

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**DOĞRUSAL VE ARDIŞIK n -DEN k -ÇIKIŞLI
SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİK ANALİZİ**

Hülya USLU

**Yüksek Lisans Tezi
Anabilim Dalı: İstatistik
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Gökhan GÖKDERE**

EKİM-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL VE ARDIŞIK n -DEN k -ÇIKIŞLI
SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya USLU

151133104

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 10.10.2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 26.10.2017

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Gökhan GÖKDERE (F.Ü.)

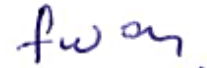


Diğer Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Sinan ÇALIK (F.Ü.)



Yrd. Doç. Dr. Fahrettin ÖZBEY (B.E.Ü.)



EKİM-2017

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, benden destek ve ilgisini esirgemeyen saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Gökhan Gökdere'ye çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Hülya USLU
EKİM-2017



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
TABLolar LİSTESİ	VI
KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. DAn, k, F SİSTEMİNİN GÜVENİLİRLİLİĞİ	3
2.1. Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Bileşenlerden Oluşan DAn, k, F Sisteminin Güvenilirliği	3
2.2. Bağımsız Fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Bileşenlerden Oluşan DAn, k, F Sisteminin Güvenilirliği	11
3. DAn, k, G SİSTEMİNİN GÜVENİLİRLİLİĞİ	13
4. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	18
KAYNAKÇA	19
ÖZGEÇMİŞ.....	21

ÖZET

Teknik bir sistemin çalışma performansının belirlenmesinde en önemli parametrelerden biri sistemin güvenilirliğidir. Bu parametre, sistemi oluşturan bileşenlerin karşılıklı bağlantılarına göre farklı şekillerde hesaplanabilmektedir. Paralel ve seri bağlı bileşenlerin bir araya gelmesinden oluşan sistemler, teknolojinin gelişmesiyle daha karmaşık bir hale gelmiştir. Bu gibi sistemlerde, sistemin bağlantı mekanizmalarını tanımlayabilmek için teorik olarak ardışık n -den k -çıkışlı teknik sistemler tasarlanmıştır. Bu tür sistemler, sistemi oluşturan bileşenlerin kendi aralarındaki mantıksal veya fiziksel bağlantılarına göre doğrusal veya dairesel olarak karakterize edilirler.

Bu çalışmada doğrusal ve ardışık n -den k -çıkışlı $F(G)$ sistemlerini inceleyeceğiz ve bu sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanmasında kullanılan yöntemleri vermeye çalışacağız.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal ve ardışık n -den k -çıkışlı $F(G)$ sistemi, sistem güvenilirliği

ABSTRACT

RELIABILITY ANALYSIS OF LINEAR AND CONSECUTIVE k -OUT-OF- n SYSTEMS

One of the most important parameters in determining the operational performance of a technical system is the reliability of the system. This parameter can be calculated differently depending on the mutual connections of the components that make up the system. Systems consisting of a combination of parallel and serial components have become more complex with the development of technology. In such systems, theoretically consecutive k -out-of- n technical systems is designed in order to define the connection mechanism of the system. Such systems are characterized by logical or physical connections among components in lines or circles.

In this study, we will examine the linear and consecutive k -out-of- $n:F(G)$ systems and try to give the methods used to calculate the reliability of these systems.

Key Words: Linear and consecutive k -out-of- $n:F(G)$ system, system reliability.

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. $n = 11$ ve $k = 3$ olduğu durum için T_k tablosu	9
---	---



KISALTMALAR LİSTESİ

$A(n, k)$: Ardışık n -den k -çıkışlı sistem

$DA(n, k, F)$: Doğrusal ve ardışık n -den k -çıkışlı F sistemi

$DA(n, k, G)$: Doğrusal ve ardışık n -den k -çıkışlı G sistemi

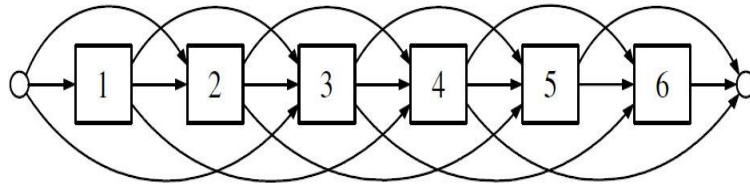


1. GİRİŞ

$A(n, k)$ sistem modelleri sistem güvenilirliğinin değerlendirilmesi ve entegre devrelerin, telekomünikasyondaki telsiz bağlantısı istasyonlarının, petrol boru hattı sistemlerinin, proton ve nötron iyonları gibi yoğun taneciklere büyük kinetik enerji sağlayan cihazlardaki vakum sistemlerinin ve uzay aracı röle istasyonlarının tasarlanmasında kullanılmaktadır. Bu tür sistemler, sistemi oluşturan bileşenlerin kendi aralarındaki mantıksal veya fiziksel bağlantılarına göre lineer veya dairesel olarak karakterize edilirler. Ayrıca bu tür sistemler, kullanıcı için önemli olan amaç doğrultusunda, sistemin çalışma prensibi üzerine oluşturulduğunda “ G ” sistemi, sistemin çalışmama prensibi üzerine oluşturulduğunda ise “ F ” sistemi olmak üzere iki şekilde ifade edilirler.

Kabul edelim ki, sistem doğrusal olarak sıralanmış n tane bileşenden oluşsun ve ancak n tane bileşenden ardışık olarak en az k tanesi arızalandığı zaman sistem arızalansın. Bu durumda bu yapı türüne $DA(n, k, F)$ sistemi adı verilir. Eğer aynı sistem, n tane bileşenden ardışık olarak en az k tanesi çalışır durumda ise sistem çalışır şeklinde tasarlanmış olsaydı bu durumda bu yapı $DA(n, k, G)$ sistemi olarak adlandırılırdı. $A(n, k)$ sistemleri özel olarak seri ve paralel sistemlerini kapsar. Örneğin $k = 1$ olduğu zaman $DA(n, k, F)$ sistemi seri sisteme ve $k = n$ olduğu zaman da paralel sisteme dönüşmüş olur.

Aşağıda verilen Şekil 1. ile $DA(6, 3, F)$ sistemi gösterilmektedir. Bu sistem için ardışık arızalı bileşenlerin sayısı 3’den az olduğu sürece kaynaktan alıcıya olan sinyal kesintiye uğramaz ve sonuç olarak sistem çalışmaya devam eder.



$A(n, k)$ sistemlerinin güvenilirliği ilk olarak Kontoleon [16] tarafından çalışılmıştır. Fakat buna karşılık bu sistemlerin detaylı olarak incelenmesi ve literatüre kazandırılması

Chiang ve Niu [6] tarafından olmuştur. Literatürde, bahsetmiş olduğumuz sistemlerin güvenilirliği hakkında çok sayıda çalışma mevcuttur [1-18].

$DA(n, k, F)$ ve $DA(n, k, G)$ sistemleri için daha net örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.1. (Telekom Şebekesinin Mikrodalga İstasyonları)

n tane mikrodalga istasyonundan oluşan bir Telekom şebekesinde mikro dalga istasyonları A noktasından B noktasına sinyalleri iletir. İstasyonlar, A ve B yerleri arasında eşit aralıklarla konumlandırılmış olsun. Her bir mikrodalga istasyonu sinyalleri kendinin de içinde bulunduğu k tane mikrodalga istasyonunu içeren uzaklığa iletebilme kapasitesine sahip olsun. Böyle bir sistemin, ancak en az k ardışık mikrodalga istasyonunun görevini yerine getirdiği durumda başarılı olacağı açıktır. Bahsetmiş olduğumuz bu sistem modeli $DA(n, k, G)$ sistemi için güzel bir örnek olmaktadır.

Örnek 1.2. (Petrol Boru Hattı Sistemi)

n tane pompa istasyonu ile A noktasından B noktasına petrol transfer eden bir petrol boru hattı sistemini ele alalım. Pompa istasyonları A ve B noktaları arasında eşit aralıklarla konumlandırılmış olsun. Kabul edelim ki her bir pompa istasyonu petrolü kendinin de içinde bulunduğu k tane pompa istasyonunu içeren uzaklığa transfer edebilme kapasitesine sahip olsun. Böyle bir sistemin, ancak en az k ardışık pompa istasyonunun görevini yerine getiremediği durumda başarısız olacağı açıktır. Bahsetmiş olduğumuz bu sistem modeli $DA(n, k, F)$ sistemi için güzel bir örnek olmaktadır.

$DA(n, k, F)$ sistemini ele almış olduğumuz bu çalışmada ilk olarak sistemi oluşturan bileşenlerin bağımsız ve aynı dağılımlı oldukları durum için sistem güvenilirliğinin nasıl hesapladığı verilecektir. Daha sonra sistem güvenilirliğinin sistemi oluşturan bileşenlerin bağımsız fakat aynı dağılımlı olmadıkları durumda nasıl hesaplanacağı gösterilecektir.

2. $DA(n, k, F)$ SİSTEMİNİN GÜVENİLİRLİLİĞİ

Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece aşağıdaki iki varsayımın her zaman geçerli olacağını varsayacağız:

1. Sistem ve bileşenleri yalnızca iki durumda olabilirler. Yani sistem ve bileşenler ya çalışır durumdadır ya da arızalı durumdadır.
2. Bileşenlerin arızalanmaları bağımsızdır. Yani sistemi oluşturan herhangi bir bileşenin arızalanması sistemdeki diğer bileşenleri etkilemez.

2.1. Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Bileşenlerden Oluşan $DA(n, k, F)$ Sisteminin Güvenilirliği

$DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplayabilmek için ilk olarak Chiang ve Niu [6] tarafından $DA(n, 2, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplamak için geliştirilen formülü inceleyelim. Kabul edelim ki j sistemdeki arızalı bileşenlerin sayısını göstere. Eğer

$$j > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

ise, o zaman birbirine bitişik olan bir çift arızalı bileşen olmalıdır. Sistemin çalışabilmesi için, j nin $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ den küçük veya eşit olması gerekir. Dolayısıyla arızalı iki bileşenin arasında en azından bir tane çalışan bileşenin olması sistemin arızalanmadan çalıştığı anlamına gelmektedir. Bu durumda, $DA(n, 2, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplamak için geliştirilecek olan formülde karşımıza bir problem çıkmaktadır. Buradaki problem, n tane bileşenden oluşan sistem için arızalı olarak kabul edilen j tane bileşenin ve geriye kalan $n - j$ tane çalışır durumdaki bileşenin bir doğru boyunca, iki arızalı bileşenin yan yana gelmemesi koşuluyla, nasıl düzenleneceğidir. Sonuç olarak bu problem aşağıdaki eşitlikle çözülür:

$$\binom{n-j+1}{j}.$$

Bu durumda, $DA(n, 2, F)$ sisteminin güvenilirliği

$$R(2, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-j+1}{j} q^j p^{n-j} \quad (1)$$

eşitliği ile kolaylıkla hesaplanabilir. (1) eşitliği $k = 2$ olduğu zaman sistemin güvenilirliğini hesaplamak için kullanışlı bir yöntem olarak öne sürülmüştür. Fakat k değerinin $2 \leq k \leq n-1$ olduğu genel bir durum için formül geliştirilmesi gerekmektedir. Bu durum aşağıdaki formda gösterilmiştir:

$$R(k, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} N(j, k, n) q^j p^{n-j} \quad (2)$$

Burada $N(j, k, n)$ ifadesi k veya daha fazla arızalı bileşenin yan yana olmaması koşulu ile arızalı durumdaki j tane bileşenin bir doğru boyunca kaç farklı şekilde düzenleneceğinin sayısını göstermektedir.

Derman ve arkadaşları [8] $N(j, k, n)$ ifadesinde $k = 3$ olduğu durum için aşağıdaki eşitliği elde etmişlerdir.

$$N(j, 3, n) = \sum_{i=n-2j-1}^{n-j+1} \binom{n-j+1}{j} \binom{n-j+1-i}{j-2i} \quad (3)$$

Ayrıca Derman ve arkadaşları [8], $N(j, k, n) = M(j, k-1, n-j+1)$ olmak üzere $N(j, k, n)$ için daha genel bir formülü aşağıda verilen lemma ile literatüre kazandırmışlardır.

Lemma 2.1.1.

Kabul edelim ki $M(j, m, r)$ ifadesi en fazla m topun herhangi bir kutuya konulabilmesi şartıyla, j tane özdeş bilyenin r tane farklı kutulara yerleştirilebileceği yolların sayısını gösterebilir. Bu durumda,

$$M(j, 1, r) = \binom{r}{j}, \quad 1 \leq j \leq r, \quad (4)$$

$$M(j, 2, r) = \sum_{i=\max\{j-r, 0\}}^{\min\{j/2, r\}} \binom{r}{j} \binom{r-i}{j-2i}, \quad (5)$$

$$M(j, m, r) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} M(j-mi, m-1, r-i), \quad m \geq 3. \quad (6)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıda verilen lemma kullanılırsa $N(j, k, n)$ için aşağıdaki yinelemeli genel denklemi elde edilebilir [18].

$$\begin{aligned} N(j, k, n) &= M(j, k-1, n-j+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-j+1} \binom{n-j+1}{i} N(j-i(k-1), k-2, n-j-i+1), \quad k > 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Ayrıca Bollinger [2], $N(j, k, n)$ ifadesini doğrudan elde edebilmek için satırlarının $N = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ve sütunlarının $J = 0, 1, 2, \dots, n$ olduğu T_k tablosunu geliştirmiştir. T_k tablosunun oluşturulması prosedürleri aşağıdaki gibi olmaktadır:

1. $N = 0$ olan satır 1 sayısı ile başlar ve daha sonra 0 ile devam eder.
2. $N = 1$ olan satır k tane 1 sayısı ile başlar ve daha sonra 0 ile devam eder.
3. $N \geq 2$ olan satırlar tam üstündeki değerlerin sola doğru ardışık k tanesinin toplamı şeklinde devam eder.

$C_k(N, J)$ ifadesi T_k tablosunda N -inci satır ile J -inci sütunun kesişimin deki değeri göstermek üzere, $0 \leq j \leq n$ için $N(j, k, n) = C_k(n-j+1, j)$ olmaktadır.

Şu ana kadar vermiş olduğumuz yöntemlere ek olarak $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğinin hesaplanabilmesi için birçok alternatif yöntem öne sürülmüştür. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Goulden [12], $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplayabilmek için aşağıdaki eşitliği elde etmiştir.

$$R(k, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/(k+1) \rfloor} (-1)^i p^i q^{ki} \left[\binom{n-ki}{i} - q^k \binom{n-k(i+1)}{i} \right]. \quad (8)$$

Hwang [14], $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplayabilmek için

$$R(k, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/(k+1) \rfloor} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\binom{n-ki+1}{i} - q \binom{n-ki}{i} \right]. \quad (9)$$

eşitliğini elde etmiştir.

Gokdere ve arkadaşları [10], $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplayabilmek için alternatif bir yöntem öne sürmüşler ve bu yöntemin R programlama dilindeki kodlarını aşağıdaki gibi oluşturmuşlardır.

```
RL <- function(n, k, p) {

q<-1-p

A=matrix(0, 2^n, n)

for (i in 1:n){

A[, i]<-rep(0:1, each=2^(i-1), len=2^n)

colnames(A)<-paste("A", 0:(n-1), sep="")
```

```

A<-data.frame(A)

AA <- c()

for(j in 1:(n-k+1)) {

for(m in j:(j+k-1)){ AA = c(AA,colnames(A)[m])}}

subb <- t(matrix(AA,k,(n-k+1)))

aa <- c()

for(j in 1:dim(subb)[1]){

yy <- c()

for(i in 1:dim(A)[1]){

yy[i]=sum(A[i,match(subb[j,],names(A))])}

aa <- c(aa,which(yy==0))}

aa

l <- as.matrix(sort(unique(aa)))

A.sub<-A[l,]

A.sub<-as.matrix(A.sub)

A.sub[A.sub == 1]<-p

A.sub[A.sub == 0]<-q

```

```
G<-apply(A.sub[,1:n],1,prod)
```

```
Prob<-sum(G)
```

```
print(1-Prob) }
```

```
>RL(n,k,p)
```

Örnek 2.1.1.

Kabul edelim ki, sistem doğrusal olarak sıralanmış 8 tane bileşenden oluşsun ve ancak 8 tane bileşenden ardışık olarak en az 2 tanesi arızalandığı zaman sistem arızalansın. Bu durumda, $DA(8,2,F)$ sistemini elde etmiş oluruz. (1) eşitliğini kullanarak $DA(8,2,F)$ sisteminin güvenilirliğini, sistemi oluşturan bileşenlerin 0.8 güvenilirliğe sahip olduğu varsayımı altında, elde etmeye çalışalım.

(1) eşitliğinde $n = 8$ alınırsa $[(8 + 1)/2] = 4$ elde edilir. Ayrıca $p = 0.8$ ve $q = 0.2$ dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} R(2,8) &= \sum_{j=0}^4 \binom{8-j+1}{j} (0.2)^j (0.8)^{8-j} = \binom{9}{0} (0.2)^0 (0.8)^8 + \binom{8}{1} (0.2)^1 (0.8)^7 \\ &+ \binom{7}{2} (0.2)^2 (0.8)^6 + \binom{6}{3} (0.2)^3 (0.8)^5 + \binom{5}{4} (0.2)^4 (0.8)^4 = 0.7792 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.2.

Doğrusal olarak sıralanmış 10 tane bileşenden oluşan ve bileşenlerinden ardışık olarak en az 3 tanesi arızalandığı zaman arızalanan bir sistemi düşünelim. (2) ve (3) eşitliklerini kullanarak bu sistemin güvenilirliğini, sistemi oluşturan bileşenlerin 0.7

güvenilirliğe sahip olduğu varsayımı altında, elde etmeye çalışalım. (2) ve (3) eşitlikleri birlikte $n = 10$ alınarak kullanılırsa, tasarlamış olduğumuz sistemin güvenilirliği

$$\begin{aligned}
 R(3,10) &= \sum_{j=0}^{10} N(j, 3, 10)(0.3)^j(0.7)^{10-j} \\
 &= N(0,3,10)(0.3)^0(0.7)^{10} + N(1,3,10)(0.3)^1(0.7)^9 + N(2,3,10)(0.3)^2(0.7)^8 \\
 &\quad + N(3,3,10)(0.3)^3(0.7)^7 + N(4,3,10)(0.3)^4(0.7)^6 + N(5,3,10)(0.3)^5(0.7)^5 \\
 &\quad + N(6,3,10)(0.3)^6(0.7)^4 + N(7,3,10)(0.3)^7(0.7)^3 + N(8,3,10)(0.3)^8(0.7)^2 \\
 &\quad + N(9,3,10)(0.3)^9(0.7)^1 + N(10,3,10)(0.3)^{10}(0.7)^0 = 0.8448 \text{ olarak elde edilir.}
 \end{aligned}$$

Örnek 2.1.3.

$DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini $n = 5$, $k = 3$ ve $p = 0.8$ olduğu durum için (6) eşitliğini kullanarak bulmaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
 R(3,5) &= M(0,2,6)(0.2)^0(0.8)^5 + M(1,2,5)(0.2)^1(0.8)^4 + M(2,2,4)(0.2)^2(0.8)^3 \\
 &\quad + M(3,2,3)(0.2)^3(0.8)^2 = 0.9792 \text{ elde edilir.}
 \end{aligned}$$

Örnek 2.1.4.

$DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini $n = 11$, $k = 3$ ve $p = 0.6$ olduğu durum için Bollinger [2], tarafından verilen T_k tablosunu kullanarak bulmaya çalışalım.

Tablo 1.1. $n = 11$ ve $k = 3$ olduğu durum için T_k tablosu

	J												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	2	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	3	6	7	6	3	1	0	0	0	0	0
	4	1	4	10	16	19	16	10	4	1	0	0	0
	5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	0
	6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6
	7	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77
	8	1	8	36	112	266	504	784	1016	1107	1016	784	504
	9	1	9	45	156	414	882	1554	2304	2907	3139	2907	2304
	10	1	10	55	210	615	1452	2850	4740	6765	8350	8953	8350
	11	1	11	66	275	880	2277	4917	9042	14355	19855	24068	25653
	12	1	12	78	352	1221	3432	8074	16236	23314	43252	58278	69576

Tabloda yer alan değerler kullanılırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
N(0,3,11) &= C_3(12,0) = 1, N(1,3,11) = C_3(11,1) = 11, N(2,3,11) = C_3(10,2) = 55, \\
N(3,3,11) &= C_3(9,3) = 156, N(4,3,11) = C_3(8,4) = 266, N(5,3,11) = C_3(7,5) = 266, \\
N(6,3,11) &= C_3(6,6) = 141, N(7,3,11) = C_3(5,7) = 30, N(8,3,11) = C_3(4,8) = 1, \\
N(9,3,11) &= C_3(3,9) = 0, N(10,3,11) = C_3(2,10) = 0, N(11,3,11) = C_3(1,11) = 0.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılırsa, istenilen güvenilirlik aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R(3,11) = \sum_{j=0}^{11} N(j,3,11)(0.4)^j(0.6)^{11-j} = 0.6557.$$

2.2. Bağımsız Fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Bileşenlerden Oluşan $DA(n, k, F)$ Sisteminin Güvenilirliği

Bu bölümde sistemi oluşturan bileşenlerin her birinin farklı güvenilirliklere sahip olduğu varsayımı altında $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğinin nasıl elde edildiği incelenecektir.

Chiang ve Niu [6], sistemi oluşturan bileşenlerin her birinin aynı güvenilirliğe sahip olduğu durum için $DA(n, k, F)$ sistemini incelemiş ve bu sistemin güvenilirliğinin nasıl elde edileceğini göstermiştir. Benzer yaklaşım aşağıdaki şekilde sistemi oluşturan bileşenlerin aynı olasılığa sahip olmadıkları durum için de uygulanabilir [18].

Sistemi oluşturan bileşenler ardışık olarak 1'den n 'e kadar numaralandırılsın. Kabul edelim ki L ifadesi ilk ardışık bileşenin numarasını gösterebilir. Örneğin birinci bileşen çalışır ve ikinci bileşen arızalı ise, bu durumda $L = 2$ olur. Ayrıca, M ifadesi L 'inci bileşenden sonraki ilk çalışan bileşenin numarasını gösterebilir. Bu durumda, $M - L \geq k$ olduğu durumda sistem arızalanır. Sistemin çalışabilmesi için, $M - L < k$ olması gerekir. Bu şartın yanı sıra $M + 1, M + 2, \dots, n$ bileşenlerinden oluşan alt sistemin de çalışır olması gerekir.

Yukarıda verilen koşullar göz önünde bulundurulursa, bileşenlerinin her birinin farklı güvenilirliklere sahip olduğu $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliği aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
 R(k, n) &= \sum_l \sum_m P_r(\text{sistem çalışır} | L = l, M = m) P_r(L = l, M = m) \\
 &= \sum_{l=1}^{n-k+1} \sum_{m=l+1}^{l+k-1} R(k, (m+1, n)) p_m \left(\prod_{i=1}^{l-1} p_i \right) \left(\prod_{j=1}^{m-1} q_j \right) + \prod_{i=1}^{n-k+1} p_i.
 \end{aligned} \tag{10}$$

(10) eşitliği için aşağıda verilenler geçerlidir.

$$b < a \text{ ise } \prod_{i=a}^b \equiv 1, \quad n < 0 \text{ için } R(k, n) = 0 \text{ ve } 0 \leq n < k \text{ için } R(k, n) = 1,$$

Ayrıca yukarıda verilen eşitlikte $R(k, (i, j))$ ifadesi, $i, i + 1, \dots, j$ bileşenlerinden oluşan $DA(j - i + 1, k, F)$ alt sisteminin güvenilirliğini göstermektedir.

Hwang [13], sistemi oluşturan bileşenlerin her birinin aynı güvenilirliğe sahip olmadığı durum için $DA(n, k, F)$ sistemini incelemiş ve sistem güvenilirliği için aşağıdaki eşitliği vermiştir.

$$R(k, n) = \sum_{i=n-k+1}^n P_r(E_i) R(k, i - 1) = \sum_{i=n-k+1}^n R(k, i - 1) p_i \prod_{j=i+1}^n \quad (11)$$

Yukarıda ki eşitlikte E_i ifadesi i 'inci bileşenin en son çalışan bir bileşen olduğu olayı göstermektedir. Ayrıca, $a > b$ ise $\prod_{i=a}^b \equiv 1$ ve $n < k$ için $R(k, n) = 1$ dir.

Zuo ve Kuo [18], $n \leq 2k$ için $DA(n, k, F)$ sistemini incelemiş ve sistemi oluşturan bileşenlerin her birinin farklı güvenilirliğe sahip olduğu durum için sistem güvenilirliğini aşağıdaki şekilde belirlemiştir.

$$R(k, n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-k+1} \left(p_{i+k} \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j \right), p_{n+1} \equiv 1, \quad k \leq n \leq 2k \quad (12)$$

Örnek 2.2.1.

Doğrusal olarak sıralanmış 5 tane bileşenden oluşan ve bileşenlerinden ardışık olarak en az 3 tanesi arızalandığı zaman arızalanan bir sistemi düşünelim. Ayrıca sistemi oluşturan bileşenlerin güvenilirlikleri $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.9$, $p_3 = 0.94$, $p_4 = 0.85$ ve $p_5 = 0.7$ olarak verilmiş olsun. Bu durumda $DA(5, 3, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplamaya çalışalım.

(12) eşitliğinde $k = 3$ ve $n = 5$ alınırsa,

$$R(3, 5) = 1 - \sum_{i=1}^3 \left(p_{i+3} \prod_{j=i}^{i+2} q_j \right) = 1 - (p_4 q_1 q_2 q_3 + p_5 q_2 q_3 q_4 + p_6 q_3 q_4 q_5) = 0.9956$$

elde edilir.

3. $DA(n, k, G)$ SİSTEMİNİN GÜVENİLİRLİLİĞİ

Kuo ve arkadaşları [17], $DA(n, k, F)$ sistemi ile $DA(n, k, G)$ sisteminin birbirlerinin aynadaki yansımaları olduğunu belirtmiştir. Aşağıdaki dualite tanımını kullanarak $DA(n, k, F)$ sistemi ile $DA(n, k, G)$ sisteminin birbirlerinin duali olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz.

Tanım 3.1. (Barlow ve Proschan [1])

Kabul edelim ki θ sistemin durumunu göstere. Bu durumda

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{Sistem çalışır ise} \\ 0, & \text{Sistem arızalı ise} \end{cases}$$

yazılabilir. Sistemin durumu bileşenlerin durumlarının deterministik bir fonksiyonudur. Bu nedenle, genellikle

$$\theta = \theta(\mathbf{x}) = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

yazılır ve sistemin yapı fonksiyonu olarak adlandırılır. θ yapı fonksiyonu verilsin. Bunun duali olan θ^D aşağıdaki şekilde verilir.

$$\theta^D(\mathbf{x}) = 1 - \theta(\mathbf{1} - \mathbf{x}),$$

burada, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ n elemanlı bir vektördür.

Lemma 3.1.

Kabul edelim ki p_i , $DA(n, k, F)$ sisteminde i 'inci bileşenin güvenilirliğini göstere. Bu durumda q_i , $DA(n, k, G)$ sisteminde i 'inci bileşenin güvenilir olamama olasılığını gösterir. Aynı bileşen sayısından oluşan ve aynı k değerine sahip $DA(n, k, F)$ ve

$DA(n, k, G)$ sistemleri için, birinin güvenilirliği diğer sistemin güvenilir olmama olasılığına eşittir.

Bir önceki bölümde $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğinin hesaplanabilmesi için vermiş olduğumuz yöntemleri kullanarak aşağıda verilen adımları uygularsak $DA(n, k, G)$ sisteminin güvenilirliğini kolaylıkla elde edebiliriz.

1. k, n ve bileşen güvenilirlik değerinin p_i , $1 \leq i \leq n$, olduğu $DA(n, k, G)$ sistemini ele alalım.
2. $1 \leq i \leq n$ için $q_i = 1 - p_i$ hesaplayalım.
3. k, n ve bileşen güvenilirlik değerinin q_i , $1 \leq i \leq n$, olduğu $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplayalım. Ayrıca $DA(n, k, F)$ sisteminin güvenilirliği R_F şeklinde gösterilsin.
4. R_G şeklinde gösterilen $DA(n, k, G)$ sisteminin güvenilirliği $R_G = 1 - R_F$ eşitliği sayesinde kolaylıkla hesaplanır.

Örnek 3.1.

Kabul edelim ki, sistem doğrusal olarak sıralanmış 5 tane bileşenden oluşsun ve ancak 5 tane bileşenden ardışık olarak en az 2 tanesi çalıştığı zaman sistem çalışsın. Bu durumda, $DA(5, 2, G)$ sistemini elde etmiş oluruz. Verilen bu sistemin güvenilirliğini bileşenlerinin 0.9 güvenilirliğe sahip olduğu varsayımı altında hesaplamaya çalışalım.

İlk olarak (1) eşitliğini kullanarak $DA(5, 2, F)$ sisteminin güvenilirliğini, sistemi oluşturan bileşenlerin 0.1 güvenilirliğe sahip olduğu varsayımı altında, elde etmeye çalışalım. (1) eşitliğinde $n = 5$ alınırsa $[(5 + 1)/2] = 3$ elde edilir. Ayrıca $p = 0.1$ ve $q = 0.9$ dir. $DA(5, 2, F)$ sisteminin güvenilirliği

$$R_F(2,5) = \sum_{j=0}^3 \binom{6-j}{j} (0.1)^j (0.9)^{5-j} = \binom{6}{0} (0.1)^0 (0.9)^5 + \binom{5}{1} (0.1)^1 (0.9)^4$$

$$+ \binom{4}{2} (0.1)^2 (0.9)^3 + \binom{3}{3} (0.1)^3 (0.9)^2 = 0.01261$$

elde edilir. $DA(5, 2, G)$ sisteminin güvenilirliği $R_G(2,5)$ şeklinde gösterilmek üzere,

$R_G(2,5) = 1 - R_F(2,5) = 1 - 0.01261 = 0.98739$ olarak bulunur.

Örnek 3.2.

Doğrusal olarak sıralanmış 10 tane bileşenden oluşan ve bileşenlerinden ardışık olarak en az 3 tanesi çalıştığı zaman çalışan bir sistemi düşünelim. Tasarlamış olduğumuz bu sistem, $DA(10,3,G)$ olarak adlandırılır. Verilen bu sistemin güvenilirliğini bileşenlerinin 0.7 güvenilirliğe sahip olduğu varsayımı altında hesaplamaya çalışalım.

İlk olarak (2) ve (3) eşitliklerini kullanarak $DA(10,3,F)$ sisteminin güvenilirliğini, sistemi oluşturan bileşenlerin 0.3 güvenilirliğe sahip olduğu varsayımı altında, elde etmeye çalışalım. (2) ve (3) eşitlikleri birlikte $n = 10$ alınarak kullanılırsa, $DA(10,3,F)$ sistemin güvenilirliği

$$\begin{aligned} R(3,10) &= \sum_{j=0}^{10} N(j,3,10)(0.7)^j(0.3)^{10-j} \\ &= N(0,3,10)(0.7)^0(0.3)^{10} + N(1,3,10)(0.7)^1(0.3)^9 + N(2,3,10)(0.7)^2(0.3)^8 \\ &\quad + N(3,3,10)(0.7)^3(0.3)^7 + N(4,3,10)(0.7)^4(0.3)^6 + N(5,3,10)(0.7)^5(0.3)^5 \\ &\quad + N(6,3,10)(0.7)^6(0.3)^4 + N(7,3,10)(0.7)^7(0.3)^3 + N(8,3,10)(0.7)^8(0.3)^2 \\ &\quad + N(9,3,10)(0.7)^9(0.3)^1 + N(10,3,10)(0.7)^{10}(0.3)^0 \\ &= 0.1414 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $DA(10,3,G)$ sisteminin güvenilirliği $R_G(3,10)$ şeklinde gösterilmek üzere,

$$R_G(3,10) = 1 - R_F(3,10) = 1 - 0.1414 = 0.8586$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.

$DA(n, k, G)$ sisteminin güvenilirliği $R_G(k, n)$ şeklinde gösterilmek üzere $n = 5$, $k = 3$ ve $p = 0.8$ olduğu durum için bulmaya çalışalım.

Verilen sistemin güvenilirliği doğrudan $n = 5$, $k = 3$ ve $p = 0.2$ sahip $DA(5, 3, F)$ sisteminin güvenilirliğine bağlıdır. Bu durumda, $DA(5, 3, F)$ sisteminin güvenilirliği $R_F(3, 5)$ olmak üzere

$$R_F(3, 5) = M(0, 2, 6)(0.8)^0(0.2)^5 + M(1, 2, 5)(0.8)^1(0.2)^4 + M(2, 2, 4)(0.8)^2(0.2)^3 \\ + M(3, 2, 3)(0.8)^3(0.2)^2 = 0.2832$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$R_G(3, 5) = 1 - R_F(3, 5) = 1 - 0.2832 = 0.7168$$

elde edilir.

Örnek 3.4.

$DA(11, 3, G)$ sisteminin güvenilirliğini sistemi oluşturan her bir bileşenin $p = 0.6$ olasılığına sahip olduğu durum için bulmaya çalışalım.

Verilen sistemin güvenilirliğini bulmak için ilk olarak $DA(11, 3, F)$ sisteminin güvenilirliğini $p = 0.4$ alarak Bollinger [2], tarafından verilen T_k tablosunu kullanarak bulmaya çalışalım. Örnek 2.1.4 deki tablo değerleri kullanılırsa $DA(11, 3, F)$ sisteminin güvenilirliği 0.2591 olarak elde edilir. Sonuç olarak $R_G = 1 - R_F$ eşitliği kullanılırsa $DA(11, 3, G)$ sisteminin güvenilirliği 0.7409 olarak elde edilir.

Örnek 3.5.

Doğrusal olarak sıralanmış 5 tane bileşenden oluşan ve bileşenlerinden ardışık olarak en az 3 tanesi çalıştığı zaman çalışan bir sistemi düşünelim. Ayrıca sistemi oluşturan

bileşenlerin güvenilirlikleri $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.9$, $p_3 = 0.94$, $p_4 = 0.85$ ve $p_5 = 0.7$ olarak verilmiş olsun. Bu durumda $DA(5, 3, G)$ sisteminin güvenilirliğini hesaplamaya çalışalım.

İlk olarak (12) eşitliğinde $k = 3$ ve $n = 5$ alarak $DA(5, 3, F)$ sisteminin güvenilirliğini $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = 0.06$, $p_4 = 0.15$ ve $p_5 = 0.3$ olduğu durum için hesaplayalım. Daha sonra da $R_G = 1 - R_F$ eşitliğini kullanılarak $DA(5, 3, G)$ sisteminin güvenilirliğini bulalım.

$$R_F(3,5) = 1 - \sum_{i=1}^3 \left(p_{i+3} \prod_{j=i}^{i+2} q_j \right) = 1 - (p_4 q_1 q_2 q_3 + p_5 q_2 q_3 q_4 + p_6 q_3 q_4 q_5) = 0.1234$$

elde edilir. Sonuç olarak $DA(5, 3, G)$ sisteminin güvenilirliği, $R_G(3,5)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$R_G(3, 5) = 1 - R_F(3, 5) = 1 - 0.1234 = 0.87655$$

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Hazırlamış olduğumuz bu çalışmada, $DA(n, k, F)$ sistemi ile $DA(n, k, G)$ sistemi incelenmiştir. Çalışmadaki amacımız, verilen bu sistemlerin güvenilirliklerinin nasıl hesaplanabileceğini araştırmaktır. $DA(n, k, F)$ sistemi ile $DA(n, k, G)$ sistemi incelendiğinde, sistemlerin güvenilirliği doğrudan sistemi oluşturan bileşenlerin güvenilirliklerine bağlıdır.

Sistemdeki bileşenler ya bağımsız aynı dağılımlıdır ya da bağımsız fakat aynı dağılımlı olmak zorunda değildirler. Sistemi oluşturan bileşenlerin bu özelliğinden dolayı verilen sistemlerin güvenilirliği hesaplanırken bu özellik dikkate alınmış ve mevcut yöntemler verilmeye çalışılmıştır.

Bundan sonraki çalışmalarda amacımız, sistemi oluşturan bileşenlerin dağılımları bilindiği durumda zamana bağlı olarak sistem güvenilirliğinin nasıl hesaplanabileceğini araştırmak olacaktır. Ayrıca, sisteme dışardan bir veya birden fazla etki olduğu durumda sistem güvenilirliğinin zamana bağlı olarak nasıl etkileneceği önemli bir problem olduğu için, bu konu üzerine de çalışmalar yapmayı amaçlamaktayız.

KAYNAKÇA

- [1] Barlow, R.E. and Proschan, F., 1975. Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [2] Bollinger, R.C., 1982. Direct computation for consecutive- k -out-of- $n:F$ systems. IEEE Transaction on Reliability, 31, 444-446.
- [3] Bollinger, R.C. and Salvia, A.A., 1982. Consecutive- k -out-of- $n:F$ network. IEEE Transaction on Reliability, 31, 53-56.
- [4] Cao, J. H. and Cheng, K., 1986. Introduction to Reliability Mathematics, Applied Mathematical Modelling, Beijing: Science Press.
- [5] Chao, M.T. and Lin, G.D., 1984. Economical design of large consecutive- k -out-of- $n:F$ systems. IEEE Transaction on Reliability, 33(5), 411-413.
- [6] Chiang, D.T. and Niu, S.C., 1981. Reliability of a consecutive- k -out-of- $n:F$ system. IEEE Transaction on Reliability, 30, 87-89.
- [7] Chiang, D. and Chiang, R., 1986. Relayed communication via consecutive- k -out-of- $n:F$ system. IEEE Transaction on Reliability, 35, 65-70.
- [8] Derman, C., Liberman, G.J. and Ross, S.M., 1982. On the consecutive- k -out-of- $n:F$ system. IEEE Transaction on Reliability, 31, 57-63.
- [9] Eryılmaz, S., 2014. Parallel and consecutive- k -out-of- $n:F$ systems under stochastic deterioration, Appl. Math. Comput., 227, 19-26.
- [10] Gokdere, G., Gurcan, M. and Kılıç, M. B., 2016. A new method for computing the reliability of consecutive- k -out-of- $n:F$ systems, Open Phys., 14, 166-170.
- [11] Gokdere, G. and Gurcan, M., 2016. Mühendislik uygulamalarında kullanılan ardışık n den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik analizi. Afyon Kocatepe Üniv. Fen ve Müh. Bil. Dergisi. 16, 461-467.
- [12] Goulden, I.P., 1987. Generating functions and reliabilities for consecutive- k -out-of- $n:F$ systems. Utilitas Mathematic, 32, 141-147.
- [13] Hwang, F.K., 1986. Simplified reliabilities for consecutive- k -out-of- n systems. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 7, 258-264.
- [14] Hwang, F.K., 1989. Invariant permutations for consecutive- k -out-of- n cycles. IEEE Transaction on Reliability, 38, 65-67.

- [15] Kao, S.C., 1982. Computing reliability from warranty. Proc. Am. Statist. Assoc., Sect. Statist. Comput. 309-312.
- [16] Kontoleon, J.M., 1980. Reliability determination of a r -successive-out-of- $n:F$ system. IEEE Transaction on Reliability, 29, 437.
- [17] Kuo, W., Zhang, W. and Zuo, M., 1990. A consecutive- k -out-of- $n:G$ system. The mirror image of a consecutive- k -out-of- $n:F$ system. IEEE Transaction on Reliability, 39, 244-253.
- [18] Zuo, M.J. and Kuo, W., 1990. Design and performance analysis of consecutive- k -out-of- n structure. Naval Research Logistics, 37, 203-230.



ÖZGEÇMİŞ

1989 Elazığ doğumluyum. 1996 yılında ilkokul, 2001 yılında ortaokul ve 2004 yılında liseye başladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi İstatistik bölümüne başladım. 2012 yılında mezun oldum. 2016 yılında PTT’de göreve başladım. Şu anda görevime Avrupa Yakası PTT Başmüdürlüğü’ne bağlı Yenibosna PTT’de Gişe ve Büro Görevlisi olarak devam etmekteyim. 2015 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, Uygulamalı İstatistik Bilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başlamış ve halen devam etmekteyim.

