

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU FARK STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ERSİN YILDIZ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

HAZİRAN 2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU FARK STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ERSİN YILDIZ
(141121106)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Tezinin Enstitüye Verildiği Tarih: 7 Haziran 2017

HAZİRAN 2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU FARK STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ERSİN YILDIZ
(141121106)

Tezinin Enstitüye Verildiği Tarih: 7 Haziran 2017

Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Haziran 2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Diğer Juri Üyeleri : Doç. Dr. Ali AKGÜL (Siirt Ü.)
: Doç. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü.)

HAZİRAN 2017

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, gerekli imkanları hazırlayarak bana yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU' na şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ersin YILDIZ

ELAĞIĞ -2017



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	2
2. Sturm-Liouville Fark Denklemleri.....	7
3. Sturm-Liouville Fark Problemi İçin Çözümlerin Asimptotiği.....	20
SONUÇ.....	28
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	31

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez içerisinde kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilmiş, Sturm-Liouville operatörünün bazı temel özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde fark denklemlerinden ve Sturm-Liouville fark operatöründen kısaca bahsedilmiştir. Genel sınır şartlarıyla verilen Liouville normal formundaki öz değer probleminin sürekli ve kesikli durumlardaki asimptotik formülleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu farklar metodu kullanılarak, ikinci kısımda verilen problem için asimptotik formlar ve teklik teoremi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Liouville Normal Form, Karakteristik Denklem, Sturm- Liouville Operatörü, Özdeğer

SUMMARY

Finite Difference Sturm-Liouville Problem

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, some concepts which are used in this thesis are given and some fundamental properties of Sturm-Liouville operator are examined.

In the second chapter, difference equation and Sturm-Liouville difference operator is studied briefly. We obtained asymptotic formulas for above discrete and continuous Liouville normal form eigenvalue problem with general boundary condition.

In the third chapter, by using finite difference method, asymptotics forms and uniqueness theorem are given for the problem which is given in section 2

Key Words: Liouville Normal Form, Characteristic Equation, Sturm-Liouville Difference Operator, Eigenvalue.

SEMBOLLER LİSTESİ

$L_2[a. b]$	: $[a, b]$ aralığında karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$L_{2,\rho}[a. b]$	: $[a, b]$ aralığında ρ 'ya göre karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
λ_n	: n . özdeğer
x_i^n	: i . nodal nokta
l_i^n	: Ardışık iki nodal nokta arasındaki uzaklık
Δ	: Fark operatörü
O	: Sınırlı değerler

1. GİRİŞ

Bağımsız değişkeni ayrık (discrete) ya da bunu bir ayrık değişken gibi görmek matematiksel olarak uygun olduğu zaman fark denklem modelleri ortaya çıkar. Bu bakımdan fark denklemleri daha ziyade sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Örneğin genetik alanda genetik özellikler kuşaktan kuşağa değişim gösterirler. Dolayısıyla, bir kuşağı gösteren değişken ayrık değişkendir. Ekonomide fiyat değişimleri hesaplanırken de zaman değişkeni ayrık değişkendir.

Bu çalışmada Sturm-Liouville denklemi ayrılabilir sınır şartları ile göz önüne alınıp, bu problem için sürekli ve kesikli durumda öz değer ve öz fonksiyonlar incelenmiştir [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] . Özellikle özdeğer, özfonksiyon ve özfonksiyonların sıfırları (nodal noktalar) için asimptotik formüller verilmiştir. Bu şekildeki formüller spektral teoremin incelenmesinde ışık tutacaktır.

1. 1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

TANIM 1.1. (Operatör) Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [13].

TANIM 1.2. (Lineer Operatör) Bir T lineer operatörü; $D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi birer vektör uzayı olan $\forall x, y \in D(T)$ ve her α skaleri için ;

$$T(x, y) = T(x) + T(y),$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x),$$

özelliklerine sahip bir operatördür [13].

X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ şeklinde verilen bir lineer operatör olsun. $\forall x \in D(T)$ için;

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|,$$

olacak şekilde bir c sayısı mevcutsa T operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sabitlerinin en küçüğüne T operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir [13].

TANIM 1.3. (Hilbert Uzayı) Bir iç çarpım uzayı , üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir H vektör uzayıdır. Burada iç çarpım

$H \times H \rightarrow K$ şeklinde olan $\forall x, y, z \in H$ ve $\alpha \in K$ için;

1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

şartlarını sağlayan $\langle, \rangle$ gösterime sahip dönüşümdür. Bir iç çarpım uzayı üzerindeki norm;

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer ; H deki tüm Cauchy dizileri yakınsak (iç çarpım üzerindeki norma göre tam) ise H uzayına bir soyut Hilbert uzayı denir [13].

ÖRNEK 1.1. $H = L_{2,\rho}[a, b]$ bir Hilbert uzayıdır. $x(t) \in L_{2,\rho}[a, b]$ ise, $\rho(t) > 0$ integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b \rho(t) |x(t)|^2 dt < \infty,$$

şeklinde olur. Bu uzayda iç çarpım $\forall x(t), y(t) \in L_{2,\rho}[a, b]$ için

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b \rho(t) x(t) \overline{y(t)} dt,$$

olarak tanımlanır [13].

ÖRNEK 1.2. $H = L_2[a, b]$ bir Hilbert uzayıdır. Bu uzayın elemanları $f(x), g(x), \dots$ şeklinde $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel (veya kompleks) değerli, karesel integrallenebilen fonksiyonlardır. Bu uzayda iç çarpım ise her $f(x), g(x) \in L_2[a, b]$ için

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

şeklinde tanımlanır [13].

TANIM 1.4. (Öz değer, Öz fonksiyon) L sınırlı lineer bir operatör olmak üzere $Ly = \lambda y$ olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa λ değerine özdeğer ve bu özdeğere karşılık gelen, çözümlere de özfonksiyon denir [13].

TANIM 1.5. (Sturm-Liouville Problemleri (S.L.)) $p(x), q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere bir S.L. denklemi

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad (1.1)$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. $r(x)$ fonksiyonuna yoğunluk fonksiyonu denir. (1.1) denkleminde $p(x) = r(x) = 1$ olarak alınırsa

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki denklem operatör formunda

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

yazılır. Bu operatör için $y(x)$ çözümü diferensiyellenebilir ve $[a, b]$ aralığında uç noktada verilmiş şartlarla belirlenir. Operatörü için en önemli sınır şartları

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0,$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0,$$

şeklindedir.

$$Ly \equiv -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad (1.2)$$

denklemini ve

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0,$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0, \quad (1.3)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. (1.2) - (1.3) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir. (1.3) sınır şartını $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} y(a) \cot \alpha + y'(a) &= 0, \\ y(b) \cot \beta + y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ denilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0, \\ y'(b) + Hy(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli, h ve H sayıları sonlu ise (1.2)-(1.5) problemine regüler, bu şartlardan biri sağlamadığında ise probleme singülerdir denir [14].

TANIM 1.6. (Ters Sturm-Liouville Problemi)

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad x \in [a, b], \quad q \in L_2[a, b] \\ y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0, \quad \alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

sekindeki Sturm-Liouville probleminde, spektral parametreler yardımıyla $q(x)$ potansiyel fonksiyonun bulunması isteniyorsa böyle bir probleme ters Sturm-Liouville problemi denir.

TEOREM 1.1. Regüler Sturm-Liouville probleminin öz değerleri reeldir.

İSPAT:

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad a < x < b,$$

regüler Sturm-Liouville probleminin bir öz değeri λ , $\phi(x)$ ise bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Bu taktirde fonksiyonu

$$L[\phi(x)] \equiv \lambda r(x)\phi(x), \quad (1.6)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} a_1 \phi(a) + a_2 \phi'(a) &= 0, \\ b_1 \phi(b) + b_2 \phi'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

sınır koşullarını sağlar. (1.6) denkleminin ve (1.7) sınır şartlarının her iki tarafının kompleks eşleniği alınıp, p, q ve r ' nin reel fonksiyonlar ve a_1, a_2, b_1 ve b_2 ' nin reel sabitler olduğu göz önüne alınırsa

$$L[\overline{\phi(x)}] \equiv \bar{\lambda} r(x)\overline{\phi(x)}, \quad (1.8)$$

$$a_1\overline{\phi(a)} + a_2\overline{\phi'(a)} = 0,$$

$$b_1\overline{\phi(b)} + b_2\overline{\phi'(b)} = 0,$$

elde edilir. Yani $\bar{\phi}$, $\bar{\lambda}$ öz değerine karşılık gelen öz fonksiyondur.

Şimdi (1.6) denkleminin her iki tarafı $\overline{\phi(x)}$, (1.8) denkleminin her iki tarafı $\phi(x)$ ile, çarpılıp, taraf tarafa çıkarılır ve daha sonra bu ifadenin a' dan b' ye integrali alınır

$$\int_a^b \{\overline{\phi(x)}L[\phi(x)] - \phi(x)L[\overline{\phi(x)}]\}dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx,$$

bulunur. Bu son denklemde

$$\int_a^b (u L[v] - v L[u]) dx = 0,$$

özdeşliği kullanılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx,$$

dır.

Böylece $\lambda = \bar{\lambda}$ elde edilir. Bu λ nin reel olduğunu gösterir.

TEOREM 1.2. (1.2) - (1.3) Sturm-Liouville probleminin farklı öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogonaldır [14].

İSPAT: $\lambda_n \neq \lambda_m$ iki farklı öz değer ve bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla u_n ve u_m olsun. $\langle u_n, u_m \rangle = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$-u_n'' + q(x) u_n = \lambda_n u_n,$$

$$-u_m'' + q(x) u_m = \lambda_m u_m,$$

denklem sisteminde ilk denklem u_m ile ikinci denklem u_n çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa

$$-u_n'' u_m + u_m'' u_n = (\lambda_n - \lambda_m) u_n u_m,$$

olup, her iki tarafın a' dan b' ye integrali alınır ve sınır koşulları uygulanırsa

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b u_n u_m dx = 0,$$

olur ve $\lambda_n \neq \lambda_m$ olmak üzere ortogonalite elde edilir [14].

TANIM 1.7. (Özfonksiyonların sıfırları - Nodal noktalar)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

problemini göz önüne alalım. Bu problemin $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots$ özdeğerlerine

karşılık gelen öz fonksiyonları $y_0 = 0, y_1 = \cos x, \dots, y_n = \cos nx, \dots$ şeklindedir. Bu öz fonksiyonların sıfırlarına nodal noktalar denir [14].

TEOREM 1.3 (Ambarzumyan Teoremi) $q(x) \in C[0, \pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ 'ler

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) \equiv 0$ dır [15].

2.STURM-LIOUVILLE FARK DENKLEMLERİ

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$, ...türevleri ile belirlenmesine rağmen bu durum x' in kesikli değer alması halinde geçerli değildir.

Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar yöntemi, sürekli bir sistem olarak tanımlanan sınır değer problemini, düğüm noktası olarak adlandırılan belirli sayıda noktaya bölerek kesikli bir sistem haline dönüştürür. Böylece sınır değer problemi çözülmesi gereken cebirsel eşitlik haline gelir.

Sonlu farklar metodu basit bir algoritmayla şöyle özetlenebilir:

1. Bağımsız değişken için incelenen kesikli sistem eşit aralıklara bölünür.
2. Diferansiyel denklemde bulunan türev ifadeleri yerine Taylor serilerini açılımından gelen formül kullanılarak, her bir noktadaki türevlerin karşılığı hesaplanır.
3. Sonuçta ortaya çıkan sonlu sayıda bilinmeyenden oluşan denklem sistemi ya doğrudan ya da iteratif yöntemler kullanılarak çözülür ve yaklaşık sonuçlar bulunmuş olur [16].

Tanım 2.1

$$\mathcal{G} = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$$

ayrık noktalar kümesine $[a, b]$ ' de tanımlanan düzgün olmayan bir parçalanmanın kümesi, x_j noktalarına ise düğüm noktaları denir. Eğer düğüm noktaları eşit aralıklı iseler buna düzgün parçalanmış kümeler denir [14].

$$\mathcal{G}_h = \left\{ x_j \mid x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, n, n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+1} \right\}$$

h sabitine fark aralığı denir. $\mathcal{G}$ kümesinde tanımlanmış $y(x)$ fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir ($y(x_j) = y_j \quad x \in \mathcal{G}$) [14].

$y(x)$ fonksiyonunun x_j noktasında ileri, geri ve merkezi fark türevleri vardır. Eğer $y(x)$ yeterince düzgün, yani $[a, b]$ 'de türevleri varsa, bu fark türevlerinin her biri $h \rightarrow 0$ durumunda $y'(x_j)$ değerine yaklaşacaktır [14].

$$y_{x,j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} \text{ ileri fark türevi}$$

$$y_{\bar{x},j} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h} = \frac{y(x_j) - y(x_j - h)}{h} \text{ geri fark türevi}$$

$$y_{0_{x,j}} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{h} = \frac{y(x_j + h) - y(x_j - h)}{2h} \text{ merkezi fark türevi [14]}$$

$y(x) \in C^2[a, b]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Taylor seri açılımından;

$$y_{j+1} = y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \quad \xi \in (x_j, x_{j+1})$$

$$\frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} = y'(x_j) + \frac{h}{2} y''(\xi)$$

$y(x) \in C^2[a, b]$ olduğundan $y_{x,j} \approx y'(x_j)$ olur.

Benzer şekilde;

$$y_{j-1} = y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \quad \xi \in (x_j, x_{j+1})$$

$y(x) \in C^2[a, b]$ olduğundan $y_{\bar{x},j} \approx y'(x_j)$ olur.

Fark türevlerinin kesinliği hem fonksiyonun düzgünlüğüne hem de düğüm noktalarının yerleşimine bağlıdır [14].

$$y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots$$

ve

$$y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots$$

Bu denklemler taraf tarafa toplandığında

$$y(x_j + h) + y(x_j - h) \approx 2 y(x_j) + h^2 y''(x)$$

ifadesi elde edilir.

$$y''(x) \approx \frac{y(x_j + h) - 2y(x_j) + y(x_j - h)}{h^2} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \text{ [17]}$$

olur.

Tanım 2.2

Bir $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

şeklinde tanımlanır ve Δx_k fonksiyonuna, x' in **birinci basamaktan farkı** denir. Buna göre x' in **ikinci basamaktan farkı** ($\Delta^2 x_k$)

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_k &= \Delta (\Delta x_k) \\ &= \Delta (x_{k+1} - x_k) \\ &= \Delta x_{k+1} - \Delta x_k \\ &= (x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k) \\ &= x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır [17].

x' in tamsayı değerler aldığı durumda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların ($\Delta x_k, \Delta^2 x_k$) bulunduğu denklemlere **fark denklemleri** denir. Bir fark denkleminin **mertebesi** denklemde bulunan en büyük ve en küçük indislerin farkıdır. Eğer bağımlı değişken birinci dereceden ise bu tür denkleme **lineerdir** denir [17].

$$x_{k+1} - x_k = 0 \text{ (birinci mertebeden lineer),}$$

$$x_{k+3} - \cos(x_k) = 0 \text{ (üçüncü mertebeden lineer değil).}$$

Sturm-Liouville Fark Denklemini Çıkarılışı

a_{n-1}, a_n ve b_n n' nin fonksiyonları olmak üzere,

$$a_{n-1}y_{n-1} - b_n y_n + a_n y_{n+1} = 0, \quad (2.1)$$

ikinci mertebeden homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklem:

$$\Delta(p_{n-1}\Delta y_{n-1}) + s_n y_n = 0, \quad (2.2)$$

p_n ve s_n fonksiyonlarının uygun seçilmesiyle (2.2) denklemi,

$$p_n y_{n+1} - (p_n + p_{n-1} - s_n) y_n + p_{n-1} y_{n-1} = 0 \quad (2.3)$$

şekline dönüşür. (2.1) denklemini ile (2.3) denklemini karşılaştırdığımızda,

$$\left. \begin{aligned} p_n &= a_n, \\ -b_n &= p_n + p_{n-1} - s_n \\ p_{n-1} &= a_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

elde edilir. Birinci ve üçüncü ifadeleri oranlarsak;

$$p_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} p_{n-1}, \quad (2.5)$$

bulunur. (2.4) denklemini s_n için çözüp,

$$\frac{p_n}{a_n} = 1, \quad (2.6)$$

eşitliğini kullanırsak;

$$s_n = p_n + p_{n-1} + b_n = p_n + p_{n-1} + \left(b_n / a_n \right) p_n \quad (2.7)$$

elde edilir. a_{n-1}, a_n ve b_n n' nin fonksiyonları olduğu için, (2.5) p_n' i bulmak için kullanılabilir. λ bağımsız bir parametre olmak üzere,

$$s_n = \lambda - q_n \quad (2.8)$$

olsun. Bu durumda (2.2) denklemini,

$$-\Delta(p_{n-1} \Delta y_{n-1}) + (\lambda - q_n) y_n = 0 \quad (2.9)$$

şeklini alır. Bu denkleme Sturm-Liouville fark denklemi denir [18].

Örnek 2.1

$$\Delta^2 y_{n-1} + \lambda y_n = 0, \quad n \in (0,4),$$

$$y_0 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Sturm-Liouville probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{n-1} + \lambda y_n &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n + \lambda y_n \\ &= y_{n+2} + (\lambda - 2)y_{n+1} + y_n. \end{aligned}$$

Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{(2-\lambda) \pm \sqrt{(\lambda-2)^2 - 4}}{2}.$$

Burada $|(\lambda - 2)| \leq 2$ için $(2 - \lambda) = 2 \cos \theta$ olsun. Böylece

$$m_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta,$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin genel çözümü;

$$y_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta.$$

Sınır şartlarını yerine yazarsak

$$y_0 = A = 0,$$

$$y_4 = B \sin 4\theta = 0.$$

$B \neq 0$ olduğundan $\sin 4\theta = 0$ ve $\theta_k = \frac{k\pi}{4}$, ($k = 1, 2, 3$) bulunur. Yukarıda yerine yazılırsa problemin öz değer ve öz fonksiyonları sırası ile

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{4} \quad (k = 1, 2, 3) \quad y_k = \sin \frac{k\pi}{4}, \quad (k = 1, 2, 3) \text{ elde edilir.}$$

Sürekli ve Kesikli Durumda Probleminin Özellikleri

Bu bölümde aşağıda genel sınır şartları ile verilen Liouville normal formundaki öz değer probleminin sürekli ve kesikli durumlarda öz değerlerini bulup, bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonları hesaplayacağız.

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (2.10)$$

$$\alpha_1 y'(0) - \alpha_2 y(0) = 0, \quad \beta_2 y'(\pi) + \beta_1 y(\pi) = 0. \quad (2.11)$$

problemini göz önüne alalım.

(2.11)' de verilen sınır şartları sonlu farklar yaklaşımı ile yazmak istersek,

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f_x}{h} \quad (h \text{ adım aralığı})$$

$$y' \sim \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h}.$$

$$y'' = (y')' = \frac{\Delta y'}{h} = \frac{\frac{\Delta y_j - \Delta y_{j-1}}{h}}{h} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}$$

$$y'' \sim \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\alpha_1 \frac{(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_{-1})}{2h} - \alpha_2 \frac{(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{-1})}{2} = 0, \quad (2.12)$$

$$\beta_2 \frac{(\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_{n-1})}{2h} + \beta_1 \frac{(\tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_{n-1})}{2} = 0, \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan;

$\lambda_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ problemin öz değerleri ve

$$\mathcal{G}^* = \{x_j | x_j = jh, j = -1, 0, 1, \dots, n, n+1, h = \pi/n\}, \quad (2.14)$$

olmak üzere ,

$$(-L + Q) \tilde{y} = \lambda^{(n)} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = [\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]^T, \quad (2.15)$$

kesikli (diskret) durumdaki öz değer problemini ifade eder.

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + q_j y_j = \lambda^{(n)} y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

olmak üzere (2.12) ve (2.13) sınır şartları kullanılarak n bilinmeyenli n tane $(y_0, y_1, \dots, y_n)$

bir denklem elde ederiz. Bu denklem sistemini katsayılar matrisler yardımıyla gösterebiliriz.

Şöyleki;

$$j=0 \text{ için } \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + q_0 y_0 = \lambda^{(n)} y_0 \text{ olur. (2.12) sınır şartından } y_{-1} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 h}{\alpha_1 + \alpha_2 h} y_1$$

bulunur. Denklemde yerine yazarsak;

$$\frac{-2y_0 + (2\alpha_1/\alpha_1 + h\alpha_2)y_1}{h^2} + q_0 y_0 = \lambda^{(n)} y_0 \text{ elde ederiz. Aynı şekilde } j=n \text{ için, (2.13)}$$

sınır şartından $y_{n+1} = \frac{\beta_1 - \beta_2 h}{\beta_1 + \beta_2 h} y_{n-1}$ bulunur. Denklemde yerine yazarsak;

$$\frac{-2y_n + (2\beta_1/\beta_1 + h\beta_2)y_{n-1}}{h^2} + q_n y_n = \lambda^{(n)} y_n \text{ elde ederiz. Böylece sistemin}$$

katsayılar matrisi olan L

$$L = h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 2\alpha_1/(\alpha_1 + h\alpha_2) & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2\beta_1/(\beta_1 + h\beta_2) & -2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

olmak üzere;

$$(-L + Q) \tilde{y} = \lambda^{(n)} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = [\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n]^T,$$

denklemini elde edilir. Burada

$$Q = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_n), \quad q_j = q(x_j), \quad \tilde{y}_j \approx y_j = y(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \text{ dir.}$$

Eğer $Q = 0$ ise, yukarıdaki problemten

$$-u'' = \gamma u, \quad u = u(x), \quad -u'' = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (2.17)$$

$$\alpha_1 u'(0) - \alpha_2 u(0) = 0, \quad \beta_1 u'(\pi) + \beta_2 u(\pi) = 0, \quad (2.18)$$

ve $\gamma_k^{(n)}$ öz değeri olduğu diskret cebirsel problemide

$$-L \tilde{u} = \gamma^{(n)} \tilde{u}, \quad \tilde{u} = [\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n]^T, \quad (2.19)$$

olur.

Bu çalışmanın ilerleyen kısımlarında

$$\hat{q}_1(x) = \int_0^x q(\tau) d\tau,$$

ve

$$\sum' a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + \frac{1}{2} a_n$$

notasyonlarını kullanacağız.

Teorem 2.1. (2.17) ve (2.18) problemi için özfonksiyon ve özdeğerleri sırasıyla;

$$\gamma = \mu^2, \quad u(x) = \cos(\mu x + \phi), \quad (2.20)$$

$\phi = O(k^{-1})$ ve $\mu = O(k)$, olmak üzere

özdeğerleri

$$\mu = k - 1 + \frac{\sin^{-1}(\beta_2/\beta_2^2 + \beta_1^2\mu^2) + \sin^{-1}(\alpha_2/\alpha_2^2 + \alpha_1^2\mu^2)}{\pi} \quad (2.21)$$

dir [1,2].

İspat (2.17) ve (2.18) sınır değer probleminin genel çözümü;

$$u(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

şeklindedir. Şimdi sınır şartlarını uygulayalım. Teoremden de belirttiği gibi Dirichlet şartlarını dahil etmeyeceğiz yani;

$$i) u'(0) = 0, \quad \beta_1 u'(\pi) + \beta_2 u(\pi) = 0,$$

$$ii) u'(\pi) = 0, \quad \alpha_1 u'(0) - \alpha_2 u(0) = 0,$$

durumlarını inceleyeceğiz. İlk olarak birinci sınır koşullarına bakalım.

$$u'(x) = -A \mu \sin(\mu x) + B \mu \cos(\mu x)$$

$$u'(0) = B \mu = 0, \quad B = 0$$

olur. Böylece $u(x) = \cos(\mu x)$ olur. Şimdi diğer sınır şartını uygulayalım.

$$u'(x) = -\mu \sin(\mu x).$$

$$-\beta_1 \mu \sin(\mu \pi) + \beta_2 \cos(\mu \pi) = 0,$$

$$\tan(\mu \pi) = \frac{\beta_2}{\beta_1 \mu}, \quad \sin(\mu \pi) = \beta_2 / \beta_2^2 + \beta_1^2 \mu^2, \quad \mu = k - 1 + \frac{\sin^{-1}(\beta_2 / \beta_2^2 + \beta_1^2 \mu^2)}{\pi},$$

bulunur.

Şimdi ikinci durumu inceleyelim.

$$u'(\pi) = -A \mu \sin(\mu \pi) + B \mu \cos(\mu \pi) = 0 \quad B = A \tan(\mu \pi) \text{ olur.}$$

$\alpha_1 u'(0) - \alpha_2 u(0) = 0$ durumuna bakalım.

$$B \alpha_1 \mu - \alpha_2 A = 0, \quad A \alpha_1 \mu \tan(\mu \pi) - A \alpha_2 = 0, \quad \tan(\mu \pi) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \mu},$$

$$\sin(\mu\pi) = \alpha_2/\alpha_2^2 + \alpha_1^2\mu^2, \quad \mu = k - 1 + \frac{\sin^{-1}(\alpha_2/\alpha_2^2 + \alpha_1^2\mu^2)}{\pi} \text{ olur.}$$

Birinci ve ikinci durumdan,

$$\mu = k - 1 + \frac{\sin^{-1}(\beta_2/\beta_2^2 + \beta_1^2\mu^2) + \sin^{-1}(\alpha_2/\alpha_2^2 + \alpha_1^2\mu^2)}{\pi}$$

ve öz fonksiyonları ise

$$u(x) = \cos(\mu x + \phi),$$

olur.

Teorem 2.2 (2.10) ve (2.11) Liouville normal form için;

$$y(x) = \cos(\mu x + \phi) + \frac{1}{2\mu} \sin(\mu x + \phi) \hat{q}_1(x) + \frac{1}{4\mu^2} \left\{ q(x) \cos(\mu x + \phi) - q(0) \cos(\mu x - \phi) - \frac{1}{2} \hat{q}_1^2(x) \cos(\mu x + \phi) \right\} + O(k^{-3}). \quad (2.22)$$

İspat Klasik Sturm-Liouville operatörü

$$f(x) = (\lambda - \gamma - q(x))y(x), \quad \text{olmak üzere} \quad -y'' - \gamma y = f(x)$$

şeklinde yeniden yazılabilir . y_c homojen kısmın çözümü, y_p özel çözüm olmak üzere

$y = y_c + y_p$ genel çözümü bulalım.

$y_c = \cos(\mu x + \phi)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi y_p özel çözümünü bulalım.

$$y_p = K_1 \cos(\mu x + \phi) + K_2 \sin(\mu x + \phi), \quad \mu^2 = \gamma.$$

$$y'_p = K_1' \cos(\mu x + \phi) + K_2' \sin(\mu x + \phi) - K_1 \mu \sin(\mu x + \phi) + K_2 \mu \cos(\mu x + \phi).$$

$$K_1' \cos(\mu x + \phi) + K_2' \sin(\mu x + \phi) = 0 \text{ kabul edelim.} \quad (2.23)$$

O halde;

$$y'_p = -K_1 \mu \sin(\mu x + \phi) + K_2 \mu \cos(\mu x + \phi) \text{ olur.}$$

$$y''_p = -\mu K_1' \sin(\mu x + \phi) + \mu K_2' \cos(\mu x + \phi) - \mu^2 K_1 \cos(\mu x + \phi) - \mu^2 K_2 \sin(\mu x + \phi)$$

$-y'' - \gamma y = f(x)$ denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& \mu K_1' \sin(\mu x + \phi) - \mu K_2' \cos(\mu x + \phi) + \mu^2 K_1 \cos(\mu x + \phi) + \mu^2 K_2 \sin(\mu x + \phi) - \\
& \mu^2 (K_1 \cos(\mu x + \phi) + K_2 \sin(\mu x + \phi)) = f(x), \\
& \mu K_1' \sin(\mu x + \phi) - \mu K_2' \cos(\mu x + \phi) = f(x)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

olur. (2.23) ve (2.24) denklem sisteminde Cramer yöntemini kullanırsak,

$$K_1 = \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu \tau + \phi) f(\tau) d\tau, \quad K_2 = -\frac{1}{\mu} \int_0^x \cos(\mu \tau + \phi) f(\tau) d\tau.$$

bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned}
y_p &= K_1 \cos(\mu x + \phi) + K_2 \sin(\mu x + \phi) \\
&= \cos(\mu x + \phi) \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu \tau + \phi) f(\tau) d\tau - \sin(\mu x + \phi) \frac{1}{\mu} \int_0^x \cos(\mu \tau + \phi) f(\tau) d\tau \\
y_p &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \cos(\mu x + \phi) \sin(\mu \tau + \phi) f(\tau) d\tau - \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu x + \phi) \cos(\mu \tau + \phi) f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\mu} \left[\int_0^x (\cos(\mu x + \phi) \sin(\mu \tau + \phi) - \sin(\mu x + \phi) \cos(\mu \tau + \phi)) f(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - \tau)) f(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Böylece

$$y(x) = \cos(\mu x + \phi) - \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - \tau)) (\lambda - \mu^2 - q(\tau)) y(\tau) d\tau \quad \text{elde edilir.} \tag{2.25}$$

$$\mu = O(k), \quad \lambda - \mu^2 = O(1), \quad \int_0^x \dots d\tau = O(1),$$

olmak üzere

$$y(x) = \cos(\mu x + \phi) + O(\mu^{-1}) \text{ olur.}$$

Picard iterasyonunu (2.25)' ya uygularsak

$$y(x) = \cos(\mu x + \phi) - \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - \tau)) (\lambda - \mu^2 - q(\tau)) (\cos(\mu \tau + \phi) + O(\mu^{-1})) d\tau$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \cos(\mu x + \phi) - \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - \tau))(\lambda - \mu^2 - q(\tau))(\cos(\mu\tau + \phi)) d\tau - \\
&\quad \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - \tau))(\lambda - \mu^2 - q(\tau))O(\mu^{-1})d\tau \\
y(x) &= \cos(\mu x + \phi) - \frac{1}{\mu} \int_0^x \left[\frac{\sin(\mu x + \phi) + \sin(\mu(x - 2\tau) - \phi)}{2} \right] (\lambda - \mu^2 - q(\tau))d\tau \\
&\quad - \frac{1}{\mu} O(\mu^{-1}) \int_0^x \sin(\mu(x - \tau))(\lambda - \mu^2 - q(\tau))d\tau \\
y(x) &= \cos(\mu x + \phi) - \frac{1}{2\mu} \int_0^x \sin(\mu x + \phi) ((\lambda - \mu^2 - q(\tau))d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - 2\tau) - \phi) ((\lambda - \mu^2 - q(\tau))d\tau + \frac{1}{\mu} O(\mu^{-1})O(1) \\
y(x) &= \cos(\mu x + \phi) - \frac{1}{2\mu} \sin(\mu x + \phi) \int_0^x ((\lambda - \mu^2))d\tau - \frac{1}{2} \sin(\mu x + \phi) \int_0^x q(\tau)d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\mu} O(1) + O(\mu^{-2}) \\
y(x) &= \cos(\mu x + \phi) + \frac{x}{2\mu} (\mu^2 - \lambda) \sin(\mu x + \phi) + \frac{1}{2\mu} \hat{q}_1(x) \sin(\mu x + \phi) + O(k^{-2}) \quad (2.26)
\end{aligned}$$

olur.

Lemma 2.1.

$$\lambda - \mu^2 = O(k^{-2}) \quad (2.27)$$

dir [2].

Teoremin (2.11) ispatını tamamlamak ve

$$y(x) = \cos(\mu x + \phi) + \frac{1}{2\mu} \hat{q}_1(x) \sin(\mu x + \phi) + O(k^{-2}), \quad (2.28)$$

$$y(x) = \cos(\mu x + \phi) + \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x - \tau))(\cos(\mu\tau + \phi))q(\tau) d\tau + O(\mu^{-2}). \quad (2.29)$$

(2.28) ve (2.29) elde etmek için (2.25) ve (2.26) denklemlerinde $\lambda - \mu^2$ ifadesi yerine $O(k^{-2})$ yazılmalıdır. Picard iterasyonunun yeniden uygulanması ile istenilen sonuca ulaşılır.

Lemma 2.2.

$$u_{j+1} - 2 \cos(\beta) u_j + u_{j-1} = d_j,$$

diferensiyel denkleminin özel çözümü;

$$u_j = \sum'' d_r \frac{\sin(\beta(j-r))}{\sin \beta}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n,$$

şeklindedir [2].

Teorem 2.3. (3.10)'daki diskret (kesikli) durumdaki Liouville normal form için;

$$\gamma^{(n)} = 4 \sin^2(\tilde{\mu}h/2)/h^2, \quad \tilde{\mu}_j = \cos(\tilde{\mu}x_j + \tilde{\phi}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

$$\tilde{\mu} = k - 1 + \frac{\{\sin^{-1}(\beta_2/(\beta_2^2 + \beta_1^2 \hat{\mu}^2)^{1/2}) + \sin^{-1}(\alpha_2/(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \hat{\mu}^2)^{1/2})\}}{\pi}, \quad (2.32)$$

olup, burada

$$\hat{\mu} = \sin(\tilde{\mu}h)/h. \quad (2.33)$$

İspat (2.19)'daki denklemi sonlu farklar yaklaşımıyla yeniden yazarsak;

$$\frac{\tilde{y}_{k+1} - 2\tilde{y}_k + \tilde{y}_{k-1}}{h^2} = \gamma^{(n)} \tilde{y}_k,$$

$$\tilde{y}_{k+1} + \tilde{y}_k (h^2 \gamma^{(n)} - 2) + \tilde{y}_{k-1} = 0$$

olur.

$$m^2 + m(h^2 \gamma^{(n)} - 2) + 1 = 0,$$

karakteristik denkleminin çözümü

$$m_{1,2} = \frac{(2 - \gamma^{(n)} h^2) \pm \sqrt{(2 - \gamma^{(n)} h^2)^2 - 4}}{2}$$

olup

$$2 - \gamma^{(n)} h^2 = 2 \cos \theta, \quad \gamma^{(n)} h^2 = 2 - 2 \cos \theta = 2(1 - \cos \theta) = 2 \left[1 - (1 - 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})) \right].$$

$$\gamma^{(n)} h^2 = 4 \sin^2(\frac{\theta}{2}), \quad \gamma^{(n)} = 4 \sin^2(\theta/2)/h^2 \text{ olur. } \theta = \tilde{\mu}h \text{ alırsak;}$$

$$\gamma^{(n)} = 4 \sin^2(\tilde{\mu}h/2)/h^2, \quad \tilde{\mu}_j = \cos(\tilde{\mu}x_j + \tilde{\phi}), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$\tilde{\mu} = k - 1 + \frac{\{\sin^{-1}(\beta_2/(\beta_2^2 + \beta_1^2 \hat{\mu}^2)^{1/2}) + \sin^{-1}(\alpha_2/(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \hat{\mu}^2)^{1/2})\}}{\pi},$$

$$\hat{\mu} = \sin(\tilde{\mu}h)/h.$$

elde ederiz [2].

Theorem 2.4. (2.15)' daki kesikli durumdaki Liouville normal formu için [2]

$$\tilde{y}_j = \cos(\tilde{\mu}x_j + \tilde{\phi}) + \frac{h}{2 \sin(\tilde{\mu}h)} \sin(\tilde{\mu}x_j + \tilde{\phi}) \hat{q}_1(x_j) + \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{h}{\sin(\tilde{\mu}h)}\right)^2 \left\{ \cos(\tilde{\mu}h) [q(x_j) \cos(\tilde{\mu}x_j + \tilde{\phi}) - q(0) \cos(\tilde{\mu}x_j - \tilde{\phi})] - \frac{1}{2} \hat{q}_1^2(x_j) \cos(\tilde{\mu}x_j + \tilde{\phi}) \right\} + O(k^{-3}) \text{ dir.}$$

3. Sturm-Liouville Fark Problemi İçin Çözümlerin Asimptotiği

Bu bölümde sonlu farklar metodunu kullanarak verilen Sturm Liouville problemini ele alacağız.

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

problemi verilsin.

$$\mathcal{G}^* = \left\{ x_j \mid x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, n, n+1, \quad h = \frac{\pi}{n+1} \right\} \quad (3.3)$$

olmak üzere verilen (3.1) ve (3.2) denklemi sonlu farklar metodunu yardımıyla

$$-\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + q_j y_j = \lambda y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, n+1 \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Sınır şartları ise

$$\begin{aligned} y(0) &= y(x_0) = y_0 = 0 \\ y(\pi) &= y(x_{n+1}) = y_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak yazılır.

Sınır şartları kullanılarak n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan bir sistem yazılabilir. Bu denklem sistemini katsayılar matrisler yardımıyla gösterebiliriz. Şöyleki;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) &= \lambda y_1 \\ -\frac{1}{h^2} (y_1 - 2y_2 + y_3) &= \lambda y_2 \\ -\frac{1}{h^2} (y_2 - 2y_3 + y_4) &= \lambda y_3 \\ &\vdots \\ -\frac{1}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) &= \lambda y_n \end{aligned}$$

olmak üzere

$$L = h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

simetrik olan L matrisini elde ederiz.

$$(-L + Q) y = \lambda^{(n)} y, \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T,$$

$$Q = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_n), \quad q_j = q(x_j), \quad y_j = y(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, n+1$$

problemi (3.4)-(3.5) probleminin cebirsel gösterimidir. $Q = 0$ durumunda diskret cebirsel probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulacağız.

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + \lambda y_j = 0$$

$$y(0) = y(x_0) = y_0 = 0$$

$$y(\pi) = y(x_{n+1}) = y_{n+1} = 0$$

Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$m^2 + (\lambda h^2 - 2)m + 1 = 0$$

olmak üzere;

$$m_{1,2} = \frac{(2 - \lambda h^2) \pm \sqrt{(\lambda h^2 - 2)^2 - 4}}{2}$$

bulunur. Burada $|(\lambda h^2 - 2)| \leq 2$ için $(2 - \lambda h^2) = 2 \cos \theta$ olsun. Bu durumda

$$m_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta,$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin genel çözümü;

$$y_j = A \cos j\theta + B \sin j\theta$$

olup, sınır şartlarını yerine yazarsak

$$y_0 = A = 0, \text{ ve } y_{n+1} = B \sin(n+1)\theta = 0$$

$B \neq 0$ olduğundan $\sin(n+1)\theta = 0$ ve $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} = kh$ ($k = 1, 2, \dots, n$) bulunur. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa sırayla problemin öz değer ve öz fonksiyonları,

$$\lambda_k = \frac{2 - 2 \cos kh}{h^2} = \frac{4 \sin^2(hk/2)}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$y_j = y(x_j) = \sin k j h = \sin k x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olur.

Lemma 3.1

$k \leq n$ ve $q(x_j) = O(1)$, $j = 0, 1, \dots, n+1$ ve $|\lambda_k^{(n)} - \mu_k^{(n)}| = O(1)$ $k = 1, 2, \dots, n$

olmak üzere y_j nin genel çözümü

$$y_j = \sin k x_j + \frac{h^2}{\sin kh} \sum_{l=0}^j \sin k(x_j - x_l) \{ \lambda_k^{(n)} - \mu_k^{(n)} + q_l \} y_l$$

dir [19].

Ayrıca,

$$\sum_{l=0}^j \sin k(x_j - x_l) \{ \lambda_k^{(n)} - \mu_k^{(n)} + q_l \} y_l = O\left(\frac{1}{h}\right) \quad \text{ve} \quad kh/\sin kh = O(1)$$

olmak üzere

$$y_j = \sin k x_j + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

olur [19].

3.1. Özdeğer ve Özfonksiyon İçin Asimptotik Formüller

$$y_j = \sin k x_j + \frac{h^2}{\sin kh} \sum_{l=0}^j \sin k(x_j - x_l) \{ \lambda_k^{(n)} - \mu_k^{(n)} + q_l \} y_l$$

ifadesinde

$$y_l = \sin k x_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

yerine yazılıp

$$y_j = \sin kx_j + \frac{h^2}{\sin hk} \sum_{l=0}^j \sin k(x_j - x_l) q_l \sin kx_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sin k(x_j - x_l) \sin kx_l = \sin kx_l (\sin kx_j \cos kx_l - \sin kx_l \cos kx_j)$$

$$\sin k(x_j - x_l) \sin kx_l = \sin kx_l \cos kx_l \sin kx_j - \sin^2 kx_l \cos kx_j$$

$$\sin k(x_j - x_l) \sin kx_l = \frac{1}{2} \sin 2kx_l \sin kx_j - \left(\frac{1 - \cos 2kx_l}{2}\right) \cos kx_j$$

trigonometrik özdeşlikleri kullanılırsa

$$y_j = \sin kx_j - \frac{h^2}{2 \sin hk} \cos kx_j \sum_{l=0}^j q_l + \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j (\sin 2kx_l \sin kx_j + \cos 2kx_l \cos kx_j) q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sin 2kx_l \sin kx_j + \cos 2kx_l \cos kx_j = \cos k(x_j - 2x_l)$$

$$\frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j \cos k(x_j - 2x_l) q_l = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$y_j = \sin kx_j - \frac{h^2}{2 \sin hk} \cos kx_j \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

şeklinde özfonksiyonlar için istenilen ifade elde edilir.

Şimdi özdeğerler için asimptotik ifadeyi elde etmeye çalışalım.

$q = 0$ için

$$\lambda_k = \frac{2 - 2 \cos hk}{h^2} = \frac{4 \sin^2(hk/2)}{h^2} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere kosinüs fonksiyonunun seri açılımından

$$\lambda_k = \frac{2 - 2 \left(1 - \frac{(hk)^2}{2!} + \frac{(hk)^4}{4!} - \dots\right)}{h^2}$$

$$\lambda_k = \frac{k^2 h^2 - \frac{k^4 h^4}{12}}{h^2} = k^2 - \frac{k^4 h^2}{12} = k^2 + O(k^4 h^2)$$

olur. Diğer taraftan (3.4)-(3.5) probleminin özdeğerleri $y_{n+1} = 0$ eşitliğini sağlayan λ değerleri olduğundan

$$y_j = \sin kx_j - \frac{h^2}{2 \sin hk} \cos kx_j \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad j = \overline{0, n+1}$$

ifadesi $y_{n+1} = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sin kx_{n+1} - \frac{h^2}{2 \sin hk} \cos kx_{n+1} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

$$\tan kx_{n+1} = \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$kx_{n+1} = \tan^{-1} \left(\frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right) \right)$$

$\lambda_k \approx k^2$ olduğundan ($h \rightarrow 0$ iken)

$$\sqrt{\lambda_k} x_{n+1} = k\pi + \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_k} (n+1)h = k\pi + \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{(n+1)h} + \frac{h}{2(n+1) \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \frac{h}{2(n+1) \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\lambda_k = k^2 + \frac{hk}{(n+1) \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\lambda_k = \frac{4 \sin^2(hk/2)}{h^2} + \frac{hk}{(n+1) \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

şeklinde olur. Şimdi de normlaştırılmış özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edelim.

$$y_j = \sin kx_j + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$y_j^2 = \sin^2 x_j + \frac{2 \sin kx_j}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$y_j^2 = \sin^2 x_j + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\alpha_k = \|y_j\|^2 = \langle y_j, y_j \rangle = \sum_{j=0}^{n+1} h y_j^2 = \sum_{j=0}^{n+1} h \left(\sin^2 x_j + O\left(\frac{1}{k}\right) \right)$$

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{h}{2} - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{h}{2} \cos kx_j + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\alpha_k = (n+2) \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \cos kx_j + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\alpha_k = (n+2) \frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\alpha_k = (n+2) \frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

olur.

Nodal noktalar ve Nodal uzunluklar

$$y_j = \sin kx_j - \frac{h^2}{2 \sin hk} \cos kx_j \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad j = \overline{0, n+1}$$

olmak üzere

$$\tan kx_j = \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$kx_j = \tan^{-1} \left(\frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right) \right)$$

Arctan fonksiyonunun seri açılımından

$$kx_j = m\pi + \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_{l=0}^j q_l + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$q(x_j) = q_j$ olduğundan

$$k x_j = m\pi + \frac{h^2}{2 \sin hk} \sum_0^{x_j} q_l + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$x_j = \frac{m\pi}{k} + \frac{h^2}{2k \sin hk} \sum_{l=x_0}^{x_j} q_l + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$x_j^{(k,m)} = \frac{m\pi}{k} + \frac{h^2}{2k \sin hk} \sum_0^{x_j^{(k,m)}} q_l + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

ve nodal uzunluklar

$$l_j^{(k,m)} = \left| I_j^{(k,m)} \right| = x_j^{(k,m+1)} - x_j^{(k,m)}$$

$$l_j^{(k,m)} = \frac{\pi}{k} + \frac{h^2}{2k \sin hk} q_{x_j}^{(k,m+1)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

olarak elde edilir.

Teklik Teoremi

$$\Delta^2 y_{j-1} + (\lambda - q_j) y_j = 0$$

$$\Delta y_0 = 0 \quad (y_0 \neq 0)$$

$$\Delta y_n = 0 \quad (y_n \neq 0)$$

problemini ele alalım.

(3.4)- (3.5) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_k = \frac{4 \sin^2(hk/2)}{h^2} \text{ ise } q_j = 0 \text{ dir.}$$

İspat

$\lambda = 0$, $y_j \neq 0$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğer olsun. Bu durumda $q_j = \frac{\Delta^2 y_{j-1}}{y_j}$ olur.

$$\Delta\left(\frac{\Delta y_{j-1}}{y_{j-1}}\right) = \frac{y_{j-1} \Delta(\Delta y_{j-1}) - \Delta y_{j-1} \Delta y_{j-1}}{y_{j-1} y_j} = \frac{\Delta^2 y_{j-1}}{y_j} - \frac{(\Delta y_{j-1})^2}{y_{j-1} y_j}$$

olmak üzere;

$$q_j = \Delta\left(\frac{\Delta y_{j-1}}{y_{j-1}}\right) + \frac{(\Delta y_{j-1})^2}{y_{j-1} y_j}$$

bulunur.

$$\sum_{j=1}^n q_j = \sum_{j=1}^n \Delta \left(\frac{\Delta y_{j-1}}{y_{j-1}} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta y_{j-1})^2}{y_{j-1} y_j}$$

özdeğerlerin asimptotik formundan

$$\sum_{j=1}^n q_j = 0$$

olduğundan;

$$0 = \frac{\Delta y_n}{y_n} - \frac{\Delta y_0}{y_0} + \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta y_{j-1})^2}{y_{j-1} y_j} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta y_{j-1})^2}{y_{j-1} y_j} = 0 \Rightarrow \Delta^2 y_{j-1} = 0 \Rightarrow \Delta y_{j-1} = k(k \text{ sbt})$$

olup, denklemde yerine yazılırsa $q_j = 0$ elde edilir.

4. SONUÇ

Sürekli durumda klasik Sturm-Liouville problemi ele alınmasına rağmen kesikli durumda problem ile ilgili sonuçlar yeterli değildir. Özellikle spektral parametrelerin verilmesi ile potansiyel fonksiyon olan $q(x)$ 'in bulunması oldukça ilginçtir. Son zamanlarda özfonksiyonların sıfırları olan nodal noktalar yardımıyla potansiyel fonksiyonun bulunması popüler bir meseledir. Kesikli durumda bu sonuçları elde etmek bu alanda önem teşkil ettiğinden bu çalışmada öncelikle problem ile ilgili özfonksiyon ve özdeğerlerin asimptotik formunu elde ettik.



KAYNAKLAR

1. **R. S. Anderssen and F. R. De Hoog**, On the correction of finite difference eigenvalue approximation for Sturm-Liouville problems with general boundary conditions, BIT 24 (1984), 401-402
2. **R. S. Anderssen and F. R. De Hoog**, Asymtotic formulas for discrete eigenvalue problems in Liouville normal form, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 11, No.1 (2001), 43-56
3. **A. L. Andrew and J. W. Paine**, Correction of Numerov's eigenvalue estimates, Numer. Math. 47 (1985), 289-300
4. **A. L. Andrew and J. W. Paine**, Correction of finite element estimates for Sturm-Liouville eigenvalues, Numer. Math. 50 (1986), 205-215
5. **A. L. Andrew**, Asymptotic correction of finite difference eigenvalues, in Computational Techniques and Applications: CTAC85, eds. J. Noye and R. May(North-Holland, 1986), pp. 333-341
6. **A. L. Andrew**, Correction of finite element eigenvalues for problems with natural or periodic boundary conditions, BIT 28 (1985), 254-269
7. **A. L. Andrew**, Efficient computation of higher Sturm-Liouville eigenvalues, in Numerical Mathematics Singapore 1988, Internat. Ser. Numer. Math. Vol.86 (Birkhauser, 1988), pp. 1-9
8. **A. L. Andrew**, Some recent developments in inverse eigenvalue problems, in Computational Techniques and Applications: CTAC93, eds. D. Stuart, H. Gardner And D. Singleton (World Scientific, 1994), pp. 94-102
9. **G. Fix**, Asymptotic eigenvalues for Sturm-Liouville systems, J. Math. Anal. Appl. 19 (1967), 519-525
10. **J. W. Paine and F. R. De Hoog**, Uniform estimation of the eigenvalues of Sturm-Liouville problems, J. Aust. Math. Soc., Series B 21 (1980), 365-383
11. **S. Pruess**, High order approximations to Sturm-Liouville eigenvalues, Numer. Math. 24 (1975), 241-247
12. **J. H. Wilkinson**, The Algebraic Eigenvalue Problem(The Clarendon Press, 1965), Chap. 2.
13. **E. Kreyzig**, Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons (1978), New York,

14. **B. M Levitan, and I. S, Sargsjan**, Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1975)
15. **V. A. Ambartsumyan**, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschrift für Physik, 53, (1929), 690-695
16. **G. Yıldız**, Regüler Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri İçin Asimptotik Formüller ve Nümerik yaklaşımlar, *Doktora Tezi*, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul , (2008)
17. **H. Bereketoğlu, V. Kutay**, Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara, (2012)
18. **M. Başbük**, Sturm- Liouville Fark Operatörünün Spektral Özellikleri, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Nevşehir, (2010)
19. **J. W. Paine, R. S. Anderssen and F. R. De Hoog**, On the Correction of Finite Difference Eigenvalue Approximations for Sturm-Liouville Problems, Computing 26 123-139, (1981)

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2006 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen aynı anabilim dalında tezli yüksek lisans yapmaktayım.

