B\xi, \ell), \quad (4.16)$$

bulunur. Burada aşağıdaki gibi iki farklı durum vardır.

Durum1: $\beta = m\beta - 2$,

$$n\beta = m\beta,$$

$$\lambda^2 A + b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta(1 - \ell^2) = 0,$$

$$aA^n + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [\ell^2 + \ell - 1 + (m\beta - 1)(2\ell^2 - 1)] = 0, \quad (4.17)$$

Durum2: $\beta = m\beta$,

$$n\beta = m\beta - 2,$$

$$\lambda^2 A + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [\ell^2 + \ell - 1 + (m\beta - 1)(2\ell^2 - 1)] = 0,$$

$$aA^n + b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta(1 - \ell^2) = 0, \quad (4.18)$$

(4.17) ve (4.18) cebirsel denklemlerini çözersek,

$$n = m, \quad \beta = \frac{2}{m-1}, \quad A^{m-1} = \frac{\lambda^2 [(\ell^2 + \ell - 1)(m-1) + (m+1)(2\ell^2 - 1)]}{a(m+1)(1 - \ell^2)},$$

$$B = \frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2mb [(\ell^2 + \ell - 1)(m-1) + (m+1)(2\ell^2 - 1)]}}, \quad (4.19)$$

$$m = 1, \quad \beta = \frac{2}{1-n}, \quad A^{1-n} = \frac{a [(\ell^2 + \ell - 1)(1-n) + (n+1)(2\ell^2 - 1)]}{\lambda^2 (n+1)(1 - \ell^2)},$$

$$B = (1-n) \sqrt{\frac{1}{-2b [(\ell^2 + \ell - 1)(1-n) + (n+1)(2\ell^2 - 1)]}}, \quad (4.20)$$

değerleri elde edilir. (4.19) ve (4.20) ifadelerini sırasıyla, (3.25) çözümünde yerine yazarsak,

$$u_3(\xi) = \left[\frac{\lambda^2 [(\ell^2 + \ell - 1)(m-1) + (m+1)(2\ell^2 - 1)]}{a(m+1)(1 - \ell^2)} \times \right.$$

$$\left. cn^2 \left(\frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2mb [(\ell^2 + \ell - 1)(m-1) + (m+1)(2\ell^2 - 1)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.21)$$

ve

$$u_4(\xi) = \left[\frac{a[(\ell^2 + \ell - 1)(1 - n) + (n + 1)(2\ell^2 - 1)]}{\lambda^2(n + 1)(1 - \ell^2)} \times \right. \\ \left. cn^2 \left((1 - n) \sqrt{\frac{1}{-2b[(\ell^2 + \ell - 1)(1 - n) + (n + 1)(2\ell^2 - 1)]}}(x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.22)$$

şeklindeki yeni tip Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunur. Bu çözümlerde modülü $\ell \rightarrow 0$ için göz önüne alırsak,

$$u_{3,1}(\xi) = \left[\frac{-2m\lambda^2}{a(m + 1)} \times \cos^2 \left(\frac{(m - 1)}{2m\lambda} \sqrt{\frac{a}{b}}(x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.23)$$

$$u_{4,1}(\xi) = \left[\frac{-2a}{\lambda^2(n + 1)} \times \cos^2 \left(\frac{(1 - n)}{2} \sqrt{\frac{1}{b}}(x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.24)$$

kompakt çözümleri elde edilir.

$\ell \rightarrow 1$ için de,

$$u_{3,2}(\xi) \rightarrow \infty \text{ ve } u_{4,2}(\xi) \rightarrow \infty \text{ olur.} \quad (4.25)$$

$R(m, n)$ denkleminin (3.42) formundaki çözümlerini elde etmek için (3.43) türevlerini (4.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$\lambda^2 Asc^\beta(B\xi, \ell) + aA^n sc^{n\beta}(B\xi, \ell) + b\lambda^2 B^2 A^m(m\beta - 1)m\beta sc^{m\beta-2}(B\xi, \ell) + \\ + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [(m\beta - 1)(2 - \ell^2) + 2 - \ell] sc^{m\beta}(B\xi, \ell) + b\lambda^2 B^2 A^m(m\beta)^2 \\ (1 - \ell^2) sc^{m\beta+2}(B\xi, \ell) = 0, \quad (4.26)$$

denklemini bulunur. Bu denklemde iki farklı durum söz konusudur.

Durum 1: $\beta = m\beta - 2$,

$$n\beta = m\beta,$$

$$\lambda^2 A + b\lambda^2 B^2 A^m(m\beta - 1)m\beta = 0,$$

$$aA^n + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [(m\beta - 1)(2 - \ell^2) + 2 - \ell] = 0, \quad (4.27)$$

Durum 2: $\beta = m\beta$,

$$n\beta = m\beta - 2,$$

$$\lambda^2 A + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [(m\beta - 1)(2 - \ell^2) + 2 - \ell] = 0,$$

$$aA^n + b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta = 0. \quad (4.28)$$

(4.27) ve (4.28) durumlarını çözersek,

$$n = m, \quad \beta = \frac{2}{m-1}, \quad A^{m-1} = \frac{\lambda^2 [(m+1)(2 - \ell^2) + (m-1)(2 - \ell)]}{a(m+1)},$$

$$B = \frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2mb[(m+1)(2 - \ell^2) + (m-1)(2 - \ell)]}}, \quad (4.29)$$

$$m = 1, \quad \beta = \frac{2}{1-n}, \quad A^{1-n} = \frac{a[(n+1)(2 - \ell^2) + (1-n)(2 - \ell)]}{\lambda^2(n+1)},$$

$$B = (1-n) \sqrt{\frac{1}{-2b[(n+1)(2 - \ell^2) + (1-n)(2 - \ell)]}}, \quad (4.30)$$

elde edilir.

(4.29) ve (4.30) değerlerini, sırasıyla, (3.42) çözümünde yerine koyarsak,

$$u_5(\xi) = \left[\frac{\lambda^2 [(m+1)(2 - \ell^2) + (m-1)(2 - \ell)]}{a(m+1)} \times \right.$$

$$\left. sc^2 \left(\frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2mb[(m+1)(2 - \ell^2) + (m-1)(2 - \ell)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.31)$$

$$u_6(\xi) = \left[\frac{a[(n+1)(2 - \ell^2) + (1-n)(2 - \ell)]}{\lambda^2(n+1)} \times \right.$$

$$\left. sc^2 \left((1-n) \sqrt{\frac{1}{-2b[(n+1)(2 - \ell^2) + (1-n)(2 - \ell)]}} (x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.32)$$

eliptik çözümleri bulunur. (4.31) ve (4.32) çözümlerinde modülü, sırasıyla, $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ için göz önüne alırsak,

$$u_{5,1}(\xi) = \left[\frac{4m\lambda^2}{a(m+1)} \times \tan^2 \left(\frac{(m-1)}{2m\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.33)$$

$$u_{6,1}(\xi) = \left[\frac{4a}{\lambda^2(n+1)} \times \tan^2 \left(\frac{(1-n)}{2} \sqrt{\frac{1}{-2b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.34)$$

$$u_{5,2}(\xi) = \left[\frac{2m\lambda^2}{a(m+1)} \times \sinh^2 \left(\frac{(m-1)}{2m\lambda} \sqrt{\frac{a}{-b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.35)$$

$$u_{6,2}(\xi) = \left[\frac{2a}{\lambda^2(n+1)} \times \sinh^2 \left(\frac{(1-n)}{2} \sqrt{\frac{1}{-b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.36)$$

çözümleri bulunur.

$R(m,n)$ denkleminin (3.61) formundaki farklı bir Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için (3.62) türevlerini (4.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & \lambda^2 A n c^\beta(B\xi, \ell) + a A^n n c^{n\beta}(B\xi, \ell) - b \lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1) m \beta \ell^2 n c^{m\beta-2}(B\xi, \ell) \\ & + b \lambda^2 B^2 A^m m \beta [m\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell] n c^{m\beta}(B\xi, \ell) + b \lambda^2 B^2 A^m m \beta \\ & [m\beta(1 - \ell^2) + 1 - \ell] n c^{m\beta+2}(B\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

denklemini bulunur. (4.37) denkleminde ise

Durum 1: $\beta = m\beta - 2$,

$$n\beta = m\beta,$$

$$\lambda^2 A - b \lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1) m \beta \ell^2 = 0,$$

$$a A^n + b \lambda^2 B^2 A^m m \beta [m\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell] = 0, \quad (4.38)$$

Durum 2: $\beta = m\beta$,

$$n\beta = m\beta - 2,$$

$$\lambda^2 A + b\lambda^2 B^2 A^m m\beta [m\beta(2\ell^2 - 1) - \ell^2 + \ell] = 0,$$

$$aA^n - b\lambda^2 B^2 A^m (m\beta - 1)m\beta\ell^2 = 0, \quad (4.39)$$

formundaki cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerin çözülmesiyle,

$$\begin{aligned} n = m, \quad \beta &= \frac{2}{m-1}, \quad A^{m-1} = -\frac{\lambda^2 [2m(2\ell^2 - 1) + (m-1)(\ell - \ell^2)]}{a(m+1)\ell^2}, \\ B &= \frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2mb[2m(2\ell^2 - 1) + (m-1)(\ell - \ell^2)]}}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} m = 1, \quad \beta &= \frac{2}{1-n}, \quad A^{1-n} = -\frac{a[2(2\ell^2 - 1) + (1-n)(\ell - \ell^2)]}{\lambda^2(n+1)\ell^2}, \\ B &= (1-n) \sqrt{\frac{1}{-2b[2(2\ell^2 - 1) + (1-n)(\ell - \ell^2)]}}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

değerleri bulunur. (4.40) ve (4.41) değerlerini (3.61) çözümünde yerine yazarsak sırasıyla,

$$\begin{aligned} u_7(\xi) &= \left[-\frac{\lambda^2 [2m(2\ell^2 - 1) + (m-1)(\ell - \ell^2)]}{a(m+1)\ell^2} \times \right. \\ &\quad \left. nc^2 \left(\frac{(m-1)}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{-2mb[2m(2\ell^2 - 1) + (m-1)(\ell - \ell^2)]}}(x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} u_8(\xi) &= \left[-\frac{a[2(2\ell^2 - 1) + (1-n)(\ell - \ell^2)]}{\lambda^2(n+1)\ell^2} \times \right. \\ &\quad \left. nc^2 \left((1-n) \sqrt{\frac{1}{-2b[2(2\ell^2 - 1) + (1-n)(\ell - \ell^2)]}}(x - \lambda t), \ell \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilir. Bu çözümlerde eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ için göz önüne alırsak,

$$u_{7,2}(\xi) = \left[-\frac{2m\lambda^2}{a(m+1)} \times \cosh^2 \left(\frac{(m-1)}{2m\lambda} \sqrt{\frac{a}{-b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(m-1)}}, \quad (4.44)$$

$$u_{8,2}(\xi) = \left[-\frac{2a}{\lambda^2(n+1)} \times \cosh^2 \left(\frac{(1-n)}{2} \sqrt{\frac{1}{-b}} (x - \lambda t) \right) \right]^{\frac{1}{(1-n)}}, \quad (4.45)$$

formundaki solitary pattern çözümlerine ulaşılır. $\ell \rightarrow 0$ için,

$$u_{7,1} \rightarrow \infty \text{ ve } u_{8,1} \rightarrow \infty \quad \text{olur.} \quad (4.46)$$

Hatırlatma 2. $R(m,n)$ denkleminin çözümlerinden (4.35), (4.36), (4.44) ve (4.45) çözümleri Yan [38] tarafından sine-cosine metodu kullanılarak elde edilen çözümlerle aynı olup diğer çözümler farklıdır.

KAYNAKLAR

- [1]. **Yaşar İ. B.**, 2005, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [2]. **Koca K.**, 2001, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [3]. **El-Sabbagh M. F., Ali A. T.**, 2006, New generalized Jacobi elliptic function expansion method, Department of Mathematics, Faculty of Science , Minia Universty, Egypt.
- [4]. **Çakar Ö.**, 1992, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Döner Sermaye İşletmesi, No:3, Ankara.
- [5]. **Korteweg D.J., de Vries G.**,1985, On the change of from of long waves advancing in a rectangular cahannel and on a new type of long stationary wave, Phil. Mag., 39(5), 422- 443.
- [6]. **Zabusky N.J., Kruskal M.D.**, 1965, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phay. Rev. Lett ., 15, 240-243.
- [7]. **Fermi E., Pasta J., Ulam S.**, 1955, Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., 15, 143-156.
- [8]. **Karpman V.I., Lynov J.P., Michelsen P., Pecselli H.L., Rasmussen J.J., Turikov VA.**, 1980, Modification of plasma solitons by resonanst particles; Phys Fluids 23; 1782.
- [9]. **Bisognano J.J.** 1996, In: Proceedings of the 1996 European particle accelarator conference, Sitges. Bristol, UK :IOP; p. 328-30.
- [10]. **Boussinesq J.**, 1871, Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes Rendus, 72, 755-759.
- [11]. **Rayleigh L.**, 1876, Onwaves, Phil. Mag. 1, 257-279.
- [12]. **Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.**, 1974, Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solut,on, Comm. Pure Appl. Math., 27, 97-133.
- [13]. **Hirota R.**, 1971, Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett. 27, 1192-1194.

- [14]. **Hirota R.**, 1973, Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, J. Math. Phys. 14, 805-809.
- [15]. **Zabusky N.J., Galvin C.J.**, 1971, Shallow water waves, the KdV equation and solitons, J. Fluid Mech. 47, 811-824.
- [16]. **Hammack J.L., Segur H.**, 1974, The Korteweg-de Vries equation and water waves, J. Fluid Mech. 65, 289-314.
- [17]. **Weidman P.D., Maxworthy T.**, 1978, Experiments on strong interactions between solitary waves, J. Fluid Mech. 85, 417-431.
- [18]. **Hirota R.**, 1980, Direct Methods in Soliton Theory, Solitons, Springer, Berlin.
- [19]. **Ablowitz M., Segur H.**, 1981, Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia.
- [20]. **Öziş T., Yıldırım A.**, 2008, Reliable analysis for obtaining exact solutions of nonlinear Schrödinger (NLS) equation, Chaos, Solitons and Fractals 38, 209-212.
- [21]. **Makhankov V.G., Fedyanin V. K.**, 1978, Soliton-like solution of the S3-equation perturbed by resonance interaction, Physics Letters A 68, 169-171.
- [22]. **Katyshev Y.V., Makhaldiani N.V., Makhankov, V.G.**, 1978, On the stability of soliton solutions to the Schrödinger equation with nonlinear term of the form $\psi\psi^*$, Physics Letter A 66, 456-458.
- [23]. **Makhankov V.G.**, 1978, Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), Physics Reports 35, 1-128.
- [24]. **Rosenau P., Hyman J.M.**, 1993, Compactons: Solitons with finite wave-lengths, Phys. Rev. Lett., 70(5), 564-567.
- [25]. **Dusuel S., Michaux P., Remoissenet M.**, 1998, From kinks to compactonlike kinks, Physical Review E, 57(2), 2320-2326.
- [26]. **Wazwaz A.M.**, 1995, On the solution of the fourth order parabolic equation by the decomposition method, Intern. J. Computer Math., 57, 213-217.
- [27]. **Dinda P.T., Remoissenet M.**, 1999, Breather compactons in nonlinear Klein-Gordon systems, Physical Review E, 60(3), 6218-6221.
- [28]. **Kivshar**, 1994, Compactons in discrete lattices, Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, 329, 255-258.
- [29]. **Ludu A., Draayer J.P.**, 1998, Patterns on liquid surfaces : cnoidal waves, compactons and scaling, Physica D, 123, 82-91.

- [30]. **Ludu A., Stitcheva G., Drayer J.P.**, 2000, Similarity analysis of nonlinear equations and bases of finite wavelength solitons, *International J. Of Modern Physics E*, 9(3), 263-278,
- [31]. **Inc M.**, 2006, On numerical doubly periodic wave solutions of the coupled Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation by dm, *Appl. Math. Comput.*, 172, 421-430.
- [32]. **Xie F., Yan Z.**, 2009, New exact solutions profiles at the nonlinear dispersion $D(m,n)$ system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 29, 866-872.
- [33]. **Misirli E., Gurefe Y.**, 2010, Exact solutions of the DSW equation using the Exp-function method, *Appl. Math. Comput.*, 216, 2623-2627.
- [34]. **Zhang K., Tang S., Wang Z.**, 2010, Bifurcations of travelling wave solutions for the nonlinear, dispersion DS ($D(m,n)$) system, *Appl. Math. Comput.*, 217, 1620-1631.
- [35]. **Deng X., Cao J., Li X.**, 2010, Travelling wave solutions for the nonlinear dispersion $D(m,n)$ system, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, 15, 281-290.
- [36]. **Dye J.M., Parker A.**, 2000, An inverse scattering scheme for regularized long-wave equation, *J Math. Phys.* 41, 2889-2904.
- [37]. **Wazwaz A.M.**, 2007, Analytic study on nonlinear variants of the RLW and the PHI-four equations, *Com. Nonlinear Sci. Numer. Simulation* 12, 314-327.
- [38]. **Yan Z.**, 2003, New families of exact solitary patterns solutions for the nonlinearly dispersive $R(m,n)$ equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 15, 891-896.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Malatya da doğdum. İlkokulu Gazi İlköğretim okulunda okudum. Ortaokulu Atatürk Ortaokulunda tamamladıktan sonra liseyi de Özel Turgut Özal Lisesinde okudum. 2003-2007 yılları arasında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2009 yılında bir bankada göreve başladım, şu an hala aynı bankada görev yapmaktayım.