

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HESSIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

Münevver YILDIRIM YILMAZ

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HESSIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

Münevver YILDIRIM YILMAZ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 13.06.2008 tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği/
oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Üye: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Üye: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Üye: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

Üye: Prof. Dr. Vedat ASİL

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmanın başından itibaren destek ve yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanımı ayıran saygı değer hocam sayın Doç.Dr. Mehmet BEKTAŞ 'a ; gerekli imkanları sağlayan, yol gösteren ve yardımcı olan sayın hocam Prof.Dr.Mahmut ERGÜT ' e, tüm öğrenim hayatım boyunca beni her konuda destekleyen sevgili aileme ve her zaman destek olan eşime teşekkür etmeyi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Münevver YILDIRIM YILMAZ

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER LİSTESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
GİRİŞ.....	1
1. GENEL KAVRAMLAR.....	3
1.1. Temel Tanımlar.....	3
2. HESSIAN MANİFOLDLAR.....	9
2.1. Hessian Manifold Kavramı.....	9
2.2. Hessian Manifold Örnekleri.....	14
2.3. Sabit Hessian Kesit Eğrilikli Hessian Manifoldlar ve Yapıları.....	16
2.4. Sabit Hessian Kesit Eğrilikli Hessian Manifoldların Ricci ve Skalar Eğriligi.....	24
3. HESSIAN MANİFOLD VE HİPERYÜZEY.....	27
3.1. Hessian Manifold ve Hessian Hiperyüzey.....	27
4. HESSIAN MANİFOLDLAR VE EĞRİLİK.....	30
4.1. Hessian Manifoldlar ve Hiperyüzeylerin Eğrilikleri Arasındaki Bağlantılar.....	30
5. SABİT EĞRİLİKLİ HESSIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ.....	42
5.1. Sabit Eğrilikli Hessian Manifoldların Hiperyüzeyleri ve Pseudo-Umbiliklik İlişkileri.....	42
KAYNAKLAR.....	52

SİMGELER LİSTESİ

M	: Manifold
$\mathbb{R}^n$	: n – boyutlu reel afin uzay
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\chi(M)$	: M üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$T_M(p)$	: M nin bir P noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı
Ric	: Ricci eğrilik tensörü
S	: Skalar eğrilik
D	: Flat afin konneksiyon
∇	: Riemann konneksiyonu
γ	: Tensör alanlarının türevi
$\otimes$	: Tensörel çarpım

ÖZET

Doktora Tezi

HESSIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

Münevver YILDIRIM YILMAZ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa:54

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlara yer verilmiştir.

İkinci bölümün ilk kısmında Hessian manifold kavramı tanıtılmış, ikinci kısmında Hessian manifold örnekleri verilmiş, üçüncü kısmında sabit Hessian kesit eğrilğine sahip Hessian manifoldlar ve yapıları, dördüncü son kısmında da sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldların Ricci ve skalar eğrilikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Hessian manifoldların Hessian hiperyüzeyleri tanımlanmış konu ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Hessian manifoldlar ve hiperyüzeylerin eğrilikleri arasında bazı bağıntılar elde edilmiştir.

Son bölüm sabit eğrilikli Hessian manifoldların hiperyüzeyleri ve pseudo-umbiliklik ilişkileri ile ilgili olup, bu konuyla ilgili teoremleri içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Hessian manifold, afin konneksiyon, kovaryant türev, eğrilik, Ricci eğrilği, skalar eğrilik, kesit eğrilği, hiperyüzey.

ABSTRACT

Phd Thesis

HYPERSURFACES OF HESSIAN MANIFOLDS

Münevver YILDIRIM YILMAZ

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, Page:54

In the first chapter of this thesis that consists of five chapters, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters.

In the first, second, third and fourth sections of second chapter, the concept of Hessian manifold is introduced, some examples of Hessian manifold are given, structures of Hessian manifold with constant Hessian sectional curvature and its Ricci and scalar curvatures are examined, respectively.

In the third chapter Hessian hypersurfaces of Hessian manifolds are defined and related definitions and theorems are given.

The curvature relationships between Hessian manifolds and Hessian hypersurfaces are obtained in the fourth chapter.

The last chapter concerns with the Hessian hypersurfaces with constant curvature and their pseudo umbilical structures, some theorems on this subject are also given.

Key Words: Hessian manifolds, affine connection, covariant derivation, curvature, Ricci curvature, scalar curvature, sectional curvature, hypersurface

GİRİŞ

Manifold teorisi modern diferensiyel geometrinin en geniş ve verimli teorilerinden biridir. Manifoldlar üzerindeki yapıların daha basit ve kolay anlaşılabilir uzaylar cinsinden ifade edilebilir olması, bu kavramı bilim dünyası için oldukça ilginç bir çalışma alanı haline getirmiştir.

Zaman içinde insanoğlunun bilgi birikiminin artmasına paralel olarak bilim dalları arasında kesin ayrımların bulunmadığı ve ortak çalışma sahalarının gün geçtikçe arttığı bilinmektedir. Bütün bu gelişmeler genel anlamda manifold kavramının sadece diferensiyel geometrinin çalışma sahası olmaktan çıkarp, matematiğin ve fiziğin hemen her alanında çalışılan ve ilgi uyandıran bir konusu haline getirmiştir.

Günümüzde geometriden fiziğe, uygulamalı matematikten istatistik alanlarına kadar değişik yapı ve isimlere sahip bir çok manifold çeşidinin mevcut olduğu bilinmektedir. Bunlardan biri de, özellikle üstel dağılım aileleri ve istatistik kavramların da ifade edilebildiği, Hessian manifoldlardır.

Bir Hessian manifold özel tanımlı bir Riemann manifoldu olarak düşünülebilir. Hessian manifoldları ile ilgili ilk çalışmalar 1977 yılında başlamıştır. Hirohiko Shima; Hessian manifold kavramını, kompakt lokal Hessian manifoldunu, homojen Hessian manifoldunu, Hessian manifold ve konvekslik ilişkisini, kompakt Hessian manifoldlar için bir takım teoremleri ele almıştır [1 – 6].

1994 yılında başka bir çalışmasında sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldları incelemiş, bir başka deyişle çalışmamıza ışık tutan Hessian anlamında uzay formlarını tanımlamıştır. Hessian manifoldların çok değişkenli normal dağılım aileleri ile olan ilgisini araştırmıştır [6].

Daha sonra, 1997 de, Hirohiko Shima ve Katsumi Yagi "Hessian Manifoldların Geometrisi" adlı çalışmalarında Hessian manifoldlar için Laplasyan kavramını, Hessian manifold örneklerini ve kompakt afin manifoldlar için Albenese değişkenini, kompakt Hessian manifoldların yapı teoremlerini elde ettiler [7].

1999 yılında, J.J Duistermaat; Hessian-Riemann yapıları inceleyerek Hessian manifoldların grup yapıları ile ilgisini ortaya koymuştur [8]. Aynı yıl A.Mizuhara'nın sabit eğrilikli Hessian manifoldlar ve bunların otomorfizmleri üzerine yaptığı bir çalışması yayınlandı [9].

Bütün bu çalışmaların ışığı altında 2004 yılında yüksek lisans tezini Hessian manifold kavramı, Hessian manifoldların Riemann hiperyüzeyleri ve eğrilik ilişkileri üzerine yoğunlaşarak hazırladı. Aynı yıl M. Bektaş ve M.Yıldırım'ın sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldların skalar eğrilikleri ile ilgili bir çalışmaları yayınlandı [10]. Yine aynı tarihlerde B.Totaro'nun Hessian metriklerin eğrilikleri üzerine olan çalışması yayınlandı. Bu çalışmada $\mathbb{R}^3$ uzayında Hessian metrikleri, eğrilik ve çeşitli denklemlerle olan ilişkileri incelenmişti [11]. 2005 yılında M.Bektaş, M.Yıldırım ve M. Külahcı'nın sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldların hiperyüzeyleri ile ilgili olan bir çalışmaları [12] ve D.Kumar'ın yüksek mertebeden Hessian yapıları incelediği bir çalışması da yayınlandı [13].

M.Bektaş ve M.Yıldırım Yılmaz 2007 yılında da sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldların reel uzay formlarının şekil operatörünü ele aldılar ve bir takım sonuçlar elde ettiler [14]. Aynı yıl yine yazarlar bu tip manifoldların Riemann hiperyüzeyleri üzerinde integral eşitsizliklerini buldular [15]. 2008 yılında da Hessian manifoldların eğrilikleri üzerine olan bir çalışmaları yayınlandı [16].

Yüzeyler teorisi her yönüyle araştırılan ve çok yönlü çalışmalarda ele alınan geniş bir alandır. Özellikle manifoldların alt manifoldları ve işlem kolaylığı açısından hiperyüzeyleri, bunların birbirleri ile olan ilişkileri pek çok matematikçinin ilgiyle takip ettiği bir çalışma sahasıdır. Bu bakış açısıyla ele alacağımız çalışmada Hessian manifoldların daha önce incelenmeyen Hessian hiperyüzeyleri elde edildi. Buna ek olarak bir Hessian manifold ile bir Hessian hiperyüzeyi arasındaki eğrilik ilişkileri incelendi. Hessian hiperyüzeyler için Gauss denklemi, Ricci ve skalar eğrilik kavramları araştırıldı. Bunlardan hareketle sabit eğrilikli Hessian manifoldları ve pseudo-umbiliklik ilişkileri elde edildi.

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. M , bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n - boyutlu bir topolojik manifold (veya kısaca topolojik n - manifold) denir.

(M_1) M , bir Hausdorff uzayıdır,

(M_2) M nin her açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur,

(M_3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [17].

Tanım 1.1.2. Bir topolojik n -manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir ise S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir denir.

S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [17].

Tanım 1.1.3. M , topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold denir [17].

Tanım 1.1.4. M , bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere ,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$

işlemine M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir [17].

Tanım 1.1.5. M , bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere ;

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

$$1) \quad D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ, \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$2) \quad D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y, \forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon adı verilir [17] .

Tanım 1.1.6. M , bir yarı-Riemann manifoldu ve D , M üstünde bir afin konneksiyon olsun.

Eğer;

1) D , C^∞ sınıfındandır.

2) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$D_XY - D_YX = [X, Y]$$

dir.

3) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_XY, Z \rangle |_p + \langle Y, D_XZ \rangle |_p$$

özellikleri sağlanıyorsa, D konneksiyonuna, M üstünde bir Riemann konneksiyonu denir [17] .

Tanım 1.1.7. Bir konneksiyona karşılık gelen eğrilik tensörü sıfıra eşit ise bu konneksiyona flat konneksiyon denir [18].

Tanım 1.1.8. Bir M manifoldunun flat afin konneksiyonunun torsionu sıfır ise bu manifold afin manifold olarak adlandırılır [19] .

Tanım 1.1.9. M , bir Riemann manifold olsun. M nin hacim elementi

$$dv = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

şeklinde tanımlanır [20] .

Tanım 1.1.10. $R : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n)$

$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y) Z$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z) &= D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]} Z \\ &= (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]}) Z \\ &= ([D_X, D_Y] - D_{[X, Y]}) Z \end{aligned}$$

olarak tanımlanan R fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde üçüncü mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu kovaryant tensör alanına E^n in eğrilik tensör alanı ve bunun bir $p \in E^n$ noktasındaki değeri olan $R(X_p, Y_p) Z_p$ tensörüne de E^n in p noktasındaki eğrilik tensörü veya kısaca E^n in p deki eğriliği denir [17].

Tanım 1.1.11. M , n -boyutlu bir Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(P)$ olsun. $T_M(P)$ nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere

$$\begin{aligned} Ric : T_M(P) \times T_M(P) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow Ric(u, v) \end{aligned}$$

dönüşümü

$$Ric(u, v) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, u) v, e_i \rangle$$

şeklinde tanımlanırsa, M nin Ricci eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ricci eğrilik tensörünün $p \in M$ noktasındaki değerine M nin Ricci eğriliği denir [21].

Tanım 1.1.12. M , n -boyutlu Riemann manifold olmak üzere $T_X(M)$ tanjant uzayındaki her P düzlemi için $K(P)$ kesit eğriliği ; $\{X_1, X_2\}$ P nin ortonormal bazı olmak üzere

$$K(P) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2) X_2, X_1 \rangle$$

şeklinde tanımlıdır [18].

Tanım 1.1.13. M , n -boyutlu Riemann manifold ve $p \in M$ için $T_M(p)$ nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Ric , M nin Ricci eğrilik tensör alanı olmak üzere

$$S = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) \tag{1.1.1}$$

şeklinde tanımlı S değerine M nin skalar eğriliği denir. $\forall X, Y \in M$ olmak üzere Tanım 1.1.11 den

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

yazılır. Bu ifade (1.1.1) de göz önüne alınırsa,

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle R(e_j, e_i) e_i, e_j \rangle$$

yazılabilir [22].

Tanım 1.1.14. M , bir n -boyutlu manifold olsun. M nin bir X noktasındaki bütün tanjant vektörlerin cümlesi $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ ile gösterilmek üzere M manifoldu üzerindeki tanjant bundle, TM deki her tanjant vektörü bağlı olduğu noktaya götüren

$$\pi : TM \rightarrow M$$

$$T_q M \rightarrow \pi(T_q M) = \{q\}$$

şeklindeki bir dönüşüme sahip TM . cümlesidir [18].

Tanım 1.1.15. E^n bir $(n-1)$ - yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \left\{ \begin{array}{l} x \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} IR \\ x \rightarrow f(x) = c, U \text{ bir açık cümle} \end{array} \right\}$$

$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır. E^n de bir $(n-1)$ - yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [17].

Tanım 1.1.16 Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$(A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için}$$

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$(A_2) \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için

$$f(P, Q) = \alpha$$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [17].

Tanım 1.1.17. n -boyutlu bir afin uzay A ve A da bir afin koordinat sistemi $\{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. A da bu sisteme göre $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + b = 0$$

ile tanımlanan bir hiperdüzlem B olsun. A da

$$B_1 = \left\{ P \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i(P) + b > 0, P \in A \right. \right\}$$

olarak tanımlanan afin altuzaya yarı-uzay denir. Benzer şekilde

$$B_2 = \left\{ P \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i(P) + b < 0, P \in A \right. \right\}$$

olarak tanımlanan afin altuzay da bir diğer yarı uzaydır. B , B_1 ve B_2 ayrıktyrlar ve $A = B \cup B_1 \cup B_2$ dir [23].

Tanım 1.1.18. Eğer M Riemann manifoldu simetrik, üçüncü mertebeden kovaryant D tensörü ile tanımlı ise yani M , m -boyutlu bir C^∞ manifold, g metrik tensör ve D ,

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$D(X, Y, Z) = D(Y, X, Z) = D(Y, Z, X)$$

$$(= D(X, Z, Y) = D(Z, X, Y) = D(Z, Y, X))$$

şartını sağlayan 3-lineer bir dönüşüm olmak üzere (M, D, g) üçlüsüne istatistik manifold adı verilir [24].

Tanım 1.1.19. M irtibatlı bir afin manifold, M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, D afin konneksiyon ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlanan T fonksiyonuna torsion opeartörü adı verilir [24].

Tanım 1.1.20. M irtibathı bir afin manifold M üzerinde j ve k indislerine göre anti-simetrik olan torsion ve eğrilik formları sırasıyla,

$$\begin{aligned} T^i &= \frac{1}{2} T_{jk}^i w^j \wedge w^k, \\ \Omega_i^j &= \frac{1}{2} R_{ikl}^j w^k \wedge w^l \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada w^i ler M üzerindeki vektör alanlarının lokal bazları $\{e_1, \dots, e_n\}$ in duali olan 1- formların bazlarıdır ve $1 \leq i, j, k \leq n$ dir [25].

Teorem 1.1.1. M bir n -manifold ve M üzerinde tanımlı eğrilik ve torsion formları sırasıyla, T^i ve Ω_i^j olmak üzere,

$$\begin{aligned} T^i &= dw^i + w_j^i \wedge w^j, \\ \Omega_i^j &= dw_i^j + w_k^j \wedge w_i^k \end{aligned}$$

denklemlerine sırasıyla I. ve II. Cartan yapı denklemleri adı verilir [25].

Teorem 1.1.2. (Cartan ın Yardımcı Teoremi) M bir n -boyutlu manifold olsun. M üzerinde $i = 1, 2, \dots, p < n$ için λ_i 1-formları, w_i $i = 1, \dots, p$ için lineer bağımsız olmak üzere

$$\sum_{i=1}^p w_i \wedge \lambda_i = 0$$

olarak verilsin. Böylece λ_i 1-formları $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = a_{ji}$ ve $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} w_j$$

şeklinde yazılabilir [25].

İKİNCİ BÖLÜM

2.1. HESSIAN MANİFOLD KAVRAMI

Tanım 2.1.1. M bir Riemann manifoldu olsun. M nin flat afin konneksiyonu D ve M üzerinde C^∞ sınıfından bir fonksiyon u olmak üzere eğer M nin g Riemann metriği

$$g = D^2u$$

şeklinde ifade ediliyorsa g ye Hessian metriği adı verilir [26].

Bu şekilde elde edilen (D, g) çiftine de Hessian yapısı denir.

Eğer bir manifold Hessian yapısına sahipse Hessian manifold olarak adlandırılır ve (M, D, g) şeklinde ya da kısaca M ile gösterilir [26].

Tanım 2.1.2. D flat afin konneksiyonlu bir manifold M olsun. Bu durumda $Ddx^i = 0$ şartını sağlayacak şekilde bir $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ lokal koordinat sistemi mevcuttur. Bu lokal koordinat sistemine afin lokal koordinat sistemi denir [26].

Bu çalışmanın tamamında M üzerindeki geometrik kavramların lokal ifadeleri afin lokal koordinat sistemi cinsinden incelenecektir.

$T; M$ üzerinde bütün tensörlerin $\Gamma(T \otimes T)$ içinde kapsadığı bir tensör bundle olsun. Böylece aşağıdaki tanımlar verilebilir.

Tanım 2.1.3. D'_X ve $\overline{D}'_X$ $\Gamma(T \otimes T)$ içinde $X \in \Gamma(T)$ yönündeki kovaryant türevler olsunlar. I özdeşlik dönüşümü ve tensör alanlarının γ_X türevi

$$\gamma_X = \nabla_X - D_X$$

olmak üzere

$$D'_x = 2\gamma_X \otimes I + D_X \quad , \quad \overline{D}'_x = 2I \otimes \gamma_X + D_X$$

dir. Burada $\nabla; g$ Riemann metriğinin Riemann konneksiyonu ve $D; g$ flat afin konneksiyondur [5].

Böylece aşağıdaki şartlar $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T \otimes T)$ için eşdeğerdir [26]:

(H_1) g bir Hessian metriğidir,

(H_2) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$,

(H_3) $g(\gamma_X Y, Z) = g(Y, \gamma_X Z)$,

$$\begin{aligned}
(H_4) \quad & \partial_D g = 0, \\
(H_5) \quad & D'_X g = 0 \quad \left(\text{veya } \overline{D}'_X g = 0 \right), \\
(H_6) \quad & Xg(Y, Z) = g(D'_X Y, Z) + g(Y, D_X Z).
\end{aligned}$$

M , bir flat afin manifold ve TM de M üzerinde π izdüşümüne sahip bir tanjant bundle alınırsa TM , M üzerindeki flat afin yapı tarafından indirgenen bir kompleks yapı oluşturur. Gerçekten $\{x^1, \dots, x^n\}$ lokal afin koordinat sistemi için $y^i = x^i \circ \pi$, $y^{n+i} = dx^i$, $i = \{1, \dots, n\}$ olmak üzere

$$z^i = y^i + \sqrt{-1} y^{n+i}$$

yazılabilir.

Bu şekilde tanımlı $\{z^1, \dots, z^n\}$ sistemleri TM üzerinde bir kompleks yapı oluşturur.

M üzerindeki bir g Riemann metriği için

$$g^t = \sum_{i,j=1}^n (g_{ij} \circ \pi) dz^i d\bar{z}^j$$

denirse g^t nin TM üzerinde bir Hermit metriği olduğu basit bir hesaplama ile gösterilebilir [26].

Önerme 2.1.1. M üzerindeki bir g Riemann metriğinin Hessian olması için gerek ve yeter şart TM üzerindeki g^t Hermit metriğinin Kaehlerian olmasıdır [26].

Önerme 2.1.2. M üzerindeki bir g Riemann metriğinin Hessian olması için gerek ve yeter şart g nin TM tanjant bundle ın dan T^*M kotanjant bundle na bir izomorfizm olmasıdır [26].

Tanım 2.1.4. M , D flat afin konneksiyonuna ve g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun. M nin hacim elementi ν , hacim elementi yardımıyla tanımlanan kapalı bir 1-form α olmak üzere

$$D_X \nu = \alpha(X) \nu$$

şeklinde tanımlı α ya g nin 1.Kozsul formu denir. Burada X , M üzerinde tanımlı bir vektör alanıdır.

Lokal olarak 1. Kozsul form;

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \det [g_{kl}]}{\partial x^r} = \Gamma_{ri}^r$$

şeklinde ifade edilir [7].

Teorem 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde kanonik flat afin konneksiyon D ve $g = D^2\varphi$ Hessian metriğine sahip bir bölge Ω olsun. Ayrıca φ , Ω üzerinde C^∞ sınıfından bir fonksiyon ve g nin Riemann konneksiyonu da ∇ olsun.

Eğer g Riemann metriği tam ve $\alpha = 0$ ise $\Omega = \mathbb{R}^n$ ve $\nabla = D$ dir. Burada α , g nin 1.Kozsul formudur [26].

Yardımcı Teorem 2.1.2. M bir Riemann manifoldu, M üzerindeki bir vektör alanı X , M üzerindeki tensör alanlarının türevi γ_X ve g nin 1.Kozsul formu da α olsun. γ_X in izi $iz\gamma_X$ ile gösterilmek üzere

$$\alpha(X) = iz\gamma_X$$

dir [6].

İspat. M nin hacim elementi v olmak üzere

$$v = \sqrt{\det[g_{ij}]} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

ve Tanım 2.1.4 ten

$$\begin{aligned} \alpha_i v &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) v = D_{\partial/\partial x_i} v \\ &= (D - \nabla)_{\partial/\partial x_i} v \\ &= -\gamma_{\partial/\partial x_i} v \\ &= -(\det[g_{ij}])^{\frac{1}{2}} \sum_k dx^1 \wedge \dots \wedge \gamma_{\partial/\partial x_i} dx^k \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \gamma_{ik}^k v \end{aligned}$$

bulunur.

Bu da ispatı tamamlar [26].

Tanım 2.1.5. M , D flat afin konneksiyonuna ve g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun. M nin hacim elementi ν , hacim elementi yardımıyla tanımlanan kapalı bir 1-form α ve simetrik bilinear form β olmak üzere ;

$$\beta = D_\alpha$$

şeklinde tanımlı β 'ya g ' nin 2.Kozsul formu denir,

2. Kozsul form lokal olarak

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \det [g_{kl}]}{\partial x^i \partial x^j} = S_{rij}^r$$

şeklinde ifade edilir. Burada γ , M üzerindeki tensör alanlarının türevi olmak üzere $S = D_\gamma$ şeklinde tanımlıdır [4].

Teorem 2.1.3 (1, 3) tipinde bir tensör alanı S olsun. $S(X, Y)$ nin izi $izS(X, Y)$ olmak üzere

$$\beta(X, Y) = izS(X, Y)$$

dir. Burada β ikinci Kozsul formdur [6].

İspat . Tanım 2.1.5 de Yardımcı Teorem 2.1.2 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \beta(X, Y) &= (D_Y \alpha)(X) \\ &= D_Y(\alpha(X)) - \alpha(D_Y X) \\ &= D_Y iz\gamma_X - iz\gamma_{D_Y X} \end{aligned}$$

elde edilir. M Riemann manifoldu üzerinde $D_{Z_i} = 0$ şartını sağlayan çatı alanları $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ olsun. M üzerinde

$$S = D_\gamma$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (D_\gamma)(X, Y, Z_i) &= (D_Y \gamma)(X, Z_i) \\ &= D_Y(\gamma(X, Z_i)) - \gamma(D_Y X, Z_i) \\ &= (D_Y \gamma_X - \gamma D_Y X)(Z_i) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\gamma_X Z_i$ ve $\gamma_{D_Y X} Z_i$ tensör alanları

$$\gamma_X Z_i = \sum_j a_i^j Z_j$$

$$\gamma_{D_Y X} Z_i = \sum_j b_i^j Z_j$$

olarak tanımlanırsa

$$(D_\gamma)(X, Y, Z_i) = \sum_j \left(D_Y a_i^j - b_i^j \right) Z_j$$

bulunur.

Böylece

$$\begin{aligned} iz S(X, Y) &= D_Y \left(\sum_i a_i^i \right) - \sum_i b_i^i \\ &= D_Y (iz \gamma_X) - iz \gamma_{D_Y X} \\ &= \beta(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.4. $D, \mathbb{R}^n$ üzerinde kanonik flat afin konneksiyon, ∇, g nin Riemann konneksiyonu, α ve β , sırasıyla 1. ve 2. Kozsul formu olsun. $M, (D, g)$ çifti ile belirli bir kompakt Hessian manifold olmak üzere

$$\textbf{i.} \int_M \dot{I}z \tilde{\beta} \nu = \int_M \|\alpha\| \nu$$

dir. Burada $\tilde{\beta}, \beta(X, Y) = g(\tilde{\beta}(X), Y)$ eşitliği ile verilmiş bir endomorfizmdir.

ii. Eğer

$$\int_M \dot{I}z \tilde{\beta} \nu = 0$$

ise $\nabla = D$ dir [26].

Bu teoremden aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 2.1.1. **i.** β negatif tanımlı olamaz ,

ii. Eğer $\beta = 0$ ise $\nabla = D$ dir [26].

Sonuç 2.1.2. Bir kompakt ve irtibatlı Hessian manifoldu β negatif tanımlı olacak şekilde v hacim elementine sahip değildir [26].

2.2. HESSIAN MANİFOLD ÖRNEKLERİ

Örnek 2.2.1. n -boyutlu reel afin uzay $\mathbb{R}^n$ ve afin koordinat sistemi $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ olsun. Böylece $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$Ddx^i = 0$$

olacak şekilde bir kanonik flat afin D konneksiyonu mevcuttur.

$\mathbb{R}^n$ de bir bölge Ω ve Ω üzerinde $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}$ Hessian matrisi pozitif tanımlı olacak şekilde düzgün bir φ fonksiyonunu alalım. O zaman

$$g = D^2\varphi = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^i dx^j$$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir Hessian metriği olur. Böylece (D, g) ikilisi bir Hessian yapı ve $(\mathbb{R}^n, D, g)$ bir Hessian manifoldudur [26].

Örnek 2.2.2. M, g flat Riemann metriğine sahip bir manifold olsun. Bu durumda g , flat Riemann konneksiyonuna göre bir Hessian metriği olur [26].

Örnek 2.2.3. Flat afin D konneksiyonuna sahip bir manifold M olsun. Eğer simetrik bilineer D_α formu pozitif tanımlı olacak şekilde kapalı bir α 1-formu mevcutsa, D_α, M üzerinde bir Hessian metriği oluşturur. Bu yapı D ile tanımlı dış türevelere göre tam olan M üzerindeki Hessian metriklerinin sınıfına karşılık gelir [26].

Örnek 2.2.4. Ω ile bütün $n \times n$ tipindeki pozitif tanımlı, reel simetrik matrislerin cümlesi gösterilsin. Burada $\Omega, \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ içinde bir konveks bölge olarak düşünteilebilir. $x \in \Omega$ olmak üzere $\varphi(x) = -\log \det x$ alınır, $g = D^2\varphi, \Omega$ üzerinde bir Hessian metriği olur [26].

Örnek 2.2.5. $\Omega = \mathbb{R}^n - \{0\}$ olsun. Γ ile $\mathbb{R}^n$ nin 2^k ($k \in \mathbb{Z}$) ile oluşturulan afin dönüşüm gruplarının ayrık alt grupları gösterilsin. Dolayısıyla Γ/Ω bölüm uzayı bir kompakt flat afin manifold olur ve **Hopf manifold** olarak adlandırılır. Ancak Hopf manifoldları Hessian metriği olma özelliklerini sağlamazlar [26].

Örnek 2.2.6. A^2 , doğal flat afin D konneksiyonlu, 2-boyutlu reel afin uzay olsun. A^2 üzerindeki bir afin koordinat sistemi de $\{x^1, x^2\}$ olarak alınsın.

Eğer C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonu $u = \log(e^{x^1} + e^{x^2} + 1)$ biçiminde alınırsa o zaman $(D, g = D^2u)$ ile belirli bir Hessian manifoldu elde edilir. Gerçekten

$$x'^i = \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{e^{x^i}}{e^{x^1} + e^{x^2} + 1} > 0 \quad i = 1, 2$$

ve

$$x'^3 = 1 - x'^i - x'^2 = \frac{1}{e^{x^1} + e^{x^2} + 1} > 0$$

olduğu göz önünde tutulursa direkt hesaplamalar sonucu (A^2, D, g) nin bir Hessian manifoldu olduğu görülür [7].

Örnek 2.2.7. $(H, \tilde{g})$ sabit eğriliği -1 olan üst yarı uzay olsun ve

$$\begin{aligned} H & : = \{y = {}^t(y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y^{n+1} > 0\}, \\ \tilde{g} & : = (y^{n+1})^{-2} \sum_{A=1}^{n+1} dy^A dy^A. \end{aligned}$$

olarak alınsın. H üzerinde $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonunu $i, j = 1, \dots, n$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}} &= (y^{n+1})^{-1} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}}, \\ \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} &= 2\delta_{ij} (y^{n+1})^{-1} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}}, \\ \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^{n+1}} &= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}} \frac{\partial}{\partial y^j} = 0. \end{aligned}$$

Böylece $(H, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ sabit Hessian eğriliği 4 olan bir Hessian manifoldu olur. $(H, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$, H ın boyutu 2 olduğunda normal dağılımların istatistiksel modeline karşılık gelir. Böylece Hessian manifoldları istatistik manifoldların önemli bir sınıfı olarak düşünülebilir [27].

Tanım 2.2.1 M , n - boyutlu bir manifold, J , M üzerindeki kompleks yapı ve ∇ , M üzerinde tanımlı torsionsuz flat konneksiyon olmak üzere;

i) $w = g(., J.)$ Kaehler formu olmak üzere

$$\nabla w = 0$$

ii) ∇J simetrik ise , yani $\forall X, Y$ vektör alanı için

$$(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$$

şartları sağlanıyorsa (M, J, g, ∇) yapısı özel Kaehler manifoldu olarak adlandırılır [28].

Örnek 2.2.8. Tanım 2.2.1 de verilen özel Kaehler manifoldları da Hessian manifoldu olma şartlarını sağlarlar [28].

Tanım 2.2.2.

$$z = xy - \frac{1}{3}x^3$$

denklemleri ile verilen non-dejenere homojen afin yüzeye üç boyutlu afin uzayda Cayley yüzeyi denir. Burada afin homojenlikten kasıt $\mathbb{R}^3$ ün yüzey üzerinde geçişli olan bütün afin dönüşüm gruplarının bir Lie alt grubunun varolmasıdır [29].

Örnek 2.2.9. (x_1, x_2) iki boyutlu afin uzay $\mathbb{R}^2$ de bir afin koordinat sistemi, $F(x_1, x_2)$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir polinom ve D flat afin konneksiyon olmak üzere

$$F(x_1, x_2) = x_1x_2 - (x_2)^m \quad m \geq 3$$

şeklinde tanımlansın. Böylece $(\mathbb{R}^2, D, D^2F)$ flat olur.

(x, x_1, x_2) , $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı bir afin koordinat sistemi, K ve φ fonksiyonları da $a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerle tanımlansın.

$$\begin{aligned} K &= (x+1) - aF(x_1, x_2), \\ \varphi &= -\frac{1}{a} \log K. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ de bir Ω bölgesi,

$$\Omega = \{p \in \mathbb{R}^3; K(p) > 0\}$$

şeklinde alınırsa $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$, $-\frac{a}{4}$ eğrilikli bir Hessian manifoldu olur. Eğer $m = 3$ alınırsa Ω , Cayley yüzeyinin dış kısmına karşılık gelir [8].

2.3. SABİT HESSIAN KESİT EĞRİLİKLİ HESSIAN MANİFOLDLAR VE YAPILARI

Tanım 2.3.1. D , flat afin konneksiyon, g , Hessian metriği ve M , (D, g) Hessian yapısına sahip bir Hessian manifold olsun. γ , Tanım 2.2.1 de tanımlanan $(1, 2)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $(1, 3)$ tipinde bir tensör alanı;

$$S = D_\gamma$$

ile tanımlanır ve (D, g) için Hessian eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Buna göre u, C^∞ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} S_{jkl}^i &= \frac{\partial \gamma_{jl}^i}{\partial x^k} \\ S_{ijkl} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l} - \frac{1}{2} g^{rs} \frac{\partial^3 u}{\partial x^i \partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^j \partial x^l \partial x^s} \\ S_{ijkl} &= S_{ilkj} = S_{kjil} = S_{jilk} = S_{klij} \end{aligned}$$

dir. Burada $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ afin lokal koordinat sistemidir [6].

Tanım 2.3.2. g Hessian metriğinin Riemann konneksiyonu ∇ ile gösterilsin. ∇ için Riemann eğrilik tensörü

$$R_{jkl}^i = \gamma_{rk}^i \gamma_{jl}^r - \gamma_{rl}^i \gamma_{jk}^r, \quad (2.1.1)$$

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} (S_{jikl} - S_{ijkl}) \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.3.3. S Hessian eğrilik tensörü ve ξ ikinci dereceden kontravaryant simetrik tensör alanı olmak üzere, ikinci dereceden simetrik kontravaryant tensör alanları uzayının bir endomorfizmi

$$\varsigma(\xi)^{ik} = S^i{}_j{}^k{}_l \xi^{jl}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece

$$\begin{aligned} \langle \varsigma(\xi), \eta \rangle &= S^i{}_j{}^k{}_l \xi^{jl} \eta_{ik} = S_{ijkl} \xi^{jl} \eta^{ik} = S_{jilk} \eta^{ik} \xi^{jl} \\ &= \left(S^j{}_i{}^l{}_k \eta^{ik} \right) \xi_{jl} = \langle \xi, \varsigma(\eta) \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ g ile tanımlı bir iç çarpımı göstermektedir [6].

Tanım 2.3.4. x noktasında sıfırdan farklı, ikinci dereceden kontravaryant, simetrik tensör alanı ξ_x ve $\varsigma(\xi_x)$ de ikinci dereceden simetrik kontravaryant tensör alanları uzayının bir endomorfizmi olmak üzere

$$h(\xi_x) = \frac{\langle \varsigma(\xi_x), \xi_x \rangle}{\langle \xi_x, \xi_x \rangle}$$

şeklinde tanımlı $h(\xi_x)$ değerine ξ_x yönündeki Hessian kesit eğriliği denir [6].

Tanım 2.3.5. Eğer her $x \in M$ noktasındaki bütün kontravaryant simetrik ξ_x tensörleri için $h(\xi_x)$ Hessian kesit eğriliği bir c sabitine eşitse (M, D, g) Hessian manifolduna c sabit Hessian kesit eğrilikli uzay denir [6].

Teorem 2.3.1. (M, D, g) , boyutu ≥ 2 olan bir Hessian manifoldu olsun. (M, D, g) manifoldunun sabit Hessian kesit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart

$$S_{ijkl} = \frac{c}{2} (g_{ij}g_{kl} + g_{il}g_{kj})$$

olmasıdır. Eğer $h(\xi_x)$ Hessian kesit eğriliği sadece x e bağlı ise (M, D, g) manifolduna sabit Hessian kesit eğriliklidir denir. Burada c sabit Hessian kesit eğriliği, S Hessian eğrilik tensörü ve g Hessian metriğidir [26].

İspat . M nin sabit Hessian c kesit eğrilikli olduğunu kabul edelim. Tanım 2.3.3 den ς simetrik olduğundan her ξ_x için

$$\varsigma(\xi_x) = c\xi_x \quad (2.1.4)$$

dir. δ_j^i Kronecker deltası olmak üzere

$$T^i_j{}^k{}_l = S^i_j{}^k{}_l - \frac{c}{2} (\delta_j^i \delta_l^k + \delta_l^i \delta_j^k) ,$$

olarak tanımlayalım. S ve Kronecker deltası tanımlarından

$$T^i_j{}^k{}_l = T^k_j{}^i{}_l = T^i_l{}^k{}_j \quad (2.1.5)$$

yazılabilir ve her ξ_x için

$$T^i_j{}^k{}_l \xi_x^{jl} = 0$$

dir. Böylece x noktasındaki her a^i, b^i, c^i, d^i için,

$$0 = T_{ijkl} (a^j b^l + a^l b^j) (c^i d^k + c^k d^i) = 4T_{ijkl} a^j b^l c^i d^k$$

yani $T^i_j{}^k{}_l = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} S^i_j{}^k{}_l &= \frac{c}{2} (\delta_j^i \delta_l^k + \delta_l^i \delta_j^k) , \\ S^i_{jkl} &= \frac{c}{2} (\delta_j^i g_{kl} + \delta_l^i g_{jk}) . \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine eğer yukarıdaki şart sağlanırsa bu (M, D, g) nin c sabit Hessian kesit eğrilğine sahip olduğunu gösterir [26].

Sonuç 2.3.1. Eğer (M, D, g) Hessian manifoldu c sabit Hessian kesit eğrilikli bir uzay ise (M, g) Riemann manifoldu da sabit kesit eğrilği $-c/4$ olan bir uzaydır [6].

Sonuç 2.3.2. (M, D, g) c sabit Hessian kesit eğrilğine sahip basit irtibatlı bir Hessian manifoldu olsun. Eğer g Riemann metriği tam ise $c \geq 0$ dır [6].

İspat . $c < 0$ olsun. Buna göre Sonuç 2.3.1 den $(M, g) - c/4$ sabit kesit eğrilğine sahip basit irtibatlı ve tam bir Riemann manifoldu olur. Dolayısıyla (M, g) yarıçapı $2/\sqrt{-c}$ olan bir küreye izometriktir. Diğer taraftan tam g Riemann metriğine sahip basit irtibatlı bir (M, D, g) Hessian manifoldu $\mathbb{R}^n$ de bir aralığa izomorf olur ki bu bir çelişkidir. Yani $c \geq 0$ dır.

c sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldlar c nin aldığı değerlere göre 3 temel geometrik yapıya izomorf olurlar.

(M, D, g) basit irtibatlı bir Hessian manifold olsun. Eğer g tam ise (M, D, g) , $(\Omega, \tilde{D}, \tilde{D}^2\varphi)$ ye izomorf olur. Burada Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir konveks bölge, $\tilde{D}$, $\mathbb{R}^n$ in bir flat konneksiyonu ve φ de Ω üzerinde C^∞ sınıftan bir fonksiyondur [26].

A. $c = 0$ hali

$(\mathbb{R}^n, \tilde{D}, g = (\frac{1}{2}) \tilde{D}^2 \left\{ \sum (x^i)^2 \right\})$ Öklid uzayının sabit Hessian kesit eğrilği sıfır olan basit irtibatlı bir Hessian manifoldu olduğu açıktır.

B. $c > 0$ hali

Bu hali aşağıdaki teorem yardımıyla gösterelim.

Teorem 2.3.2. c pozitif bir sabit olmak üzere Ω , $\mathbb{R}^n$ de

$$x^n > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2$$

ile verilen bir bölge olsun. Ω üzerinde C^∞ sınıftan bir φ fonksiyonu

$$\varphi = -\frac{1}{c} \log \left\{ x^n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ sabit pozitif c Hessian kesit eğrilikli, basit irtibath bir Hessian manifold olur. (Ω, g) Riemann manifoldu da sabit kesit eğriligi $-\frac{c}{4}$ olan $(H(-\frac{c}{4}), g)$ hiperbolik uzayma izometriktir. Burada

$$\begin{aligned} H &= \{(\xi^1, \dots, \xi^{n-1}, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi^n > 0\}, \\ g &= \frac{1}{(\xi^n)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (d\xi^i)^2 + \frac{4}{c} (d\xi^n)^2 \right\}. \end{aligned}$$

dir [26].

İspat . $\eta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ olsun. Buna göre

$$\eta_i = \begin{cases} \frac{1}{c} x^i \left\{ x^n - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} (x^r)^2 \right\}^{-1} & 1 \leq i \leq n-1 \\ -c^{-1} \left\{ x^n - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} (x^r)^2 \right\}^{-1} & i = n \end{cases}$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} c\eta_i\eta_j - \delta_{ij}\eta_n & c\eta_i\eta_n \\ c\eta_n\eta_j & c\eta_n\eta_n \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$f = x^n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2$$

olmak üzere g yi

$$\begin{aligned} g &= c \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i dx^i + \eta_n dx^n \right\}^2 - \eta_n \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 \\ &= \frac{1}{2} (d \log f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$$\xi^i = \begin{cases} c^{-\frac{1}{2}} x^i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ f^{\frac{1}{2}}, & i = n, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Böylece

$$-\infty < \xi^i < \infty \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad \xi^n > 0$$

olmak üzere

$$\eta_i = \begin{cases} c^{-\frac{1}{2}} y^i (y^n)^{-2}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ -c^{-1} (y^n)^{-2}, & i = n \end{cases}$$

$$x^i = \begin{cases} c^{\frac{1}{2}} y^i, & 1 \leq i \leq n-1 \\ (y^n)^2 + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (y^i)^2, & i = n \end{cases}$$

elde edilir. Buradan g aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \eta_i}{\partial x^j} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n-1} d\eta_i dx^i + d\eta_n dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d \left\{ c^{-\frac{1}{2}} y^i (y^n)^{-2} \right\} d \left(c^{\frac{1}{2}} y^i \right) + d \left\{ -\frac{1}{c} \frac{1}{(y^n)^2} \right\} d \left\{ (y^n)^2 + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (y^i)^2 \right\} \\ g &= \frac{1}{(y^n)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (dy^i)^2 + \frac{4}{c} (dy^n)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Böylece g pozitif tanımlı olur ve $(D, g = Dd\varphi)$ ikilisi Ω üzerinde bir Hessian yapı oluşturur.

(2.3.1) gözönüne alınırsa (Ω, g) sabit kesit eğriliği $-\frac{c}{4}$ olan $(H(-\frac{c}{4}, g))$ hiperbolik uzay

formuna izometrik olur.

Şimdi de $(\Omega, D, g = D^2\varphi)$ Hessian kesit eğriliğinin c sabitine eşit olduğunu gösterelim.

γ_i ve γ^i , (j, l) bileşenleri sırasıyla γ_{ijl} ve γ_{jl}^i olan matrisler olsunlar. Buna göre Tanım 2.1.3 ten

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} [g_{jl}] \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} cg_{ij}\eta_l + cg_{il}\eta_j - \delta_{jl}g_{in} & cg_{ij}\eta_n + cg_{in}\eta_j \\ cg_{in}\eta_l + cg_{il}\eta_n & 2cg_{in}\eta_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\gamma^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c\delta_i^j\eta_l + c\delta_l^i\eta_j - \delta_{jl}\delta_n^i & c\delta_j^i\eta_n + c\delta_n^i\eta_j \\ c\delta_n^i\eta_l + c\delta_l^i\eta_n & 2c\delta_n^i\eta_n \end{bmatrix}.$$

S_k^i , (j, l) bileşenleri S_{jkl}^i olan bir matris olsun. $S_k^i = \frac{\partial \gamma^i}{\partial x^k}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} S_k^i &= [S_{jkl}^i] = \left[\frac{\partial \gamma_{jl}^i}{\partial x^k} \right] = \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma_i \\ &= \frac{c}{2} \begin{bmatrix} \delta_j^i g_{kl} + \delta_l^i g_{kj} & \delta_j^i g_{kn} + \delta_n^i g_{kj} \\ \delta_n^i g_{kl} + \delta_l^i g_{kn} & 2\delta_n^i g_{kn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$S_{jkl}^i = \frac{c}{2} (\delta_j^i g_{kl} + \delta_l^i g_{kj})$$

bu da $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ Hessian kesit eğriliğinin c sabitine eşit olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur [26].

C. $c < 0$ hali

Bu hali aşağıdaki teoremle ispatlayalım.

Teorem 2.3.3. c negatif bir sabit olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de C^∞ sınıftan bir φ fonksiyonu

$$\varphi = -\frac{1}{c} \log \left(\sum_{i=1}^n e^{-x^i} + 1 \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}^n, \tilde{D}, g = \tilde{D}^2\varphi)$ sabit negatif c Hessian kesit eğriliikli, basit irtibatlı bir Hessian manifoldu ve $(\mathbb{R}^n, g)$ Riemann manifoldu da her i için $\xi_i > 0$ olarak tanımlı $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2 = -\frac{4}{c}$ küresinde bir bölgeye izometrik olur [26].

İspat . $\eta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ve $\xi_i > 0$ olmak üzere, sırasıyla,

$$\eta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = -\frac{1}{c} e^{-x^i} \left(\sum_{j=1}^n e^{x^j} + 1 \right)^{-1} ;$$

ve

$$\xi_i = \begin{cases} 2(\eta_i)^{\frac{1}{2}}, & 1 \leq i \leq n \\ 2 \left\{ -c \left(\sum_{j=1}^n e^{x^j} + 1 \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}, & i = n+1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + \xi_{n+1}^2 &= -\frac{4}{c}, \quad \xi_i > 0, \\ d\xi_{n+1} &= -\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}} d\xi_i, \\ x^i &= -2 \log \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}} - \log(-c). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \eta_i}{\partial x^j} dx^i dx^j = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \xi_i^2}{\partial x^j} dx^i dx^j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} dx^j \right) dx^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\xi_i d\xi_i) dx^i \\
&= \sum_{i=1}^n (\xi_i d\xi_i) d \log \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}} = \sum_{i=1}^n (\xi_i d\xi_i) \frac{\xi_{n+1}}{\xi_i} \frac{\xi_{n+1} d\xi_i - \xi_i d\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}^2} \\
&= \sum_{i=1}^n (d\xi_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}} d\xi_i \right) d\xi_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^n (d\xi_i)^2 + (d\xi_{n+1})^2
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

bulunur. g pozitif tanımlı olduğundan $(D, g = Dd\varphi)$ bir Hessian yapı olur. (2.3.2) den $(\mathbb{R}^n, g)$ nin, $\xi_i > 0$ ile tanımlı $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2 = -\frac{4}{c}$ küresinde bir bölgeye izometrik olduğu sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$g_{ij} = c (-\delta_{ij}\eta_i + \eta_i\eta_j)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de $(\mathbb{R}^n, D, g = Dd\varphi)$ nin c sabit Hessian kesit eğrilikli olduğunu gösterelim. Burada Teorem 2.3.2 nin ispat yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} [g_{jl}] = \frac{1}{2} [\delta_{jl} g_{ij} + c (g_{ij}\eta_l + g_{il}\eta_j)] , \\
\gamma^i &= \frac{1}{2} [\delta_{jl} \delta_j^i + c (\delta_j^i \eta_l + \delta_l^i \eta_j)]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S_k^i = [S_{jkl}^i] = \left[\frac{\partial \gamma_{jl}^i}{\partial x^k} \right] = \frac{\partial}{\partial x^k} \gamma_i$$

$$\begin{aligned}
[S_{jkl}^i] &= S_k^i = \frac{\partial \gamma^i}{\partial x^k} = \frac{c}{2} [\delta_j^i g_{kl} + \delta_l^i g_{kj}] \\
S_{jkl}^i &= \frac{c}{2} (\delta_j^i g_{kl} + \delta_l^i g_{kj})
\end{aligned}$$

dir.

Yani $(\mathbb{R}^n, D, g = Dd\varphi)$, sabit negatif c Hessian kesit eğrilikli, basit irtibatlı bir Hessian manifoldudur [26].

2.4 SABİT HESSIAN KESİT EĞRİLİKLİ HESSIAN MANİFOLDLARIN RICCI ve SKALAR EĞRİLİĞİ

Bu bölümde Hessian eğrilik tensörü yardımıyla sabit Hessian kesit eğrilikli Hessian manifoldların Ricci ve skalar eğriligi hesaplandı.

Teorem 2.4.1. (M, D, g) , D flat afin konneksiyonuna ve g Hessian metriğine sahip bir Hessian manifold olsun. (M, D, g) nin Ricci eğrilik tensörü

$$R_{jl}^H = \sum_i S_{jili} - 2R_{jl} \quad (2.4.1)$$

dir. Burada S_{jili} Hessian eğrilik tensörünün bileşenleri ve R_{jl} de M Riemann manifoldunun eğrilik tensörünün bileşenleridir [30].

İspat . (M, g) Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü Tanım 1.1.11 den

$$R_{jl} = \sum_i R_{ijli} \quad (2.4.2)$$

yazılabilir. Diğer taraftan benzer şekilde (M, D, g) Hessian manifoldunun Ricci eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R_{jl}^H = \sum_i S_{ijli}$$

olarak yazılabilir. Son eşitlikte (2.1.2) ve (2.4.2) kullanılırsa (2.4.1) eşitliği bulunur [30].

Teorem 2.4.2. (M, D, g) , D flat afin konneksiyonuna ve g Hessian metriğine sahip bir Hessian manifold olsun. (M, D, g) nin skalar eğriligi

$$r^H = \sum_{jk} S_{jkjk} - 2r$$

dir. Burada r , (M, g) Riemann manifoldunun skalar eğriligidir [30].

İspat . (M, g) Riemann manifoldunun skalar eğriligi Tanım 1.1.13. den

$$r = \sum_{kj} R_{kjjk}$$

yazılabilir. Benzer şekilde (M, D, g) bir Hessian manifoldunun skalar eğriligi

$$r^H = \sum_{jk} S_{kjjk}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} r^H &= \sum_{jk} S_{kjjk} = \sum_{jk} S_{jkjk} - 2 \sum_{kj} R_{kjjk} \\ r^H &= \sum_{jk} S_{jkjk} - 2r \end{aligned}$$

bulunur [30].

Teorem 2.4.3. (M, D, g) , D flat afin konneksiyonuna ve g Hessian metriğine sahip Hessian manifoldu c sabit Hessian kesit eğrilikli ise (M, g) Riemann manifoldunun Ricci eğriliği

$$R_{jl} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{c}{2} (g_{ij}g_{li} - g_{ii}g_{jl})$$

dir [30].

İspat . (M, D, g) Hessian manifoldunun Ricci eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R_{jl}^H = \sum_i S_{ijli}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan (M, D, g) c sabit Hessian kesit eğrilğine sahip olduğu gözönüne alınırsa Teorem 2.4.1 den

$$R_{jl}^H = \sum_i S_{jili} - 2R_{jl}$$

olur. Buradan

$$\sum_i S_{ijli} = \sum_i S_{jili} - 2R_{jl}$$

yazılabilir. Yani

$$2R_{jl} = \sum_i S_{jili} - \sum_i S_{ijli}$$

elde edilir. Son eşitlikte Teorem 2.3.1. gözönüne alınarak

$$2R_{jl} = \sum_i \frac{c}{2} (g_{ji}g_{li} + g_{ji}g_{li}) - \sum_i \frac{c}{2} (g_{ij}g_{li} + g_{ii}g_{jl})$$

$$R_{jl} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{c}{2} (g_{ij}g_{li} - g_{ii}g_{jl})$$

bulunur [30].

Teorem 2.4.4. (M, D, g) D flat afin konneksiyonuna ve g Hessian metriğine sahip Hessian manifoldu c sabit Hessian kesit eğrilikli ise (M, g) Riemann manifoldunun skalar eğriligi

$$r = -\frac{cn}{4}$$

dir [30].

İspat . Teorem 2.4.2. ve Hessian manifoldun skalar eğriligi tanımından

$$2r = \sum_{jk} S_{jkjk} - \sum_{jk} S_{kjjk}$$

yazılabilir. Diğer taraftan Teorem 2.3.1. den

$$\begin{aligned} 2r &= \sum_{ik} \frac{c}{2} (g_{jk}g_{jk} + g_{jk}g_{jk}) - \sum_i \frac{c}{2} (g_{kj}g_{kj} + g_{kk}g_{jj}) \\ 2r &= \sum_{jk} \frac{c}{2} [(g_{jk})^2 - g_{kk}g_{jj}] \\ 2r &= \frac{c}{2} (-n) \\ r &= -\frac{cn}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar [30].

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.1. HESSIAN MANİFOLD VE HESSIAN HİPERYÜZEY

Tanım 3.1.1. $(\mathbb{R}^{n+1}(x, x_1, \dots, x_n, D))$, $(x, x_1, \dots, x_n)$ afin koordinat sistemine ve D flat afin konneksiyonuna sahip $(n+1)$ boyutlu afin uzay olsun. $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde tanımlı bir K fonksiyonu, a sıfırdan farklı bir sabit, $F(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $Hess(F)$ Hessian matrisi $\mathbb{R}^n$ de her yerde non-dejenere olmak kaydıyla

$$K = (x+1) - aF(x_1, \dots, x_n)$$

ile gösterilir [8].

Tanım 3.1.2. Ω , $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n+1)$ – boyutlu afin uzayında bir bölge olsun ve

$$\Omega = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; K(p) > 0\} \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada K , Tanım 3.1.1 ile verilmiş bir fonksiyondur. Buna göre

$$\varphi = -\frac{1}{a} \log K$$

olmak üzere $\tilde{g} = D^2\varphi$, Ω üzerinde bir indefinite Riemann metriği tanımlar. Böylece $(D, \tilde{g})$ çifti Ω üzerinde bir Hessian yapıdır denir [8].

Tanım 3.1.3. $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n+1)$ – boyutlu afin uzayında Ω , (3.1.1) eşitliği ile tanımlı bir bölge olsun. K , Tanım 3.1.1 ile verilmiş bir fonksiyon ve F , $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve X_i ($i = 0, 1, \dots, n$), Ω üzerinde vektör alanlarını göstermek üzere

$$\begin{aligned} X_0 &= K \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_i &= aF_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda herhangi bir $p \in \Omega$ için $\{X_i(p)\}_{0 \leq i \leq n}$ ye Ω nın p noktasındaki $T_p(\Omega)$ tanjant vektör uzayı için bir bazdır denir [8].

Tanım 3.1.4. $N, (\Omega, \tilde{g})$ Hessian yapısına sahip bir Hessian manifoldu olsun. N nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilmek üzere

$$\tilde{\nabla}_{X_i} X_0 = -\frac{1}{2} X_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.1.2)$$

dır [8].

Tanım 3.1.5. $N, (\Omega, \tilde{g})$ Hessian yapısına sahip bir Hessian manifold, N nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olmak üzere N nin Gauss denklemi

$$\tilde{\nabla}_{X_i} X_j = \nabla_{X_i} X_j + h(X_i, X_j) X_0 \quad (3.1.3)$$

dır. Burada X_0, X_i, X_j, Ω üzerinde tanımlı vektör alanları ve $\nabla_{X_i} X_j, \tilde{\nabla}_{X_i} X_j$ nin $\{X_0\}^\perp$ bileşenidir [8].

Yardımcı Teorem 3.1.1. $N, (\Omega, \tilde{g})$ Hessian yapısına sahip bir Hessian manifoldu ve $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere

$$h(X_i, X_j) = \frac{a}{2} \tilde{g}(X_i, X_j) \quad (3.1.4)$$

$$\tilde{\nabla}_{X_0} \tilde{g}(X_i, X_j) = -\tilde{g}(X_i, X_j) \quad (3.1.5)$$

dir. Burada h, N nin şekil operatörü, $\tilde{\nabla}, N$ nin Levi-Civita konneksiyonu, $\tilde{g}, N$ üzerindeki Hessian metriği, X_i, Ω üzerinde tanımlı vektör alanlarıdır [8].

Tanım 3.1.6. $(\mathbb{R}^n(y_1, \dots, y_n), D), (y_1, \dots, y_n)$ afin koordinat sistemi ve D flat afin konneksiyonuna sahip n -boyutlu bir afin uzay olsun. $F, \mathbb{R}^n(y_1, \dots, y_n)$ üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $(D, D^2F) \mathbb{R}^n(y_1, \dots, y_n)$ üzerinde bir Hessian yapı oluşturur öyleki

$$\varphi = -\frac{1}{a} \log K$$

$$\Omega = \{p \in \mathbb{R}^n, K(p) > 0\}$$

olmak üzere $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ bir Hessian manifoldu olur.

$\Phi; M = (\mathbb{R}^n(y_1, \dots, y_n), D, D^2F)$ den $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ içine

$$x = aF(y_1, \dots, y_n)$$

$$x_i = y_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

şeklinde tanımlı bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Böylece Φ , M den N ye

$$\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) = X_i = a F_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

şartını sağlayan bir izometrik immersiyondur denir [8].

Yardımcı Teorem 3.1.2. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ bir Hessian manifoldu ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ N nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda;

- i) $\Phi(M)$ N nin X_0 a göre bir umbilik hiperyüzeyi olur ve şekil operatörü $\frac{1}{2}id$ dir,
- ii) $N = (\Omega, \tilde{g}, \tilde{\nabla})$ nin sabit $-\frac{a}{4}$ eğrilikli olması için gerek ve yeter şart $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ nin flat olmasıdır [8].

Tanım 3.1.7. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ bir Hessian manifoldu ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ N nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu takdirde (3.1.4) denklemi ile verilen h , M hiperyüzeyinin ikinci temel formu olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.8. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ bir Hessian manifoldu, $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ N nin bir hiperyüzeyi ve M nin bir $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. M nin ikinci temel formu h non-dejenere olduğundan $\forall p \in M$ için T_pM tanjant uzayının

$$h(E_i, E_j) = \delta_{ij}$$

şartını sağlayacak bir $\{E_1, \dots, E_n\}$ bazı bulunabilir. Bu baza M nin h -ortonormal bazı adı verilir [31].

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4.1. HESSIAN MANİFOLDLAR VE HİPERYÜZEYLERİN EĞRİLİKLERİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

E^m m - boyutlu Öklid uzayındaki alt manifoldlar ve bunların hiperyüzeyleri üzerindeki temel form, Gauss ve Weingarten denklemleri ve bu uzaylar arasındaki eğrilik bağıntıları Özel, [32] tarafından incelenmiştir. Bu bölümde de $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ Hessian manifoldunun bir $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ hiperyüzeyi ile arasındaki eğrilik bağıntıları incelenecektir. Kolaylık olması açısından $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ kısaca M , $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ kısaca N ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.1. N bir Hessian manifoldu ve N nin bir hiperyüzeyi de M olsun. N ve M nin eğrilik tensör alanları, sırasıyla, $\tilde{R}$ ve R , Levi-Civita konneksiyonları da $\bar{\nabla}$ ve ∇ olsun. X_0 M nin normal vektör alanı, h M nin ikinci temel formu, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de herhangi bir $p \in M$ noktasındaki h - ortonormal baz olmak üzere,

$$\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_j, E_k) E_l\right) = \tilde{g}(E_i, R(E_j, E_k) E_l) + \frac{2}{a}(h_{ki}h_{lj} - h_{ij}h_{lk}) \quad (4.1.1)$$

veya

$$\tilde{R}_{iljk} = R_{iljk} + \frac{2}{a}(h_{ki}h_{lj} - h_{ij}h_{lk}) \quad (4.1.2)$$

dır.

İspat. $\forall X_i, X_j, X_k, X_l \in \chi(M)$ için Tanım 1. 1. 10 dan

$$\tilde{R}(X_j, X_k) X_l = \bar{\nabla}_{X_j} (\bar{\nabla}_{X_k} X_l) - \bar{\nabla}_{X_k} (\bar{\nabla}_{X_j} X_l) - \bar{\nabla}_{[X_j, X_k]} X_l$$

yazılabilir. Bu denklemde (3.1.3) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X_j, X_k) X_l &= \bar{\nabla}_{X_j} (\nabla_{X_k} X_l + h(X_k, X_l) X_0) - \bar{\nabla}_{X_k} (\nabla_{X_j} X_l + h(X_j, X_l) X_0) \\ &\quad - \nabla_{[X_j, X_k]} X_l - h([X_j, X_k], X_l) X_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X_j, X_k) X_l &= \nabla_{X_j} (\nabla_{X_k} X_l + h(X_k, X_l) X_0) + h(X_j, \nabla_{X_k} X_l + h(X_k, X_l) X_0) X_0 \\ &\quad - [(\nabla_{X_k} (\nabla_{X_j} X_l + h(X_j, X_l) X_0))] \\ &\quad + h(X_k, \nabla_{X_j} X_l + h(X_j, X_l) X_0) X_0 \\ &\quad - \nabla_{[X_j, X_k]} X_l - h([X_j, X_k], X_l) X_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X_j, X_k) X_l &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_l + \nabla_{X_j} h(X_k, X_l) X_0 \\
&+ h(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0 + h(X_j, \nabla_{X_k} X_l) X_0 + h(X_j, h(X_k, X_l) X_0) X_0 \\
&- \nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_l - \nabla_{X_k} h(X_j, X_l) X_0 \\
&- h(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0 - h(X_k, \nabla_{X_j} X_l) X_0 - h(X_k, h(X_j, X_l) X_0) X_0 \\
&- \nabla_{[X_j, X_k]} X_l - h([X_j, X_k], X_l) X_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X_j, X_k) X_l &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_l - \nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_l - \nabla_{[X_j, X_k]} X_l + \nabla_{X_j} h(X_k, X_l) X_0 \\
&- \nabla_{X_k} h(X_j, X_l) X_0 + h(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0 - h(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0 \\
&+ h(X_j, \nabla_{X_k} X_l) X_0 + h(X_j, h(X_k, X_l) X_0) X_0 - h(X_k, \nabla_{X_j} X_l) X_0 \\
&- h(X_k, h(X_j, X_l) X_0) X_0 - h([X_j, X_k], X_l) X_0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde de (3.1.3) eşitliğinin tekrar kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X_j, X_k) X_l &= R(X_j, X_k) X_l + \overline{\nabla}_{X_j} (h(X_k, X_l) X_0) - \overline{\nabla}_{X_k} (h(X_j, X_l) X_0) \\
&+ h(X_j, \nabla_{X_k} X_l) X_0 - h(X_k, \nabla_{X_j} X_l) X_0 - h([X_j, X_k], X_l) X_0 \\
&+ h(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0 - h(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $X_i \in \chi(M)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \tilde{g}(X_i, \overline{\nabla}_{X_j} (h(X_k, X_l) X_0)) \\
&- \tilde{g}(X_i, \overline{\nabla}_{X_k} (h(X_j, X_l) X_0)) + \tilde{g}(X_i, h(X_j, \nabla_{X_k} X_l) X_0) \\
&- \tilde{g}(X_i, h(X_k, \nabla_{X_j} X_l) X_0) - \tilde{g}(X_i, h([X_j, X_k], X_l) X_0) \\
&+ \tilde{g}(X_i, h(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0) - \tilde{g}(X_i, h(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \tilde{g}(X_i, \overline{\nabla}_{X_j} (h(X_k, X_l) X_0)) \\
&- \tilde{g}(X_i, \overline{\nabla}_{X_k} (h(X_j, X_l) X_0)) + \tilde{g}(X_i, h(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0) \\
&- \tilde{g}(X_i, h(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0)
\end{aligned}$$

olur.

Burada (3.1.4) ün göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}\left(X_i, R(X_j, X_k) X_l\right) + \tilde{g}\left(X_i, \bar{\nabla}_{X_j}\left(\frac{a}{2} \tilde{g}(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0\right)\right) \\ &\quad - \tilde{g}\left(X_i, \bar{\nabla}_{X_k}\left(\frac{a}{2} \tilde{g}(X_j, X_l) X_0\right)\right) + \tilde{g}\left(X_i, \frac{a}{2} \tilde{g}(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0\right) \\ &\quad - \tilde{g}\left(X_i, \frac{a}{2} \tilde{g}(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0\right)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}\left(X_i, R(X_j, X_k) X_l\right) + \frac{a}{2} \tilde{g}\left(X_i, \bar{\nabla}_{X_j}\left(\tilde{g}(X_k, X_l) X_0\right)\right) \\ &\quad - \frac{a}{2} \tilde{g}\left(X_i, \bar{\nabla}_{X_k}\left(\tilde{g}(X_j, X_l) X_0\right)\right) + \frac{a}{2} \tilde{g}\left(X_i, \tilde{g}(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0\right) \\ &\quad - \frac{a}{2} \tilde{g}\left(X_i, \tilde{g}(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0\right) \\ \tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}\left(X_i, R(X_j, X_k) X_l\right) + \frac{a}{2} [\tilde{g}\left(X_i, \bar{\nabla}_{X_j}\left(\tilde{g}(X_k, X_l) X_0\right)\right) \\ &\quad - \tilde{g}\left(X_i, \bar{\nabla}_{X_k}\left(\tilde{g}(X_j, X_l) X_0\right)\right) + \tilde{g}\left(X_i, \tilde{g}(X_k, X_l) \nabla_{X_j} X_0\right) \\ &\quad - \tilde{g}\left(X_i, \tilde{g}(X_j, X_l) \nabla_{X_k} X_0\right)]\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

olur.

Burada $\bar{\nabla}_{X_j}(\tilde{g}(X_k, X_l) X_0)$ ve $\bar{\nabla}_{X_k}(\tilde{g}(X_j, X_l) X_0)$ ifadeleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_j}(\tilde{g}(X_k, X_l) X_0) &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{X_j} X_k, X_l) X_0 + \tilde{g}(X_k, \bar{\nabla}_{X_j} X_l) X_0 + \tilde{g}(X_k, X_l) \bar{\nabla}_{X_j} X_0 \\ &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{X_j} X_k, X_l) X_0 + \tilde{g}(X_k, \bar{\nabla}_{X_j} X_l) X_0 - \left(\frac{1}{2} X_j\right)(\tilde{g}(X_k, X_l)) \\ \tilde{g}(X_i, \bar{\nabla}_{X_j} \tilde{g}(X_k, X_l) X_0) &= 0 + 0 - \tilde{g}\left(\left(\frac{1}{2} X_j\right) \tilde{g}(X_k, X_l) X_i\right) \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{g}(X_i, X_j) \tilde{g}(X_k, X_l)\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_k}(\tilde{g}(X_j, X_l) X_0) &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{X_k} X_j, X_l) X_0 + \tilde{g}(X_j, \bar{\nabla}_{X_k} X_l) X_0 + \tilde{g}(X_j, X_l) \bar{\nabla}_{X_k} X_0 \\ &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{X_k} X_j, X_l) X_0 + \tilde{g}(X_j, \bar{\nabla}_{X_k} X_l) X_0 - \left(\frac{1}{2} X_k\right)(\tilde{g}(X_j, X_l)) \\ \tilde{g}(X_i, \bar{\nabla}_{X_k} \tilde{g}(X_j, X_l) X_0) &= 0 + 0 - \tilde{g}\left(\left(\frac{1}{2} X_k\right) \tilde{g}(X_j, X_l) X_i\right) \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{g}(X_k, X_i) \tilde{g}(X_j, X_l)\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\tilde{g}(X_i, \tilde{g}(X_k, X_l))\nabla_{X_j} X_0$ ve $\tilde{g}(X_i, \tilde{g}(X_j, X_l))\nabla_{X_k} X_0$ ifadeleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(X_i, \tilde{g}(X_k, X_l))(\nabla_{X_j} X_0) &= \tilde{g}(X_i, \tilde{g}(X_k, X_l))\left(-\frac{1}{2}X_j\right) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{g}(X_i, X_j)\tilde{g}(X_k, X_l)\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(X_i, \tilde{g}(X_j, X_l))\nabla_{X_k} X_0 &= \tilde{g}(X_i, \tilde{g}(X_j, X_l))\left(-\frac{1}{2}X_k\right) \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{g}(X_j, X_l)\tilde{g}(X_k, X_i)\end{aligned}\quad (4.1.8)$$

bulunur.

(4.1.5),(4.1.6),(4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri (4.1.4) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \frac{a}{2}\left[-\frac{1}{2}\tilde{g}(X_i, X_j)\tilde{g}(X_k, X_l)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\tilde{g}(X_k, X_i)\tilde{g}(X_j, X_l) - \frac{1}{2}\tilde{g}(X_i, X_j)\tilde{g}(X_k, X_l)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\tilde{g}(X_k, X_i)\tilde{g}(X_l, X_j)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \frac{a}{2}\left[-\tilde{g}(X_i, X_j)\tilde{g}(X_k, X_l)\right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}(X_k, X_i)\tilde{g}(X_j, X_l)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde (3.1.4) gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \frac{a}{2}\left[\left(-\frac{2}{a}h(X_i, X_j)\right)\left(\frac{2}{a}h(X_k, X_l)\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{a}h(X_k, X_i)\right)\left(\frac{2}{a}h(X_l, X_j)\right)\right]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \frac{a}{2}\left[-\frac{4}{a^2}h(X_i, X_j)h(X_k, X_l)\right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{a^2}h(X_k, X_i)h(X_l, X_j)\right]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_j, X_k) X_l\right) &= \tilde{g}(X_i, R(X_j, X_k) X_l) + \frac{2}{a}[h(X_k, X_i)h(X_l, X_j) \\ &\quad - h(X_i, X_j)h(X_k, X_l)]\end{aligned}\quad (4.1.9)$$

elde edilir.

$\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ h -ortonormal baz sistemi olmak üzere;

$$\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_j, E_k) E_l\right) = \tilde{g}\left(E_i, R(E_j, E_k) E_l\right) + \frac{2}{a}(h_{ki}h_{lj} - h_{ij}h_{kl})$$

bulunur. Bu da (4.1.1) in ispatını tamamlar. Buradan h -ortonormal baz yardımıyla

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{iljk} &= R_{iljk} + \frac{2}{a}(h_{ki}h_{lj} - h_{ij}h_{kl}) \\ R_{iljk} &= \tilde{R}_{iljk} - \frac{2}{a}(h_{ki}h_{lj} - h_{ij}h_{kl}) \\ R_{ijkl} &= \tilde{R}_{ijkl} + \frac{2}{a}(h_{ik}h_{lj} - h_{li}h_{jk})\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. N bir Hessian manifoldu ve N nin bir hiperyüzeyi M olsun. N ve M nin sırasıyla, eğrilik tensör alanları $\tilde{R}$ ve R , kesit eğrilikleri sırasıyla, $\tilde{K}$ ve K , Levi-Civita konneksiyonları da $\tilde{\nabla}$ ve ∇ olsun. X_0 M nin normal vektör alanı, h ikinci temel formu, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de herhangi bir $p \in M$ noktasındaki h -ortonormal baz olmak üzere; N ve M nin kesit eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\tilde{K}(E_i, E_j) = K(E_i, E_j) + \frac{2}{a}[(h_{ij})^2 - h_{ii}h_{jj}]$$

dir.

İspat. $\forall X_i, X_j, X_k, X_l \in \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ için Teorem 4.1.1 den

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_i, X_j) X_j\right) &= \tilde{g}\left(X_i, R(X_i, X_j) X_j\right) + \frac{2}{a}[h(X_i, X_j) h(X_i, X_j) \\ &\quad - h(X_i, X_i) h(X_j, X_j)]\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 1.1.12 den

$$\tilde{K}(X_i, X_j) = \tilde{g}\left(X_i, \tilde{R}(X_i, X_j) X_j\right)$$

yazılabilir. Bu değer yukarıdaki eşitlikte gözönüne alınırsa N ve M nin kesit eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X_i, X_j) &= K(X_i, X_j) + \frac{2}{a}[h(X_i, X_j) h(X_i, X_j) \\ &\quad - h(X_i, X_i) h(X_j, X_j)]\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada

$\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, h -ortonormal baz sistemi kullanılırsa N ve M nin kesit eğrilikleri arasındaki bağıntı,

$$\begin{aligned}\tilde{K}(E_i, E_j) &= K(E_i, E_j) + \frac{2}{a}[h_{ij}h_{ij} - h_{ii}h_{jj}] \\ \tilde{K}(E_i, E_j) &= K(E_i, E_j) + \frac{2}{a}[(h_{ij})^2 - h_{ii}h_{jj}]\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.3. N bir Hessian manifoldu ve N nin bir hiperyüzeyi M olsun. N ve M nin sırasıyla eğrilik tensör alanları $\tilde{R}$, R , Ricci eğrilikleri sırasıyla $\widetilde{Ric}$, Ric ve Levi-Civita konneksiyonları da $\bar{\nabla}$ ve ∇ olsun. X_0 M nin normal vektör alanı, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de h -ortonormal baz olmak üzere, $\forall X_i, X_j \in \chi(N)$ için N ve M nin Ricci eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= Ric(X_i, X_j) + \tilde{g}\left(\tilde{R}(X_0, X_i)X_j, X_0\right) + \frac{a}{2}\sum_{i=1}^n[\tilde{g}(E_i, X_j)\tilde{g}(X_i, E_i) \\ &\quad - \tilde{g}(X_i, X_j)\tilde{g}(E_i, E_i)]\end{aligned}$$

dir.

İspat. $Sp\{E_0 = X_0, E_1, E_2, \dots, E_n\} = \chi(N)$ olmak üzere N nin Ricci eğriliği $\forall X_i, X_j \in \chi(N)$ için Tanım 1.1.11 den

$$\widetilde{Ric}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \tilde{g}(\tilde{R}(E_i, X_i)X_j, E_i) + \tilde{g}\left(\tilde{R}(X_0, X_i)X_j, X_0\right)$$

yazılır.

Tamam 1.1.10 dan

$$\tilde{R}(E_i, X_i)X_j = \bar{\nabla}_{E_i}(\bar{\nabla}_{X_i}X_j) - \bar{\nabla}_{X_i}(\bar{\nabla}_{E_i}X_j) - \bar{\nabla}_{[E_i, X_i]}X_j \quad (4.1.10)$$

yazılabilir. Diğer taraftan, Tamam 3.1.5 den

$$\bar{\nabla}_{X_i}X_j = \nabla_{X_i}X_j + h(X_i, X_j)X_0$$

yazılabilir. Bu ifade (4.1.10) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tilde{R}(E_i, X_i)X_j &= \bar{\nabla}_{E_i}(\nabla_{X_i}X_j + h(X_i, X_j)X_0) - \bar{\nabla}_{X_i}(\nabla_{E_i}X_j + h(E_i, X_j)X_0) \\ &\quad - \left(\nabla_{[E_i, X_i]}X_j - h[E_i, X_i]X_0, X_j\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.1.3) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(E_i, X_i) X_j &= R(E_i, X_i) X_j + \overline{\nabla}_{E_i}(h(X_i, X_j) X_0) - \overline{\nabla}_{X_i}(h(E_i, X_j) X_0) \\ &\quad + h(E_i, \nabla_{X_i} X_j) X_0 - h(X_i, \nabla_{E_i} X_j) X_0 - h([E_i, X_i], X_j) X_0 \\ &\quad + h(E_i, X_i) \nabla_{E_i} X_0 - h(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte (3.1.4) denklemi gözönüne alınarak eşitliğin her iki tarafı E_i ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned}\tilde{g}(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \tilde{g}(E_i, \overline{\nabla}_{E_i}(h(X_i, X_j) X_0)) \\ &\quad - \tilde{g}(E_i, \overline{\nabla}_{X_i}(h(E_i, X_j) X_0)) + \tilde{g}(E_i, h(E_i, \nabla_{X_i} X_j) X_0) \\ &\quad - \tilde{g}(E_i, h(X_i, \nabla_{E_i} X_j) X_0) - \tilde{g}(E_i, h([E_i, X_i], X_j) X_0) \\ &\quad + \tilde{g}(E_i, h(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0) - \tilde{g}(E_i, h(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $X_0 \in \chi(M^\perp)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{g}(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \tilde{g}(E_i, \overline{\nabla}_{E_i}(h(X_i, X_j) X_0)) \\ &\quad - \tilde{g}(E_i, \overline{\nabla}_{X_i}(h(E_i, X_j) X_0)) + \tilde{g}(E_i, h(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0) \\ &\quad - \tilde{g}(E_i, h(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0)\end{aligned}$$

olur.

Burada (3.1.4) ün gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \tilde{g}\left(E_i, \overline{\nabla}_{E_i}\left(\frac{a}{2}\tilde{g}(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0\right)\right) \\ &\quad - \tilde{g}\left(E_i, \overline{\nabla}_{X_i}\left(\frac{a}{2}\tilde{g}(E_i, X_j) X_0\right)\right) + \tilde{g}\left(E_i, \frac{a}{2}\tilde{g}(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0\right) \\ &\quad - \tilde{g}\left(E_i, \frac{a}{2}\tilde{g}(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0\right)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{g}(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{a}{2}\tilde{g}(E_i, \overline{\nabla}_{E_i}(\tilde{g}(X_i, X_j) X_0)) \\ &\quad - \frac{a}{2}\tilde{g}(E_i, \overline{\nabla}_{X_i}(\tilde{g}(E_i, X_j) X_0)) + \frac{a}{2}\tilde{g}(E_i, \tilde{g}(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0) \\ &\quad - \frac{a}{2}\tilde{g}(E_i, \tilde{g}(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{a}{2}[\tilde{g}(E_i, \bar{\nabla}_{E_i}(\tilde{g}(X_i, X_j) X_0)) \\
&\quad - \tilde{g}(E_i, \bar{\nabla}_{X_i}(\tilde{g}(E_i, X_j) X_0)) + \tilde{g}(E_i, \tilde{g}(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0) \\
&\quad - \tilde{g}(E_i, \tilde{g}(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0)] \tag{4.1.11}
\end{aligned}$$

olur.

Burada $\bar{\nabla}_{E_i}(\tilde{g}(X_i, X_j) X_0)$ ve $\bar{\nabla}_{X_i}(\tilde{g}(E_i, X_j) X_0)$ ifadeleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{E_i}(\tilde{g}(X_i, X_j) X_0) &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{E_i} X_i, X_j) X_0 + \tilde{g}(X_i, \bar{\nabla}_{E_i} X_j) X_0 + \tilde{g}(X_i, X_j) \bar{\nabla}_{E_i} X_0 \\
&= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{E_i} X_i, X_j) X_0 + \tilde{g}(X_i, \bar{\nabla}_{E_i} X_j) X_0 - \left(\frac{1}{2} E_i\right)(\tilde{g}(X_i, X_j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(E_i, \bar{\nabla}_{E_i} \tilde{g}(X_i, X_j) X_0) &= 0 + 0 - \tilde{g}\left(\left(\frac{1}{2} E_i\right) \tilde{g}(X_i, X_j) E_i\right) \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{g}(E_i, E_i) \tilde{g}(X_i, X_j) \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_i}(\tilde{g}(E_i, X_j) X_0) &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{X_i} E_i, X_j) X_0 + \tilde{g}(E_i, \bar{\nabla}_{X_i} X_j) X_0 + \tilde{g}(E_i, X_j) \bar{\nabla}_{X_i} X_0 \\
&= \tilde{g}(\bar{\nabla}_{X_i} E_i, X_j) X_0 + \tilde{g}(E_i, \bar{\nabla}_{X_i} X_j) X_0 - \left(\frac{1}{2} X_i\right)(\tilde{g}(E_i, X_j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(E_i, \bar{\nabla}_{X_i} \tilde{g}(E_i, X_j) X_0) &= 0 + 0 - \tilde{g}\left(\left(\frac{1}{2} X_i\right) \tilde{g}(E_i, X_j) E_i\right) \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{g}(X_i, E_i) \tilde{g}(E_i, X_j) \tag{4.1.13}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\tilde{g}(E_i, \tilde{g}(X_i, X_j) \nabla_{E_i} X_0)$ ve $\tilde{g}(E_i, \tilde{g}(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0)$ ifadeleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(E_i, \tilde{g}(X_i, X_j)(\nabla_{E_i} X_0)) &= \tilde{g}(E_i, \tilde{g}(X_i, X_j) \left(-\frac{1}{2} E_i\right)) \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{g}(E_i, E_i) \tilde{g}(X_i, X_j) \tag{4.1.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(E_i, \tilde{g}(E_i, X_j) \nabla_{X_i} X_0) &= \tilde{g}(E_i, \tilde{g}(E_i, X_j) \left(-\frac{1}{2} X_i\right)) \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{g}(E_i, X_j) \tilde{g}(X_i, E_i) \tag{4.1.15}
\end{aligned}$$

bulunur.

(4.1.12),(4.1.13),(4.1.14) ve (4.1.15) denklemleri (4.1.11) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{a}{2}[-\frac{1}{2}\tilde{g}(E_i, E_i)\tilde{g}(X_i, X_j) \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{g}(X_i, E_i)\tilde{g}(E_i, X_j) - \frac{1}{2}\tilde{g}(E_i, E_i)\tilde{g}(X_i, X_j) \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{g}(X_i, E_i)\tilde{g}(X_j, E_i)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{a}{2}[-\tilde{g}(E_i, E_i)\tilde{g}(X_i, X_j) \\ &\quad + \tilde{g}(X_i, E_i)\tilde{g}(E_i, X_j)]\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde (3.1.4) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{a}{2}\left[\left(-\frac{2}{a}h(E_i, E_i)\right)\left(\frac{2}{a}h(X_i, X_j)\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{a}h(X_i, E_i)\right)\left(\frac{2}{a}h(X_j, E_i)\right)\right]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{a}{2}\left[-\frac{4}{a^2}h(E_i, E_i)h(X_i, X_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{a^2}h(X_i, E_i)h(X_j, E_i)\right]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(E_i, R(E_i, X_i) X_j) + \frac{2}{a}[h(X_i, E_i)h(X_j, E_i) \\ &\quad - h(E_i, E_i)h(X_i, X_j)]\end{aligned}\tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(E_i, \tilde{R}(E_i, X_i) X_j\right) &= \tilde{g}(R(E_i, X_i) X_j, E_i) + \\ &\quad \frac{2}{a}[-h(X_i, X_j)h(E_i, E_i) + h(E_i, X_j)h(X_i, E_i)]\end{aligned}$$

olur. Burada Tanım 1.1.11 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= \sum_{i=1}^n \tilde{g}(R(E_i, X_i) X_j, E_i) - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n h(X_i, X_j)h(E_i, E_i) \\ &\quad + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n h(E_i, X_j)h(X_i, E_i) + \tilde{g}\left(\tilde{R}(X_0, X_i) X_j, X_0\right)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= Ric(X_i, X_j) + \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X_0, X_i) X_j, X_0\right) + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n h(E_i, X_j) h(X_i, E_i) \\ &\quad - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n h(X_i, X_j) h(E_i, E_i)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= Ric(X_i, X_j) + \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X_0, X_i) X_j, X_0\right) + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n [h(E_i, X_j) h(X_i, E_i) \\ &\quad - h(X_i, X_j) h(E_i, E_i)]\end{aligned}$$

son denklemde

$$h(X_i, X_j) = \frac{a}{2} \widetilde{g}(X_i, X_j)$$

olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= Ric(X_i, X_j) + \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X_0, X_i) X_j, X_0\right) + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n \left[\frac{a}{2} \widetilde{g}(E_i, X_j) \frac{a}{2} \widetilde{g}(X_i, E_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{2} \widetilde{g}(X_i, X_j) \frac{a}{2} \widetilde{g}(E_i, E_i)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= Ric(X_i, X_j) + \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X_0, X_i) X_j, X_0\right) + \frac{2}{a} \frac{a^2}{4} \sum_{i=1}^n [\widetilde{g}(E_i, X_j) \widetilde{g}(X_i, E_i) \\ &\quad - \widetilde{g}(X_i, X_j) \widetilde{g}(E_i, E_i)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(X_i, X_j) &= Ric(X_i, X_j) + \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X_0, X_i) X_j, X_0\right) + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n [\widetilde{g}(E_i, X_j) \widetilde{g}(X_i, E_i) \\ &\quad - \widetilde{g}(X_i, X_j) \widetilde{g}(E_i, E_i)]\end{aligned}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.1.4. N bir Hessian manifoldu ve N nin bir hiperyüzeyi M olsun. N ve M nin eğrilik tensör alanları ve skalar eğrlikleri, sırasıyla, $\widetilde{R}$, R ve $\widetilde{S}$, S ; Levi-Civita konneksiyonları da $\overline{\nabla}$ ve ∇ olsun. X_0 normal vektör alanı, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de h -ortonormal

baz olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= S + \sum_{i=1}^n \tilde{g} \left(\tilde{R}(X_0, E_i) E_i, X_0 \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{g} \left(\tilde{R}(E_i, X_0) X_0, E_i \right) \\ &\quad + \frac{2}{a} \sum_{i,j=1}^n [(h_{ij})^2 - h_{ii} h_{jj}]\end{aligned}$$

dir.

İspat. $Sp\{E_0 = X_0, E_1, E_2, \dots, E_n\} = \chi(N)$ olmak üzere N nin skalar eğriliği Tanım 1.1.13 den

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^n \widetilde{Ric}(E_i, E_i) + \widetilde{Ric}(X_0, X_0) \quad (4.1.17)$$

şeklinde yazılır. Burada eşliliğin sağ tarafının 1. terimi Teorem 4.1.3 den

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \widetilde{Ric}(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^n Ric(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^n \tilde{g}(R(X_0, E_i) E_i, X_0), \\ &\quad + \frac{2}{a} \sum_{i,j=1}^n [h(E_i, E_j) h(E_i, E_j) - h(E_i, E_i) h(E_j, E_j)] \quad (4.1.18)\end{aligned}$$

şeklinde, sağ tarafın 2. terimi de Tanım 1.1.11 den

$$\widetilde{Ric}(X_0, X_0) = \sum_{i=0}^n \tilde{g} \left(\tilde{R}(E_i, X_0) X_0, E_i \right) \quad (4.1.19)$$

olur.

(4.1.18) ve (4.1.19) değerleri (4.1.17) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \sum_{i=1}^n Ric(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^n \tilde{g}(R(X_0, E_i) E_i, X_0) + \sum_{i=0}^n \tilde{g} \left(\tilde{R}(E_i, X_0) X_0, E_i \right) \\ &\quad + \frac{2}{a} \sum_{i,j=1}^n [h(E_i, E_j) h(E_i, E_j) - h(E_i, E_i) h(E_j, E_j)]\end{aligned}$$

bulunur. Tanım 1.1.13 burada gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= S + \sum_{i=1}^n \tilde{g}(R(X_0, E_i) E_i, X_0) + \sum_{i=1}^n \tilde{g} \left(\tilde{R}(E_i, X_0) X_0, E_i \right) \\ &\quad + \frac{2}{a} \sum_{i,j=1}^n [h(E_i, E_j) h(E_i, E_j) - h(E_i, E_i) h(E_j, E_j)]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\tilde{S} = & S + \sum_{i=1}^n \tilde{g}(R(X_0, E_i) E_i, X_0) + \sum_{i=1}^n \tilde{g}(\tilde{R}(E_i, X_0) X_0, E_i) \\
& + \frac{2}{a} \sum_{i,j=1}^n [(h_{ij})^2 - h_{ii} h_{jj}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenendir.

5. BÖLÜM

SABİT EĞRİLİKLİ HESSIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ VE PSEUDO-UMBİLİKLİK İLİŞKİLERİ

$N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ bir Hessian manifold ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ de N nin bir hiperyüzeyi olsun. N de h -ortonormal lokal çatı alanı $E_1, \dots, E_{n+1}$ ve bu çatı alanının M ye kısıtlanmış da $E_1, \dots, E_n$ olsun. Ayrıca $E_1, \dots, E_n$ M ye teğet olacak şekilde tanımlansın. N nin h -ortonormal lokal çatı alanına karşılık gelen dual çatı alanları da $w_1, \dots, w_{n+1}$ olsun. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ Hessian manifoldunun ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ hiperyüzeyinin h -ortonormal çatı alanı ve dual çatı alanlarına ait indislerin sıralanması sırasıyla aşağıdaki şekildedir.

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+1, \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n$$

N nin yapı denklemleri, Teorem 1.1.1 de verilen Cartan yapı denklemleri yardımıyla şu şekilde yazılır

$$\begin{aligned} dw_A &= \sum_{B=1}^{n+1} w_{AB} \wedge w_B \quad w_{AB} + w_{BA} = 0, \\ dw_{AB} &= \sum_{C=1}^{n+1} w_{AC} \wedge w_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D=1}^{n+1} R_{ABCD} w_C \wedge w_D \\ R_{ABCD} &= -\frac{a}{4} (\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC}). \end{aligned}$$

Bu formüllerin M ye kısıtlanmasıyla

$$w_{n+1} = 0$$

elde edilir.

Teorem 1.1.2 de verilen Cartan Yardımcı Teoremi kullanılarak

$$w_{n+1i} = \sum_{j=1}^n h_{ij} w_j, \quad h_{ij} = h_{ji}$$

yazılabilir.

M nin yapı denklemleri de N nin yapı denklemlerine benzer olarak

$$\begin{aligned}
dw_i &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \wedge w_j \\
dw_{ij} &= \sum_{k=1}^n w_{ik} \wedge w_{kj} - \frac{1}{2} \sum R_{ijkl} w_k \wedge w_l
\end{aligned}$$

M nin Gauss denklemi de Teorem 4.1.1 den

$$R_{ijkl} = -\frac{a}{4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{2}{a} (h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}) \quad (5.1.1)$$

bulunur.

Tanım 5.1.1. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ bir Hessian manifoldu ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ de N nin bir hiperyüzeyi olsun. M nin ortalama eğriliği H ve h ikinci temel formun normunun karesinin uzunluğu, sırasıyla,

$$H = |\xi| = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$$

ve

$$S = \sum_{ij} (h_{ij})^2$$

şeklindedir.

Tanım 5.1.2. h_{ij} nin birinci ve ikinci mertebeden türevleri, sırasıyla, h_{ijk} ve h_{ijkl} aşağıdaki şekilde tanımlanır [18, 33, 34].

$$\sum h_{ijk} w_k = dh_{ij} - \sum_{k=1}^n h_{ik} w_{kj} - \sum_{k=1}^n h_{jk} w_{ki} \quad (5.1.2)$$

ve

$$\sum h_{ijkl} w_l = dh_{ijl} - \sum_{l=1}^n h_{ijl} w_{lk} - \sum_{l=1}^n h_{ilk} w_{lj} - \sum_{l=1}^n h_{ljk} w_{li}$$

yani

$$\left(\sum h_{ijkl} - \frac{1}{2} \sum h_{im} R_{mjkl} - \frac{1}{2} \sum h_{mj} R_{mikl} \right) w_k \wedge w_l = 0$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum h_{im}R_{mjkl} + \sum h_{mj}R_{mikl}, \quad (5.1.3)$$

burada[18, 33, 34] den ya da Codazzi denkleminde

$$h_{ijk} = h_{ikj} \quad (5.1.4)$$

dir. (5.1.1) den

$$R_{ij} = -\frac{a}{4}(n-1)\delta_{ij} - \frac{2}{a}(h_{ij}h_{kk} - h_{ki}h_{kj}) \quad (5.1.5)$$

olur.

Şimdi ξ yi E_{n+1} e paralel olarak alalım, bu durumda Tanım 5.1.1 den

$$izH_{n+1} = nH \quad (5.1.6)$$

bulunur. h_{ij} nin laplasyanı Δh_{ij} olmak üzere (5.1.3) ve (5.1.4) den

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= \sum h_{ijkk} \\ &= \sum h_{ikjk} \\ \Delta h_{ij} &= \sum h_{kikj} + \sum h_{lk}R_{kilj} + \sum h_{li}R_{lkik} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S &= \sum (h_{ijk})^2 + \sum h_{ij}\Delta h_{ij} \\ &= \sum (h_{ijk})^2 + \sum h_{ij}h_{kkij} + \sum h_{ij}h_{lk}R_{lij} + \sum h_{ij}h_{li}R_{lkik} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

elde edilir.

Tanım 5.1.3. h , M hiperyüzeyinin ikinci temel formu, ξ ortalama eğrilik vektörü ve $\tilde{g}$, N Hessian manifoldunun skalar çarpımını göstermek üzere, $\forall X_i, X_j \in M$ için

$$\tilde{g}(h(X_i, X_j), \xi) = \lambda \tilde{g}(X_i, X_j) \quad (5.1.9)$$

şartını sağlıyorsa M , N nin pseudo-umbilik hiperyüzeyi olarak adlandırılır. Burada λ , M üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Teorem 5.1.1. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ kesit eğriliği $-\frac{a}{4}$ olan bir Hessian manifold ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ de N nin pseudo umbilik flat bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda H , M nin ortalama eğriliği olmak üzere M nin Ricci eğriliği,

$$R_{ij} = (n-1) \left[-\frac{a}{4} - \frac{2}{a} H^2 \right] \delta_{ij}$$

şartını sağlar.

İspat. λ , M üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve H , M nin ortalama eğriliği olmak üzere Tanım 5.1.3 ve (5.1.6) dan

$$izH_{n+1}h_{ij} = n\lambda\delta_{ij} \quad , \quad H^2 = \lambda$$

ve

$$h_{ij} = H\delta_{ij} \tag{5.1.10}$$

olur.

(5.1.5) ve (5.1.10) dan

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -\frac{a}{4}(n-1)\delta_{ij} - \frac{2}{a} \sum h_{ij}h_{kk} + \frac{2}{a} \sum h_{ki}h_{kj} \\ &= -\frac{a}{4}(n-1)\delta_{ij} - \frac{2}{a}nH^2\delta_{ij} + \frac{2}{a} \sum h_{ki}h_{kj} \\ &= -\frac{a}{4}(n-1)\delta_{ij} - \frac{2}{a}nH^2\delta_{ij} + \frac{2}{a}H^2\delta_{ij} \\ &= -\frac{a}{4}(n-1)\delta_{ij} - \frac{2}{a}H^2\delta_{ij}(n-1) \\ R_{ij} &= (n-1)\delta_{ij} \left[-\frac{a}{4} - \frac{2}{a}H^2 \right] \\ R_{ij} &= (n-1) \left[-\frac{a}{4} - \frac{2}{a}H^2 \right] \delta_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 5.1.1 Eğer M minimal ise $R_{ij} = -\frac{a}{4}(n-1)\delta_{ij}$ dir.

Teorem 5.1.2. M nin ortalama eğriliği H ve ikinci temel formu h olmak üzere

$$\sum (h_{ijk})^2 \geq \frac{3n^2}{n+2} |\nabla H|^2$$

dir.

İspat H , M nin ortalama eğriliği olmak üzere

$$f_{ij} = f_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij} \quad (5.1.11)$$

şeklinde bir f_{ij} fonksiyonu tanımlansın. Buna göre Tanım 5.1.1 ve (5.1.10) dan

$$\sum_i f_{ii} = 0 \quad , \quad f_{ijk} = h_{ijk}^{n+1} - H_k\delta_{ij}$$

ve

$$\sum_{ijk} f_{ijk}^2 = \sum_{ijk} \left(h_{ijk}^{n+1} - H_k\delta_{ij} \right)^2 = \sum \left(h_{ijk}^{n+1} \right)^2 - n |\nabla H|^2 \quad (5.1.12)$$

bulunur. (5.1.12) den

$$f_{iik} = h_{iik} - H_k \quad , \quad f_{iki} = h_{iki} - H_i\delta_{ik} \quad \text{ve} \quad h_{iik} = h_{iki}$$

yazılabilir. Buradan

$$f_{iki} = f_{iik} + H_k - H_i\delta_{ki} \quad (5.1.13)$$

elde edilir. (5.1.13) denklemi (5.1.12) de göz önüne alınırsa

$$\sum_{ijk} f_{ijk}^2 \geq \sum_{i \neq k} f_{iik}^2 + \sum_{i \neq k} f_{iki}^2 + \sum_{i \neq k} f_{kii}^2 + \sum_i f_{iii}^2 \quad (5.1.14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} f_{ijk}^2 &= \sum_{i \neq k} f_{iik}^2 + 2 \sum_{i \neq k} f_{iki}^2 + \sum_i f_{iii}^2 \\ &= \sum_{i \neq k} f_{iik}^2 + 2 \sum_{i \neq k} (f_{iik} + H_k - H_i\delta_{ik})^2 + \sum_i f_{iii}^2 \\ &= 3 \sum_{i \neq k} f_{iik}^2 + 2(n-1) |\nabla H|^2 - 4 \sum_i f_{iii} H_i + \sum_i f_{iii}^2 \\ &\geq \sum_{i \neq k} f_{iik}^2 + 2(n-1) |\nabla H|^2 - \frac{n+2}{(n-1)} \sum_i f_{iii}^2 \\ &\quad - \frac{4(n-1)}{n+2} |\nabla H|^2 + \sum_i f_{iii}^2 \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

bulunur. Diğer taraftan k değerleri sabit tutulursa $\sum_i f_{ii} = 0$ olduğundan (5.1.15) denklemi

$$\begin{aligned}\sum_i f_{ii}^2 &= \sum_{i \neq k} f_{ii}^2 + f_{kk}^2 = \sum_{i \neq k} f_{ii}^2 + \left(\sum_{i \neq k} f_{iik} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i \neq k} f_{ii}^2 + (n-1) \sum_{i \neq k} f_{iik}^2 = n \sum_{n \neq k} f_{iik}^2.\end{aligned}\quad (5.1.17)$$

olur. Böylece (5.1.17) denkleminde

$$\sum_{ik} f_{iik}^2 \leq n \sum_{i \neq k} f_{iik}^2$$

ya da

$$\sum_{i \neq k} f_{iik}^2 \geq \frac{1}{n-1} \sum_i f_{iii}^2 \quad (5.1.18)$$

dir. (5.1.18) denklemi (5.1.14) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{ijk} f_{ijk}^2 &\geq \frac{3}{n-1} \sum_i f_{iii}^2 + 2(n-1) |\nabla H|^2 - \frac{n+2}{n-1} \sum_i f_{iii}^2 \\ &\quad - \frac{4(n-1)}{n+2} |\nabla H|^2 + \sum_i f_{iii}^2 \\ &= \frac{2n(n-1)}{n+2} |\nabla H|^2\end{aligned}\quad (5.1.19)$$

elde edilir. Burada (5.1.12) ve (5.1.19) birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}\sum_{ijk} \left(h_{ijk}^{n+1} \right)^2 &= \sum_{ijk} f_{ijk}^2 + n |\nabla H|^2 \geq \frac{2n(n-1)}{n+2} |\nabla H|^2 + n |\nabla H|^2 \\ &= \frac{3n^2}{n+2} |\nabla H|^2\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 5.1.3. M , Ricci eğriliği alttan sınırlı, tam bir Riemann manifoldu olsun. f , M üzerinde alttan sınırlı ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için M nin

$$|\nabla f| < \varepsilon, \quad \Delta f > -\varepsilon, \quad f(x) < \inf f + \varepsilon \quad (5.1.20)$$

şartını sağlayan bir x noktası mevcuttur [32].

Teorem 5.1.4. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ kesit eğriliği $-\frac{a}{4}$ olan bir Hessian manifoldu ve $M = (R^n, D, D^2F)$ N nin flat bir hiperyüzeyi olsun. Eğer $a \geq 0$ ve M minimal ise $S = 0$ veya $S \geq -\frac{a^2}{8}n$ dir.

İspat. Yardımcı Teorem 5.1.3 göz önüne alınırsa M nin Teorem 5.1.1 şartını sağladığı görülebilir. f , M üzerinde C^∞ sınıftan bir fonksiyon ve S ikinci temel form h nin karesinin uzunluğu olmak üzere $f = \frac{1}{\sqrt{S+p}}$ ($p \in \mathbb{R}^+$) gerekli düzenlemeler yapılır ve $f = \frac{1}{\sqrt{S+p}}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Delta f = -\frac{f^3}{2}\Delta S + \frac{3}{4}f^5|\nabla S|^2 \quad (5.1.22)$$

bulunur. Ayrıca (5.1.21) gözönüne alınırsa

$$|\nabla f|^2 = \frac{|\nabla S|^2}{4}f^6$$

elde edilir.

ε pozitif bir sayı olmak üzere Yardımcı Teorem 5.1.3 den M üzerindeki bir x noktası için,

$$|\nabla f|^2 = \frac{|\nabla S|^2}{4}f^6$$

$$\frac{f^6}{4}|\nabla S|^2 < \varepsilon, \quad \Delta f > -\varepsilon, \quad f(x) < \inf f + \varepsilon \quad (5.1.23)$$

şartı sağlanır. (5.1.11) ve (5.1.12) den

$$\frac{f^4}{2}\Delta S < \varepsilon(\inf f + \varepsilon) + 3\varepsilon \quad (5.1.24)$$

olur.

Diğer taraftan

$\frac{1}{2}\Delta S$ ifadesi (5.1.8) den hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{ijk} (h_{ijk})^2 + n \sum_{ij} h_{ij} H_{ij} + \sum_{ijlk} h_{ij} h_{lk} R_{lijk} + \sum_{ijlk} h_{ij} h_{li} R_{lkik} \\
\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{ijk} (h_{ijk})^2 + n H^2 \delta_{ij} + \sum_{ijlk} h_{ij} h_{lk} \left(-\frac{a}{4} (\delta_{lj} \delta_{ik} - \delta_{lk} \delta_{ij}) + \frac{2}{a} (h_{lj} h_{ik} - h_{lk} h_{ij}) \right) \\
&\quad + \sum_{ijlk} h_{ij} h_{li} \left(-\frac{a}{4} (\delta_{li} \delta_{jk} - \delta_{lk} \delta_{ji}) + \frac{2}{a} (h_{li} h_{jk} - h_{lk} h_{ji}) \right) \tag{5.1.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &\geq \sum_{ijk} (h_{ijk})^2 - \frac{2}{a} S^2 - \frac{a}{4} n S - \frac{a}{4} H^2 n^2 \\
&\geq -\frac{2}{a} S^2 - \frac{a}{4} n S - \frac{a}{4} H^2 n^2 \tag{5.1.26}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada H , M nin ortalama eğriliği, h , ikinci temel form, S , ikinci temel formun normunun karesinin uzunluğu ve R , Riemann eğrilik tensörüdür. Ayrıca (5.1.25) ve (5.1.26) denklemlerinde M nin minimal olması gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq -\frac{2}{a} S^2 - \frac{a}{4} n S \tag{5.1.26}$$

bulunur. (5.1.26) ifadesi (5.1.24) de gözönünde tutulursa,

$$\frac{S}{(S+p)^2} \left(\frac{2}{a} S + \frac{a}{4} n \right) \geq -\varepsilon (\inf + \varepsilon) - 3\varepsilon \tag{5.1.27}$$

olur. Bu ise $\varepsilon \rightarrow 0$ için f infimuma S de supremuma yaklaşır. Böylece (5.1.27) den M üzerinde S nin sınırlı olduğu elde edilir. Eğer burada $S \neq 0$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a} S + \frac{a}{4} n &\geq 0 \\
\frac{a}{4} n &\geq -\frac{2}{a} S \\
-\frac{a^2}{8} n &\leq S
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Burada $a \geq 0$ olduğunu kabul etmiştik. Böylece Teorem 5.1.4 ten $S = 0$ yani $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2 F)$ nin $N = (\Omega, D, D^2 \varphi)$ de total geodezik olduğunu söyleyebiliriz. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.2. $N = (\Omega, D, D^2 \varphi)$ kesit eğriliği $-\frac{a}{4}$ olan bir Hessian manifoldu ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2 F)$ de N nin flat bir hiperyüzeyi ve $a \geq 0$ olmak üzere Eğer M minimal ise total geodeziktir ve kesit eğriliği $-\frac{a}{4}$ olan bir Hessian manifoldu olur.

Teorem 5.1.5. $N = (\Omega, D, D^2\varphi)$ kesit eğriliği $-\frac{a}{4}$ olan bir Hessian manifoldu ve $M = (\mathbb{R}^n, D, D^2F)$ de N nin flat pseudo-umbilik bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\frac{a^2}{32} \geq H^2$ olmak üzere

$$nH^2 \leq S \leq na \frac{\left[\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a^2}{16} - 2H^2} \right]}{4}$$

dir. Burada H, M nin ortalama eğriliği ve S ikinci temel formun karesinin uzunluğudur.

İspat. Herhangi bir pozitif p sabiti ve M de tanımlı f fonksiyonu için $f = \frac{1}{\sqrt{S+p}}$ alalım. Teorem 5.1.4 ten S, M üzerinde sınırlı olduğundan f de M üzerinde sınırlı olur ve f infimuma yaklaştıkça S de supremuma yaklaşır.(5.1.21) den

$$|\nabla f|^2 = \frac{|\nabla S|^2}{4} f^6 \quad (5.1.28)$$

elde edilir.(5.1.22) den

$$\Delta f = -\frac{1}{2} f^3 \Delta S + \frac{3}{4} |\nabla S|^2 f^5$$

yani (5.1.24) den

$$f^4 \Delta S = \frac{3}{2} |\nabla S|^2 f^6 - 2f \Delta f \quad (5.1.29)$$

(5.1.28) , (5.1.30) göz önüne alınırsa

$$f^4 \Delta S = 6 |\nabla f|^2 - 2f \Delta f \quad (5.1.30)$$

yazılabilir. Teorem 5.1.1 den M nin Ricci eğriliğinin sınırlı yani aynı zamanda alttan sınırlı olduğunu biliyoruz. Böylece M için Yardımcı Teorem 5.1.1 kullanılarak herhangi bir pozitif ε_m sabiti için $\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0 \right)$ olacak şekilde

$$|\nabla f(X_m)| < \varepsilon_m \quad , \quad \Delta f(X_m) > -\varepsilon \quad , \quad f(X_m) < \inf f + \varepsilon_m$$

şartını sağlayacak şekilde pozitif bir ε_m sabiti mevcuttur. Bu sonuç (5.1.29) ile birlikte düşünülürse

$$\Delta S(X_m) f^4(X_m) < 6\varepsilon_m^2 + 2\varepsilon_m (\inf f + \varepsilon_m) \quad (5.1.31)$$

elde edilir. (5.1.26) ve (5.1.31) göz önüne alınırsa X_m için

$$3\varepsilon_m^2 + \varepsilon_m (\inf f + \varepsilon_m) > \left[-\frac{2}{a} S^2(X_m) - \frac{a}{4} n S(X_m) - \frac{a}{4} n^2 H^2 \right] f^4(X_m) \quad (5.1.32)$$

olur. Şimdi $S_0 = \sup S = \lim_{m \rightarrow \infty} S(X_m)$. Böylece $m \rightarrow \infty$ için (5.1.32) den

$$0 \leq -\frac{2}{a} S_0^2 - \frac{a}{4} n S_0 - \frac{a}{4} n^2 H^2$$

bulunur. Burada Teorem 5.1.5 den $\frac{a^2}{32} \geq H^2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$S_0 \leq \frac{na \left[\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a^2}{16} - 2H^2} \right]}{4}$$

şartı sağlanır. $nH^2 \leq S \leq \sup S = S_0$ olduğundan

$$nH^2 \leq S \leq \frac{na \left[\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a^2}{16} - 2H^2} \right]}{4}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

- [1] Shima, H., 1976, On certain locally flat homogeneous manifolds of solvable Lie groups, Osaka J. Math., 13, 213-229.
- [2] Shima, H., 1978, Compact locally Hessian manifolds, Osaka J. Math., 15, 509-513.
- [3] Shima, H., 1980, Homogeneous Hessian manifolds, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 30, 3, 91-128.
- [4] Shima, H., 1981, Hessian Manifolds and convexity, Manifolds and Lie Groups Papers in honor of Y. Matsushima, Progress in Mathematics, Birkhauser, 14, 385-392.
- [5] Shima, H., 1986, Vanishing Theorems for compact Hessian manifolds, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 36-3, 183-205.
- [6] Shima, H., 1995, Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature, J. Math. soc. Japan 47, 735-753.
- [7] Shima, H., Yagi, K., 1997, Geometry of Hessian manifolds, Differential Geo. and Its Appl. 7, 277-290.
- [8] Mizuhara, A., 1999, Some examples of Hessian manifolds of constant curvature and their automorphisms, Math. Japonica, 50, No.2, 169-177.
- [9] Duistermaat, J.J., 2001, On Hessian Riemannian Structure, Asian J. Math., Vol.5, 1, 79-92.
- [10] Yıldırım, M., Bektaş, M., 2004, The scalar curvature of Hessian manifolds with constant Hessian sectional curvature, Abstracts of X International conference on mathematics and mechanics devoted to the 45th anniversary of Institute of Mathematics and Mechanics, 117.
- [11] Tutar, B., 2004, On curvature of a Hessian metric, Int.J. Math., 15, 369-392.
- [12] Bektaş, M., Yıldırım, M., Kılınç, M., 2005, On hypersurfaces of Hessian manifolds with constant Hessian sectional curvature, Journal of Mathematics and Statistics, 2, 115-118.
- [13] Kumar, R D., 2005, Higher order Hessian structures on manifolds, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci), Vol. 115, 259-277.
- [14] Yıldırım, M., Bektaş, M., 2006, Integral inequalities for submanifolds of Hessian manifolds with constant Hessian sectional curvature, Iranian Journal of Sci. and Tech. Trans. A, Vol.30, No.A2, 235-239.
- [15] Yıldırım, Yılmaz, M., Bektaş, M., 2007, Shape operator for real space forms in

Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.2, no.7, 343-348.

[16] Yildirim Yilmaz, M., Bektaş, M., 2008, A survey on curvatures of Hessian manifolds, Chaos Solitons and Fractals, Vol.38,3, 620-630.

[17] Hacısalihoglu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Diyarbakır, 895s.

[18] Yano, K., Kon, M., 1984, Structures on manifolds, Oxford University Press, 508s

[19] Choi, S., The decomposition and classification of Radiant affine 3- manifolds, 2000, Arxiv.dg.ga / 97122006V4, 1-123.

[20] Kobayashi, S., Nomizu, K., 1969, Foundations of Differential Geometry Vol.II. Interscience Publishers, 457s.

[21] Bektaş, M., 1995, n-boyutlu Lorentz uzayı L^n de Lorentz manifoldları üzerinde eğrilikler, Yüksek Lisans Tezi Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 58s.

[22] Ergüt, M., 1983, Genelleştirilmiş Regle yüzeylere dair, Doktora Tezi Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 53s.

[23] Hacısalihoglu, H.H., 1976, Yüksek boyutlu uzaylarda dönüşümler ve geometriler, 238s.

[24] Amari, S-I, Barndorff-Nielsen, E., Kass, R. E., Lauritzen, S.L., Rao, C.R., 1987, Differential Geometry In Statistical Inference, Inst. of Mathematical Statistics Lecture Notes monograph Series, Shanti S.Gupta, series Editor. Vol 10., 240s.

[25] Martin, D., 1991, Manifold theory, Ellis Horwood Mathematics and Its Applications, London, 423s.

[26] Shima, H., 2007, The geometry of Hessian structures, World Scientific, Singapore, 246s.

[27] Furuhashi, H., 2007, Hypersurfaces in statistical manifolds, Hokkaido University Preprint Series In Mathematics, 1-15.

[28] Baues, O., Cortes, V., 2000, Realisation of special Kaehler manifolds as parabolic spheres, Proceedings of the American mathematical society, Vol.129, No.8, 2403-2407.

[29] Nomizu, K., Takeshi, S., 1994, Affine differential geometry, Cambridge Univ. Press, 263s.

- [30] Yıldırım, M.,2004, Hessian manifoldların geometrik yapısı, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 42s.
- [31] Dillen,F., Nomizu, K., Vranken, L., 1990, Conjugate connections and Radon's theorem in Affine differential geometry, Monatshefte für Mathematik, 109, 221-235.
- [32] Özel, A. 1984, E^m de Altmanifoldların hiperyüzeyleri üzerine, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 62s.
- [33] Sun, H., 1995, On spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space form, Note Di Matematica, Vol.15, 2, 215-224.
- [34] Chern, S.S., Do cormo, M., Kobayashi, S., 1970, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and related Fields, 393-409.

ÖZGEÇMİŞ

1978 Elazığ doğumluyum. İlköğrenimimi Elazığ İsmet paşa İlkokulunda tamamladım. Ortaokul ve liseyi Elazığ Anadolu Lisesinde okudum ve 1996 yılında aynı okuldan mezun oldum. 1997 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2001 yılında lisans öğrenimimi tamamladım. Aynı yıl Elazığ Sivrice Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak atandım ve lisans öğrenimimi tamamladığım bölümde yüksek lisans yapmaya hak kazandım. 2004 yılında yüksek lisans öğrenimimi tamamlayarak doktora eğitimine başladım. 2003 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi oldum. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım. Evliyim.

Münevver YILDIRIM YILMAZ