

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E3 UZAYINDA WEİNGARTEN VE LİNEER
WEİNGARTEN TİPİ YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah KAYA

(101121119)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı : Geometri

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**$\mathbb{E}^3$ UZAYINDA WEİNGARTEN VE LİNEER WEİNGARTEN TİPİ
YÜZEYLER ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Emrah KAYA
(101121119)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 26.11.2014

2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E³ UZAYINDA WEİNGARTEN VE LİNEER WEİNGARTEN TİPİ YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah KAYA

(101121119)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.11.2014
Tezin Savunulduğu Tarih : 09.12.2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Essin TURHAN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa AYDOĞDU (F.Ü)

ARALIK-2014

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarında bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Essin TURHAN 'a ve her türlü yardımları için sayın Dr. Gülden ALTAY 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Emrah KAYA

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	3
Temel Tanım ve Teoremler	3
3. BÖLÜM	14
Öklid Uzayında Weingarten ve Lineer Weingarten Tipli Yüzeyler	14
4. BÖLÜM	24
Sonuç	24
KAYNAKLAR	26

ÖZET

$\mathbb{E}^3$ UZAYINDA WEİNGARTEN VE LİNEER WEİNGARTEN TİPİ YÜZEYLER ÜZERİNE

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; çalışmanın giriş kısmı olup, üç boyutlu Öklid uzayında Weingarten ve Lineer Weingarten tipli yüzeyler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelendi.

İkinci bölümde; Weingarten ve Lineer Weingarten tipli yüzeyler için kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; üç boyutlu Öklid uzayında Weingarten ve lineer Weingarten tipli yüzeyler incelendi. Bu yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri elde edildi. Daha sonra bu yüzeye örnek verilerek Mathematica programı yardımıyla şekilleri verildi.

Dördüncü bölüm ise çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Tubular yüzey, Jakobiye fonksiyonu, Weingarten yüzey, Lineer Weingarten yüzey, Gauss eğriligi, Ortalama eğrilik, Asli Eğrilik.

ABSTRACT

**ON THE WEINGARTEN AND LINEAR WEINGARTEN SURFACES
IN $\mathbb{E}^3$**

This thesis consist of four chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction. In this section it is given that informations about Weingarten and linear Weingarten surfaces in three dimensional Euclidean spaces in the literature.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of Weingarten and linear Weingarten surfaces are given.

In the third chapter Weingarten and linear Weingarten surfaces in three dimensional Euclidean spaces are given. Then, mean curvature and Gauss curvature of the surface is obtained. Also, example using the program Mathematica is given.

The fourth chapter has been devoted to the conclusion.

Keywords: Tubular surface, Jacobien function, Weingarten surface, linear Weingarten surface, translation surfaces, Gauss curvature, mean curvature, principal curvature.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid Uzayı
$\times$	: Vektörel çarpım
$[\cdot]$	: Lie operatörü
$\mathbf{N}$	: Yüzeyin birim normal vektör alanı
D	: Riemann koneksiyonu
$T_p(M)$	: p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi
Sp	: Şekil operatörü
$K(p)$	: Gauss eğriliği
$H(p)$	: Ortalama eğriliği
$ $	: Norm
I	: Birinci temel form
II	: İkinci temel form

1. BÖLÜM

GİRİŞ

3- boyutlu Öklid uzayında yüzeyler teorisi önemli bir yere sahiptir ve bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Weingarten yüzey ve Lineer Weingarten yüzey yüzey teorisinin ilginç konularından biri olmuştur. Öklid uzayında Weingarten ve Lineer Weingarten tipli yüzeyler bir çok geometrici tarafından farklı açılardan incelenmiştir.

Weingarten yüzeyler ilk olarak 1861 yılında Weingarten tarafından bulunmuştur. 3- boyutlu Öklid uzayında bir M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği, sırasıyla, H ve K olmak üzere, eğer Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği arasındaki Jakobi özdeşliği $\psi(H, K) = 0$ sağlanıyorsa, M yüzeyi bir Weingarten yüzeydir. Weingarten yüzey örnekleri dönel yüzeyleri ve sabit ortalama eğrilikli veya sabit Gauss eğrilikli yüzeyleri kapsar.

Tunçer; 3- boyutlu Öklid uzayında Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, ikinci Gauss ve ikinci ortalama eğriliklerinden yararlanarak tubular Weingarten yüzeyleri incelemiştir, [15].

Lopez; 3- boyutlu Öklid uzayında k_1 ve k_2 yüzeyin asli eğrilikleri, a ve b reel sayılar olmak üzere

$$k_1 = ak_2 + b$$

lineerlik şartını sağlayan Weingarten yüzeyleri incelemiştir, [12].

Karacan; 3- boyutlu Öklid uzayında ve 3- boyutlu Minkowski uzayında c reel bir sayı olmak üzere

$$ak_1 + bk_2 = c$$

Weingarten şartını sağlayan yüzeyleri incelemiştir, [8].

Galvez; Lineer Weingarten yüzeylerin harmonik görüntüleri (representation) elde etmiştir. Ayrıca eliptik lineer Weingarten yüzeylerin bazı karakterizasyonlarını elde etmiştir, [3].

Yaylı; paralel lineer Weingarten yüzeyleri çalışmıştır. Yüzeyin lineer Weingarten olması için verilen yüzeyin paralel yüzeyinin de lineer Weingarten olması gerektiğini elde etmiştir. [16].

Ro; 3- boyutlu Öklid uzayında Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğin bazı denklemlerinden yararlanarak Weingarten yüzeyleri incelemiştir, [13].

Bu çalışmada ise 3- boyutlu Öklid uzayında, Weingarten ve lineer Weingarten yüzeyler incelenerek, bu yüzeylerin bazı karakterizasyonları elde edildi. Ayrıca, bu yüzey için örnek oluşturularak, bu yüzeyin Mathematica programı yardımıyla şekli verildi.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1.

X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ya X üzerinde bir *topoloji*, (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir.

(i) $X, \emptyset \in \tau$

(ii) τ da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani, I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

(iii) τ da alınan her sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ dır, [6].

Tanım 2.1.2.

X bir topolojik uzay olsun ve farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları, sırasıyla, U ve V olsun. Eğer U ve V yi $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde seçilebiliyorsa X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzay* denir, [6].

Tanım 2.1.3.

X ve Y birer topolojik uzay olsun. Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için,

(i) f sürekli,

(ii) f^{-1} mevcut,

(iii) f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna X 'den Y 'ye bir *homeomorfizm* denir, [6].

Tanım 2.1.4.

M bir Hausdorff uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye *n-boyutlu topolojik manifold* (veya kısaca *topolojik n-manifold*) denir.

- (i) M bir Hausdorff uzayıdır.
- (ii) M nin herbir açık alt cümlesi $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayının bir açık cümlesine veya $\mathbb{E}^n$ e homeomorftur.
- (iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, [6].

Tanım 2.1.5.

M bir topolojik n -manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasının M de ki bir U açık komşuluğu, Ψ homeomorfizmi sayesinde $\mathbb{E}^n$ nin bir V açık altcümlesine homeomorfik ise (U, Ψ) ikilisine M nin p noktasındaki bir *koordinat komşuluğu (harita)* denir, [6].

Tanım 2.1.6.

M , n -boyutlu topolojik bir manifold ve $V_\alpha \subset M$ açık alt cümlelerinin $\{V_\alpha\}$ ailesi de M nin bir örtüsü olsun. Bu durumda herbir V_α açığının $\mathbb{E}^n$ deki bir U_α açık altcümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. A bir indeks cümlesini göstermek üzere, elde edilen (U_α, Ψ_α) koordinat komşuluklarının

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

ailesine M nin bir *atlası* denir, [6].

Tanım 2.1.7.

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun bir atlası

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

olsun. Eğer

$$\Psi_\alpha(U_\alpha) \cap \Psi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$$

olacak şekildeki $\forall(\alpha, \beta) \in A \times A$ için $\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta$ ve $\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha$ fonksiyonları, $r > 0$ olmak üzere, C^r sınıfından diferensiyellenebilir ise S ye C^r *sınıfından atlas* denir, [6].

Tanım 2.1.8.

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun C^r -sınıfından bir atlası var ise M ye C^r -sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir. Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için S diferensiyellenebilir ise, o zaman M ye C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir, [6].

Tanım 2.1.9.

E^n nin iki altcümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için;

(i) $\Psi \in C^k(U, V)$,

(ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$, $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$, önermeleri sağlamıyorsa Ψ ye C^k sınıfından *diffeomorfizm* denir, [6].

Tanım 2.1.10.

M topolojik manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} v_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow v_p[f] \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall p \in M, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

(i) $v_p[\lambda f + \mu g] = \lambda v_p[f] + \mu v_p[g]$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(ii) $v_p[fg] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g]$.

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme M nin p noktasında ki bir *tanjant vektörü* denir, [6].

Tanım 2.1.11.

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi

$$T_M(p) = \{\mathbf{v}_p | \mathbf{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. Bu cümle üzerinde, iç ve dış işlem, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanırsa $T_M(p)$ bir reel vektör uzayı olur. $T_M(p)$ vektör uzayına, M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir.

$$\begin{aligned} \oplus : T_M(p) \times T_M(p) &\longrightarrow T_M(p) \\ (\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) &\longrightarrow \mathbf{v}_p \oplus \mathbf{u}_p \\ (v_p \oplus u_p)[f] &= v_p[f] + u_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_M(p) &\longrightarrow T_M(p) \\ (\lambda, \mathbf{u}_p) &\longrightarrow \lambda \odot \mathbf{u}_p \end{aligned}$$

$$(\lambda \odot \mathbf{v}_p)[f] = \lambda \mathbf{v}_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), [6].$$

Tanım 2.1.12.

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bir

$$X : M \xrightarrow[örten]{1:1} \bigcup_{p \in M} T_M(p)$$

olarak tanımlanan, X fonksiyonuna M üzerinde vektör alanı denir.

M üstünde tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \oplus : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow X \oplus Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{R} \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (\lambda, X) &\longrightarrow \lambda \odot X\end{aligned}$$

Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır. Bu $\chi(M)$ vektör uzayına M üzerinde *vektör alanları uzayı* denir, [6].

Tanım 2.1.13.

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümünde

- (i) 2-lineer
- (ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)
- (iii) Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir *Lie operatörü* denir. Bu işlemle birlikte V vektör uzayına *Lie cebiri* denir, [6].

Tanım 2.1.14.

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, C^∞ fonksiyonların cebiride $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* yada *metrik tensör* denir.

- (i) g dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) g dönüşümü simetriktir,

(iii) $g(X, X) > 0$, $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, $X \in \chi(M)$, [5].

Tanım 2.1.15

M , bir C^∞ –manifold olsun. M üzerinde bir Riemann metriği tanımlanırsa M ye *Riemann manifoldu* denir, [5].

Tanım 2.1.16

M bir C^∞ -manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiride $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

- (i) g dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) g dönüşümü simetriktir,
- (iii) $\forall Y \in \chi(M)$ için $g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$, [5].

Tanım 2.1.17.

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow D_X Y \end{aligned}$$

operatörü

- (i) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z \quad X, Y, Z \in \chi(M)$
- (ii) $D_{(X+Y)}Z = D_X Z + D_Y Z$
- (iii) $D_{fX}Y = f D_X Y \quad , f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- (iv) $D_X fY = f D_X Y + X[f]Y$

özellikleri sağlıyor ise D ye M üzerinde bir *afin koneksiyon* ve D_X e de X vektör alanı yönünde *kovaryant türev* denir, [6].

Tanım 2.1.18.

I , $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilen bir

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de bir *eğri* denir.

Bir $t \in I$ değerine karşılık eğrinin, elde edilen $\alpha(t)$ noktası;

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklindedir. Buradaki α_i fonksiyonları $I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\mathbb{E}^n$ nin koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise,

$$\alpha_i = x_i \circ \alpha$$

biçimindedir, [5].

Tanım 2.1.19.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}|_t = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t))$$

vektörüne eğrinin *hız vektörü* denir ve $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisi bir *tanjant vektördür*, bu vektör kısaca $\alpha'(t)$ şeklinde gösterilir, [5].

Tanım 2.1.20.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine *regüler bir eğri* denir, [6].

Tanım 2.1.21.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ yay uzunluğu ile parametrize edilen diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ise $\mathbb{E}^n$ de α boyunca ortonormal çatı alanı olmak üzere, $\mathbf{T}$ teğet, $\mathbf{N}$ normal, $\mathbf{B}$ binormal vektör alanı olup $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ye *Frenet çatısı* denir. O zaman $\kappa \neq 0$ ve τ ya, sırasıyla α nın eğriliği ve torsiyonu olmak üzere;

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

denklemlerine *Frenet formülleri* denir, [6].

Tanım 2.1.22.

Eğer bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi üzerinde Y bir C^∞ vektör alanı ve α üzerinde

$$D_{\mathbf{T}} \mathbf{Y} = 0$$

ise Y vektör alanına α eğrisi üzerinde bir paralel *vektör alanıdır* denir. Eğer bir α eğrisi üzerinde

$$D_{\mathbf{T}} \mathbf{T} = 0$$

ise α eğrisine bir *geodezik eğri* adı verilir, [5].

Tanım 2.1.23.

U , M yüzeyi üzerinde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} U$$

eşitliği ile tanımlı

$$S_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, U birim normal vektör alanına bağlı *şekil operatörü* (veya *Weingarten dönüşümü*) denir, [16].

Tanım 2.1.24.

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. S_p lineer dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki *Gauss eğriliği* denir ve

$$K(p) = \det(S_p)$$

ile gösterilir, [16].

Tanım 2.1.25.

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. S_p lineer dönüşümünün izine M yüzeyinin p noktasındaki *ortalama eğriliği* denir ve

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_p)$$

ile gösterilir.[16].

Tanım 2.1.26.

M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye *minimal yüzey* denir, [16].

Tanım 2.1.27.

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktasına

$$I_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow R, \quad I_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

karşılık getiren II_p fonksiyonuna M üstünde *birinci temel form* denir, [16].

Tanım 2.1.28.

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktasına

$$II_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow R, \quad II_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

karşılık getiren II_p fonksiyonuna M üstünde *ikinci temel form* denir, [16].

Tanım 2.1.29.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir M yüzeyi üzerinde en az biri sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlar f ve g olsun.

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial s} \text{ ve } f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$$

olmak üzere

$$\Phi(f, g) = \begin{bmatrix} f_s & f_t \\ g_s & g_t \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $\Phi(f, g)$ fonksiyonuna *jakobiyen fonksiyonu* denir, [14].

Tanım 2.1.30.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu H ve Gauss eğrilik fonksiyonu K olsun. M yüzeyinde

$$\Phi(H, K) = 0$$

eşitliği sağlanırsa bu yüzeye *Weingarten yüzeyi* veya *W-yüzey* denir, [13].

Tanım 2.1.31.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında M bir weingarten yüzey olsun. Eğer bu yüzey için

$$ak_1 + bk_2 = c, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0), \quad a, b, c \in R$$

lineer denklemi sağlanırsa bu yüzeye *Lineer Weingarten yüzey* veya *LW-yüzey* denir, [13].

Tanım 2.1.32.

$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$M(s, \theta) = \alpha(s) + \lambda [N(s) \cos \theta + B(s) \sin \theta], \quad a \leq s \leq b$$

parametrik yüzeyine, α üzerinde tanımlı $\lambda > 0$ yarıçaplı bir tubular yüzey denir, [7].

Teorem 2.1.33.

α , M yüzeyinde bir eğri ve $\mathbf{U}$, M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. α eğrisinin bir asimtotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\langle \alpha'', \mathbf{U} \rangle = 0$ olmasıdır, [16].

Teorem 2.1.34.

3- boyutlu Öklid uzayında M yüzeyinin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. M yüzeyinin *Gauss eğriliği* K , *ortalama eğriliği* H olmak üzere

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

sağlanır, [15].

3. BÖLÜM

Bu bölümde, 3- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir α eğrisi üzerindeki

$$ak_1 + bk_2 = c$$

şartını sağlayan tubular W - yüzeyi incelendi. Burada a, b, c sabitler, k_1 ve k_2 ise M yüzeyinin asli eğriliklerini göstermektedir. Daha sonra bu yüzey ile ilgili teorem ve sonuçlar verilip ispatlandı.

3.1. Öklid Uzayında Weingarten ve Lineer Weingarten Tipli Yüzeyler

$\alpha, \mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri ve M yüzeyinde $\mathbb{E}^3$ de α eğrisi tarafından üretilen tubular yüzey olsun. Bu durumda tubular yüzey

$$M(s, \theta) = \alpha(s) + \lambda [\mathbf{N}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta], \quad a \leq s \leq b \quad (3.1.1)$$

parametrizasyonu ile verilir. M yüzeyinin s ve θ ya göre türevleri alınarak, Frenet formüllerinden yararlanılırsa,

$$M_s = (1 - \lambda\kappa \cos \theta)\mathbf{T} - (\lambda\tau \sin \theta)\mathbf{N} + (\lambda\tau \cos \theta)\mathbf{B}, \quad (3.1.2)$$

$$M_\theta = -(\lambda \sin \theta)\mathbf{N} + (\lambda \cos \theta)\mathbf{B}$$

elde edilir. Bu durumda (3.1.2) eşitliklerinden, M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları

$$E = \lambda^2 \tau^2 + (1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2, \quad F = \lambda^2 \tau, \quad G = \lambda^2 \quad (3.1.3)$$

dir. M yüzeyinin birim normal vektör alanı (3.1.2) denklemlerinden

$$\mathbf{U} = -\cos \theta \mathbf{N} - \sin \theta \mathbf{B}$$

dir. M yüzeyinin s ve θ ya göre ikinci türevleri alınırsa,

$$M_{ss} = \lambda\tau\kappa \sin \theta \mathbf{T} + ((1 - \lambda\kappa \cos \theta)\kappa - \lambda\tau^2 \cos \theta)\mathbf{N} - \lambda\tau^2 \sin \theta \mathbf{B},$$

$$M_{s\theta} = (1 + \lambda\kappa \sin \theta)\mathbf{T} - \lambda\tau \cos \theta \mathbf{N} - \lambda\tau \sin \theta \mathbf{B},$$

$$M_{\theta\theta} = -\lambda \cos \theta \mathbf{N} - \lambda \sin \theta \mathbf{B}$$

elde edilir. Bu durumda, M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları

$$e = -\lambda\tau^2 - (\kappa \cos \theta)(1 - \lambda\kappa \cos \theta), \quad f = \lambda\tau, \quad g = \lambda \quad (3.1.4)$$

olur. Diğer taraftan, (3.1.3) ve (3.1.4) denklemlerinden M yüzeyinin K Gauss eğriligi ve H ortalama eğriligi

$$K = -\frac{\kappa \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda\kappa \cos \theta)}, \quad H = -\frac{(1 - 2\lambda\kappa \cos \theta)}{2\lambda(1 - \lambda\kappa \cos \theta)} \quad (3.1.5)$$

bulunur. Burada (3.1.5) denklemlerinin s ve θ ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$K_s = -\frac{\kappa_s \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2}, \quad K_\theta = \frac{\kappa \sin \theta}{\lambda(1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2} \quad (3.1.6)$$

$$H_s = -\frac{\kappa_s \cos \theta}{2(1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2}, \quad H_\theta = \frac{\kappa \sin \theta}{2(1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2} \quad (3.1.7)$$

Lemma 3.1.1.

M , α eğrisi tarafından üretilen bir tubular yüzey ve M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. Bu durumda

$$\Phi(k_1, k_2) = 0$$

jakobi eşitliği sağlanır, [8].

İspat: (3.1.4) denklemlerini

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

eşitliklerinde yerine yazılırsa, k_1 ve k_2 asli eğrilikleri

$$k_1 = \frac{\kappa \cos \theta}{1 - \lambda\kappa \cos \theta}, \quad k_2 = -\frac{1}{\lambda} \quad (3.1.8)$$

olur.

Diğer taraftan k_1 ve k_2 nin s ve θ ' ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$k_{1s} = \frac{\kappa_s \cos \theta}{(-1 + \lambda \kappa \cos \theta)^2}, \quad k_{1\theta} = -\frac{\kappa \sin \theta}{(-1 + \lambda \kappa \cos \theta)^2}, \quad (3.1.9)$$

$$k_{2s} = 0, \quad k_{2\theta} = 0$$

elde edilir. Buradan Jakobiye fonksiyonun tanımından

$$\Phi(k_1, k_2) = k_{1s}k_{2\theta} - k_{1\theta}k_{2s} = 0 \quad (3.1.10)$$

olup, M yüzeyi bir Weingarten yüzeydir.

Teorem 3.1.2.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde sıfırdan farklı $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$ak_1 + bk_2 = c$$

lineer eşitliği sağlamıyor ise aşağıdaki iki durumdan biri mevcuttur.

- i) $M, \mathbb{E}^3$ de dairesel silindirin açık bir parçasıdır.
- ii) $\kappa \neq 0$ ise $\sin \theta = 0$ dır.

İspat: i) M yüzeyi üzerinde sıfırdan farklı $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$ak_1 + bk_2 = c$$

lineer eşitliği sağlansın. O halde (3.1.8) eşitliği lineerlik şartında yerine yazılırsa, $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$a \frac{\kappa \cos \theta}{1 - \lambda \kappa \cos \theta} + b \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = c, \quad (3.1.11)$$

$$\frac{a \lambda \kappa \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda \kappa \cos \theta)} + \frac{-b + b \lambda \kappa \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda \kappa \cos \theta)} = c,$$

ve

$$a\lambda\kappa \cos \theta - b + b\lambda\kappa \cos \theta = c\lambda - c\lambda^2\kappa \cos \theta,$$

$$(a + b + c\lambda)\lambda\kappa \cos \theta - b - c\lambda = 0$$

olup

$$(a + b + c\lambda)\lambda\kappa = 0, \quad b = -c\lambda,$$

$$a\lambda\kappa = 0$$

elde edilir. $a \neq 0$ olduğundan, $\kappa = 0$ elde edilir.

ii) (3.1.11) denklemde her iki tarafın θ ya göre kısmi türevi alınır;

$$\frac{-a\kappa \sin \theta(1 - \lambda\kappa \cos \theta) - \lambda a\kappa^2 \cos \theta \sin \theta}{(1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2} = 0$$

olup,

$$-a\kappa \sin \theta = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\kappa \neq 0 \text{ ise } \sin \theta = 0$$

dir.

Teorem 3.1.3.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $b \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ için

$$ak_1 + bk_2 = c$$

lineer eşitliği sağlanıyor ise M yüzeyi bir minimal yüzey olamaz, [8].

İspat: M yüzeyi üzerinde $a \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ için

$$ak_1 + bk_2 = c$$

lineer eşitliği sağlansın. Burada (3.1.7) eşitliği lineerlik şartında yazılırsa

$$a \frac{\kappa \cos \theta}{1 - \lambda \kappa \cos \theta} + b \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = c,$$

$$\frac{a \lambda \kappa \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda \kappa \cos \theta)} + \frac{-b + b \lambda \kappa \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda \kappa \cos \theta)} = c,$$

ve

$$a \lambda \kappa \cos \theta - b + b \lambda \kappa \cos \theta = c \lambda - c \lambda^2 \kappa \cos \theta,$$

$$(a + b + c \lambda) \lambda \kappa \cos \theta - b - c \lambda = 0,$$

olup

$$(a + b + c \lambda) \lambda \kappa = 0, \quad b = -c \lambda,$$

$$a \lambda \kappa = 0,$$

elde edilir. Burada, $a \neq 0$ olduğundan $\kappa = 0$ olur. (3.1.4) eşitliğinde $\kappa = 0$ yazılırsa $H \neq 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.4.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. M yüzeyi üzerindeki ortalama eğriliğin sabit olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin bir doğru olmasıdır, [8].

İspat:($\implies$) M yüzeyi üzerindeki ortalama eğrilik sabit olsun. O halde;

$$H = -\frac{(1 - 2\lambda\kappa \cos \theta)}{2\lambda(1 - \lambda\kappa \cos \theta)} = c,$$

olur. Buradan

$$2\lambda\kappa \cos \theta - 1 = 2c\lambda - 2c\lambda^2\kappa \cos \theta,$$

$$2\lambda\kappa \cos \theta - 1 - 2c\lambda + 2c\lambda^2\kappa \cos \theta = 0$$

ve

$$(1 + c\lambda)2\lambda\kappa \cos \theta + (-1 - 2c\lambda) = 0,$$

$$(1 + c\lambda)2\lambda\kappa = 0, \quad 2c\lambda = -1,$$

olup

$$\lambda\kappa = 0,$$

elde edilir. $\lambda \neq 0$ olduğundan $\kappa = 0$ olur. Böylece α eğrisinin bir doğru olduğu elde edilir.

($\impliedby$) α eğrisinin bir doğru olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $\kappa = 0$ dır. (3.1.5) eşitliğinde, H ortalama eğriliğinde $\kappa = 0$ alınırsa

$$H = -\frac{1}{2\lambda}$$

olur. Burada $\lambda \neq 0$ olduğundan H sabit olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. M yüzeyi üzerinde umbilik nokta yoktur, [8].

İspat. Kabul edelimki p noktası M tubular yüzeyinin bir umbilik noktası ve p noktasındaki asli eğrilikler $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ olsun. p bir umbilik nokta ise

$$k_1(p) = k_2(p)$$

olup,

$$\frac{\kappa(p) \cos \theta}{1 - \lambda \kappa(p) \cos \theta} = -\frac{1}{\lambda}$$

ifadesinden

$$-\lambda \kappa(p) \cos \theta = 1 - \lambda \kappa(p) \cos \theta$$

$$1 = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözüm kümesi olmadığından, M yüzeyi üzerindeki hiçbir nokta umbilik nokta değildir.

Örnek 3.1.6.

$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi

$$\alpha(s) = \left(3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5}s\right)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Burada α eğrisinin Frenet çatısındaki ortagonal birim vektörler alanları

$$\alpha'(s) = T(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$T'(s) = \left(-\frac{3}{25} \cos \frac{s}{5}, -\frac{3}{25} \sin \frac{s}{5}, 0\right)$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{3}{25} \quad (3.1.12)$$

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0\right)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

dır. (3.1.12) ifadelerinden, (3.1.1) parametrizasyonunda $\lambda = 1$ için yazılırsa

$$M(s, \theta) = \left(3 \cos \frac{s}{5} - \cos \frac{s}{5} \cos \theta + \frac{4}{5} \sin \frac{s}{5} \sin \theta, 3 \sin \frac{s}{5} - \sin \frac{s}{5} \cos \theta - \frac{4}{5} \cos \frac{s}{5} \sin \theta, \frac{4}{5} s + \frac{3}{5} \sin \theta\right) \quad (3.1.13)$$

elde edilir. Bu elde edilen tubular yüzeyi ve (3.1.12) deki ifadeleri (3.1.5) da yerine yazarak bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = -\frac{1}{25} \frac{3 \cos \theta}{(25 - 3 \cos \theta)}, \quad H = -\frac{1}{50} \frac{(25 - 6 \cos \theta)}{(25 - 3 \cos \theta)} \quad (3.1.14)$$

dir. (3.1.13) parametrizasyonu ile verilen tubular yüzey jakobi eşitliğini sağlar. Gerçekten;

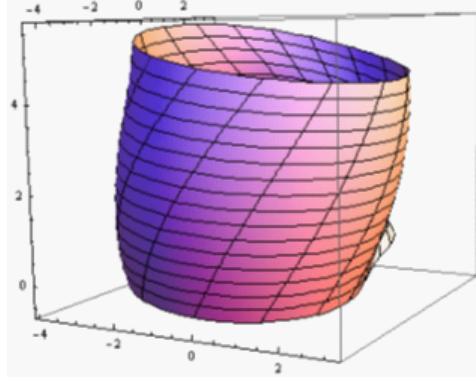
$$K_s = 0, \quad K_\theta = \frac{1}{25} \frac{3 \sin \theta}{(25 - 3 \cos \theta)^2} \quad (3.1.15)$$

$$H_s = 0, \quad H_\theta = \frac{1}{50} \frac{3 \sin \theta}{(25 - 3 \cos \theta)^2} \quad (3.1.16)$$

olup,

$$\Phi(K, H) = K_s H_\theta - K_\theta H_s = 0$$

elde edilir. Böylece, M tubular yüzeyi bir W -yüzeydir.



Şekil 1. M tubular yüzeyi bir W -yüzeydir.

M yüzeyinin asli eğrilikleri için (3.1.7) daki denklemleri kullanırsak;

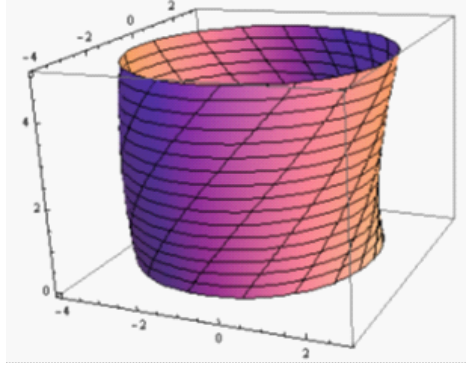
$$k_1 = \frac{1}{25} \left(\frac{3 \cos \theta}{25 - 3 \cos \theta} \right), \quad k_2 = -1 \quad (3.1.17)$$

elde edilir. Burada (3.1.17) eşitlikleri lineerlik şartı ile birlikte düşünülürse,

$$\frac{a}{25} \left(\frac{3 \cos \theta}{25 - 3 \cos \theta} \right) - b = c, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0), \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (3.1.18)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $a, b, c \in \mathbb{R}$ sayıları bulunur. O halde M tubular yüzeyi

bir LW - $yüzey$ dir.



Şekil 2. M tubular yüzeyi bir LW - $yüzey$ dir.

4. BÖLÜM

SONUÇ

3- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri tarafından üretilen Weingarten ve lineer Weingarten yüzeylerin bazı özellikleri incelendi. Daha sonra Tubular Weingarten yüzeyler verilerek bu yüzeylere örnek oluşturuldu. Mathematica programı yardımıyla Weingarten ve lineer Weingarten yüzeylerin şekilleri elde edildi.

Teorem 3.1.2 ye bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 4.1.1.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri α ve M , α eğrisi tarafından üretilen bir tubular yüzey olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $a \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ için

$$ak_1 + bk_2 = c$$

lineer eşitliği sağlanıyor ise bu yüzey ya silindirin bir parçasıdır yada eğrinin eğriliği sıfırdan farklı ise $\sin \theta = 0$ dır.

Teorem 3.1.3 e bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 4.1.2.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $b \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ için

$$ak_1 + b_2 = c$$

lineer eşitliği sağlanıyor ise M , bir minimal yüzey olamaz.

Teorem 3.1.4 ye bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 4.1.3.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. M yüzeyi üzerindeki ortalama eğriliğin sabit olması için gerek ve yeter şart a eğrisinin bir doğru olmasıdır.

Teorem 3.1.5 ye bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 4.1.4.

$\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri tarafından üretilen bir tubular yüzey M olsun. M yüzeyinin umbilik noktası yoktur.

Kaynaklar

- [1] **Baikoussis, C., Koufogiorgos, Th.**, 1997, On the inner curvature of the second fundamental form of helicoidal surfaces, Arch. Math., 68, 169-176.
- [2] **Blair, D. E., Koufogiorgos, Th.**, 1992, Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature, Monatsh. Math., 113, 177-181.
- [3] **Galvez, J.A., Martinez, A., Milan, F.**, Linear Weingarten Surfaces in $\mathbb{R}^3$,
- [4] **Gray, A., Abbena E., Salamon, S.**, 2006, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.
- [5] **Hacısalıhoğlu H. H.** , 1980, Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş, İstanbul.
- [6] **Hacısalıhoğlu H. H.** , 2000, Diferensiyel Geometri *I.* cilt, Ankara.
- [7] **Helgason, S.**, 1978, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academic Press.
- [8] **Karacan, M., K., Tuncer, Y.**, 2010, Tubular W-surfaces in 3-space, Scientia Magna, 3, 55- 62.
- [9] **Kim, Y. H., Yoon, D. W.**, 2006, Mean curvature of non-degenerate second fundamental form of ruled surfaces, Honam Math. J., 28, 549-558.
- [10] **Kühnel, W.**, 1994, Ruled W-surfaces, Arch. Math., 62, 475-480.
- [11] **Kühnel, W., Steller, M.**, 2005, On closed Weingarten surfaces, Monatshefte für Mathematik, 2, 113-126.
- [12] **Lopez, R.**, 2006, On linear Weingarten surfaces, arXiv:math/0607748v1, [math.DG], 28 Jul 2006.
- [13] **Ro, J.S., Yoon, D. W.**, 2009, Tubes of Weingarten Types in a Euclidean 3-Space, Journal of the Chungcheong Mathematical Society, 22, 359-366.
- [14] **Sabuncuoğlu, A.**, 2010, Diferensiyel Geometri, Ankara.
- [15] **Tunçer, Y., Yoon. D. W., Karacan, M. K.**, 2011, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, doi:10.1155/2011/191849.

[16] **Yaylı, Y., Sağlam, D., Kalkan, Ö.**, 2013, Parallel Linear Weingarten Surfaces in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}_1^3$, Mathematical Sciences and Applications E- Notes, 1, 67- 78.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Elazığ 'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ 'da tamamladım. 1999 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2003 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl, özel sektörde matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. Halen, Elazığ' da özel bir eğitim kurumunda çalışmaktayım. Evli ve iki çocuk babasıyım.

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E³ UZAYINDA WEİNGARTEN VE LİNEER WEİNGARTEN TİPİ YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah KAYA

(101121119)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.11.2014
Tezin Savunulduğu Tarih : 09.12.2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Essin TURHAN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa AYDOĞDU (F.Ü)

ARALIK-2014