

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BİR EĞRİNİN İNVOLÜTLERİ VE ÇEŞİTLİ UZAYLARDAKİ
KARŞILIKLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ERDEM
(161121120)

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ

MAYIS-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR EĞRİNİN İNVOŁÜTLERİ VE ÇEŞİTLİ UZAYLARDAKİ
KARŞILIKLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ERDEM

(161121120)

Tezin Enstitüye Verildiğı Tarih : Nisan 2018

Tezin Savunulduğı Tarih : Mayıs 2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Münevver Yıldırım YILMAZ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

: Dr. Öğr. Üyesi İnan ÜNAL

MAYIS-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, değerli hocam, sayın Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ' a teşekkürlerimi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca benim bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme en içten şükranlarımı sunarım.

Esra ERDEM

ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Öklid Uzayı	3
2.2. Frenet Çatısı ve Eğrilikler	4
2.3. Kuaterniyonlar, Kuaterniyon Çatısı ve Serret-Frenet Formülleri	7
3. $\mathbb{E}^n$ DE İNVOLÜT EĞRİ KAVRAMI	12
3.1. $\mathbb{E}^n$ deki k. Mertebeden İnvölüt Eğriler	13
3.2. $\mathbb{E}^3$ deki İnvölütler	14
3.3. $\mathbb{E}^4$ deki İnvölütler	19
4. $\mathbb{Q}_3$ 3 BOYUTLU KUATERNİYONİK UZAYDA İNVOLÜTLER	34
4.1. $\mathbb{Q}_3$ de 1. Mertebeden İnvölütler	34
4.2. $\mathbb{Q}_3$ de 2. Mertebeden İnvölütler	37
5. $\mathbb{Q}_4$ 4 BOYUTLU KUATERNİYONİK UZAYDA İNVOLÜTLER	40
5.1. $\mathbb{Q}_4$ de 1. Mertebeden İnvölütler	42
5.2. $\mathbb{Q}_4$ de 2. Mertebeden İnvölütler	49
5.3. $\mathbb{Q}_4$ de 3. Mertebeden İnvölütler	58
6. SONUÇ	65
7. KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	68

ÖZET

BİR EĞRİNİN İNVLÜTLERİ VE ÇEŞİTLİ UZAYLARDAKİ KARŞILIKLARI

Bu çalışmada verilen bir eğrinin involüt kavramı ele alınarak çeşitli uzaylardaki karakterizasyonları incelenmiştir.

Özellikle $\mathbb{Q}_3$ ve $\mathbb{Q}_4$ de kuaterniyonik eğriler tanımlanarak Kuaterniyon uzayında kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir. Bu formüller yardımıyla $\mathbb{Q}_3$ ve $\mathbb{Q}_4$ uzaylarında kuaterniyonik involüt eğriler için karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet eğrisi, Frenet çatısı, involüt eğri, Kuaterniyon eğrisi, Kuaterniyon çatısı.

SUMMARY

INVOLUTES OF A CURVE AND CONSIDERATION IN VARIOUS SPACES

In this study, the characterizations of a given curve is investigated in various spaces by dealing with concept of involute.

In particularly, Serret-Frenet formulas are given for quaternionic curve in Quaternionic space by defining quaternionic curve in $\mathbb{Q}_3$ and $\mathbb{Q}_4$. The characterizations for quaternionic involute curves are given and proved in $\mathbb{Q}_3$ and $\mathbb{Q}_4$ spaces with these formulas.

Keywords: Frenet curve, Frenet frame, involute curve, Quaternionic curve, Quaternionic frame.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{E}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^3$	:	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	:	4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{Q}_3$	:	3-boyutlu Kuaterniyonik uzay
$\mathbb{Q}_4$	:	4-boyutlu Kuaterniyonik uzay
$\langle, \rangle$	:	İç çarpım
$d(x, y)$	:	Uzaklık
$\ \cdot\ $	:	Norm



1. GİRİŞ

Öklidyen düzlemde eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde çalışmalar Huygens tarafından yapılmıştır [1]. Huygens düzlem eğrilerinin herhangi bir noktadaki eğriliğini ortaya koymuştur [1]. Newton eğriyi bir t parametresine bağlı olarak tanımlayıp eğrinin eğriliğini ifade etmiştir [1]. 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde de birçok çalışma yapılmıştır. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak yeni fikirler ortaya konmuştur. İnvölüt eğriler de bunlardan bir tanesidir. Bir x eğrisinin teğetlerinin ortogonal yörüngelerine x in involütleri denir. x eğrisine yüksek mertebeden değen hiperkürelere ise x in oskülatör hiperkürelere denir. Eğrilerin özellikleri öncelikli olarak Öklidyen uzaylarda ele alınmıştır. Ancak daha sonra çeşitli uzaylardaki karşılıkları da araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Kuaterniyon uzay ve bu uzaydaki eğri kavramı da bu çalışma alanlarından birisidir. Kuaterniyonlar dördeyler olarakta bilinip 1843' te Hamilton tarafından keşfedilmiştir [2].

Kuaterniyon teorisi son yıllarda hızla gelişip ülkemizde lisans ve lisansüstü düzeyde bir çok üniversitede okutulmakta ve bu alanda çalışan çok sayıda matematikçi bulunmaktadır. G. Öztürk, K. Arslan ve B. Bulca involüt ve evolüt kavramlarını n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de incelemiştir [9]. K. Bharathi ve M. Nagaraj Reel değişken Serret-Frenet formüllerinin kuaterniyon değerli fonksiyonunu çalışarak bazı sonuçlara ulaşmıştır [13]. T. Soyfidan ve M. A. Güngör Kuaterniyonik involüt-evolüt eğrilerini ele almıştır [15]. O. Keçilioğlu ve K. İlarslan Öklidyen 4 uzayında kuaterniyonik Bertrand eğrilerini ele almıştır [16]. D. Blazenka ve MS. Zeljka n -boyutlu izotropik uzayda involüt ve evolüt kavramlarını ele almıştır [17]. H. Gluck Öklidyen uzayda bir eğrinin yüksek mertebeden eğriliklerini ele almıştır [18]. J. Monterde sabit eğrilik oranlarına sahip eğriler (ccr eğrisi) tanımlamıştır [19]. G. Öztürk, K. Arslan ve H. H. Hacısalihoğlu ccr eğrilerinin bir karakterizasyonuna yer vermiştir [20]. M. Turgut ve T. A. Ali $\mathbb{E}^4$ Öklidyen uzayda özel eğrilerin bazı karakterizasyonlarını elde etmiştir [21]. M. Bilici ve M. Çalışkan $\mathbb{E}^3$ de involüt-evolüt eğri çiftinin karakterizasyonlarını elde etmiştir [23]. S. Kılıçoğlu ve S. Şenyurt $\mathbb{E}^3$ de ikinci mertebeden involüt eğrilerini çalışarak bazı sonuçlara ulaşmıştır [24].

Bu çalışmada $\mathbb{E}^n$ de k -ıncı mertebeden involütler ele alınıp, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ deki özel halleri

verilmiştir. Dördüncü ve beşinci bölüm çalışmanın orjinal kısmı olup $\mathbb{Q}_3$ ve $\mathbb{Q}_4$ deki bir eğrinin involütleri ele alınmış ve bu uzaylarda involütler için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında herhangi iki vektör x, y olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle, \rangle &: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına n -boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [3].

Tanım 2.1.2 n - boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|, \|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d &: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ d(x, y) &= \|xy\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan fonksiyona $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $x, y \in \mathbb{E}^n$ için $d(x, y)$ değerine de x ile y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir [3].

Tanım 2 1 3 $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu reel iç çarpım uzayı ile birleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n + 1)$ -lisi için eğer $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör sistemi, $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise bu nokta $(n + 1)$ -lisine bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [3].

Tanım 2.1.4 $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayındaki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$E_0 X = \sum_{i=1}^n x_i E_0 E_i$$

dir. Burada $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere

$$x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ reel değerli fonksiyonlar n -lisine de n -boyutlu $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayının Öklid koordinat sistemi denir [3].

2.2. Frenet Çatısı Ve Eğrilikler

Tanım 2.2.1 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de eğri denir [4].

Tanım 2.2.2 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| \neq 0$ ise M eğrisine regüler eğri, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ ya da yay parametresi adı verilir [4].

Tanım 2.2.3 $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$\begin{aligned} \kappa & : I \rightarrow \mathbb{E} \\ \kappa(s) & = \left\| T'(s) \right\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [5].

Teorem 2.2.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3 ayaklısı

$$\begin{aligned} T(s) & = \alpha'(s) \\ N(s) & = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \\ B(s) & = T(s) \times N(s) \end{aligned}$$

şeklindedir [4].

Teorem 2.2.5 $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3 ayaklısı

$$\begin{aligned} T(t) & = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \\ N(t) & = B(t) \times T(t) \\ B(t) & = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \end{aligned}$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.2.6 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [5].

Tanım 2.2.7 $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eğriliği ile belirli $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali denir. N vektör alanına α eğrisinin asli normal vektör alanı denir [5].

Tanım 2.2.8 $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir [5].

Tanım 2.2.9 $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau & : I \rightarrow \mathbb{E} \\ \tau(s) & = -\langle B'(s), N(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma(torsiyon) fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması(torsiyonu) denir [6].

Tanım 2.2.10 Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0$$

ise $\alpha^*(s)$ eğrisine α eğrisinin bir involütü denir [5].

Tanım 2.2.11 Birinci Frenet eğriliği κ_1 in sabit olduğu ve rankı d olan bir Frenet eğrisine Salkowski (yada T.C eğrisi) denir [7].

Tanım 2.2.12 $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq 0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\gamma_m(t) = & \frac{1}{\sqrt[2]{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)t) \right) \\ & -\frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)t) - \frac{1}{2} \sin t, \\ & \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)t) \\ & +\frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)t) - \frac{1}{2} \cos t, \\ & \frac{1}{4m} \cos(2nt)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan eğriye Salkowski eğrisi denir. Burada $n = \frac{m}{\sqrt[2]{1+m^2}}$ dir. Ayrıca

(1) $\|\gamma'_m(t)\| = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{1+m^2}}$, bu eğri $(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n})$ aralığında regülerdir.

(2) $\kappa(t) = 1$ ve $\tau(t) = \tan(nt)$ dir [8].

Tanım 2.2.13 α eğrisine yüksek mertebeden değen hiperkürelere α nın oskülatör hiperküreleri denir [9].

Tanım 2.2.14 $A, B, C \in \mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{T, N, B, E\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}A \wedge B \wedge C &= \begin{vmatrix} T & N & B & E \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \\ A &= (a_1, a_2, a_3, a_4), B = (b_1, b_2, b_3, b_4), C = (c_1, c_2, c_3, c_4)\end{aligned}$$

şeklindeki çarpıma $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpım veya dış çarpım denir [3].

Tanım 2.2.15 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda $\alpha(s)$ seçilmiş bir nokta olmak üzere $\mathbb{E}^n$ in $S_p\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen afin uzayına $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin r -yincı Oskülatör hiperdüzlemi denir [3].

Tanım 2.2.16 $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$ in sabit olduğu rankı d olan Frenet eğrisine (daireesel) helis veya W eğrisi denir [10].

Tanım 2.2.17 Bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$ olmak üzere, tüm $\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}$ oranları sabitse α ya eğrilikleri oranları sabit eğri (CCR eğrisi) denir [19].

Tanım 2.2.18 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir u sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa, M ye bir helis(eğilim çizgisi) ve $Sp\{u\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir [3].

2.3. Kuaterniyonlar, Kuaterniyon Çatısı Ve Serret-Frenet Formülleri

Tanım 2.3.1 Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada, birinci birim $+1$ bir reel sayı olup diğer üç birim ise

$$i) \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_4, (\vec{e}_4 = +1)$$

$$ii) \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i, (ijk) \text{ (123) ün bir çift permütasyonudur.}$$

özelliklerine sahiptir. $Q = \{q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \mid d, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanına reel kuaterniyon denir. Burada $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ kuaterniyonunun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\vec{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır. Yani;

$$S_q = d, \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

olmak üzere $q = S_q + \vec{V}_q$ dır [11], [12].

Tanım 2.3.2 (Toplama İşlemi) p ve q birer reel kuaterniyon olmak üzere

$$\oplus : Q \times Q \rightarrow Q$$

$$(p, q) \rightarrow p \oplus q = S_{p+q} + \vec{V}_{p \oplus q}$$

işlemi $S_{p+q} = S_p + S_q$ ve $\vec{V}_{p \oplus q} = \vec{V}_p \oplus \vec{V}_q$ şeklinde tanımlanır. Burada $S_p, S_q \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir. $\vec{V}_p, \vec{V}_q$ da birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu işleminin aynısıdır. O halde $(Q, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. Bu Abel grubunda $(0, 0, 0, 0)$ sıfır kuaterniyonu etkisiz elemandır [11].

Tanım 2.3.3 (Skalarla Çarpma) p ve q birer reel kuaterniyon olmak üzere

$$\odot : \mathbb{R} \times Q \rightarrow Q$$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan dış işlem için

$$(i) \lambda \odot (p \oplus q) = (\lambda \odot p) \oplus (\lambda \odot q), \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall p, q \in Q,$$

$$(ii) (\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q \in Q,$$

$$(iii) (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q),$$

$$(iv) 1 \odot q = q$$

dir. O halde $\{Q, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzay Q ile gösterilir [11].

Tanım 2.3.4 (Kuaterniyon Çarpımı) p ve q birer reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \times & : Q \times Q \rightarrow Q \\ (p, q) & \rightarrow p \times q = S_p \cdot S_q + S_p \odot \vec{V}_q + S_q \odot \vec{V}_p - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [11]. Burada $\langle, \rangle$ ve $\wedge$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$ üzerindeki iç çarpımı ve vektörel çarpımı göstermektedir. Çalışma boyunca bu semboller aynı anlamlarda kullanılacaktır.

Kuaterniyon çarpımının özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur.

(ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

(iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Ancak kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle $\{Q, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ sistemi bir asosyatif cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir. Kısaca Q ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve boyutu 4 tür.

Özel olarak p ve q birer skalar ise veya vektör kısımları orantılı $(\vec{V}_p = \lambda \vec{V}_q)$ ise $p \times q = q \times p$ olur.

Tanım 2.3.5 (Eşitlik) Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı $\forall p, q \in Q$ için

$$p = q \Leftrightarrow S_p = S_q \text{ ve } \vec{V}_p = \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 2.3.6 (Fark) Toplama ve skalar ile çarpma işlemlerinden iki kuaterniyonun farkı

$$p - q = (S_p - S_q) + (\vec{V}_p - \vec{V}_q)$$

yani

$$S_{p-q} = S_p - S_q \text{ ve } \vec{V}_{p-q} = \vec{V}_p - \vec{V}_q$$

olarak tanımlanır [11].

Tanım 2.3.7 $p, q \in Q$ kuaterniyonları için,

$$\begin{aligned} h & : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R} \\ h(p, q) & = \frac{1}{2} [p \times \alpha q + q \times \alpha p] \end{aligned}$$

ile verilen simetrik, reel değerli, bilineer h formu kuaterniyon iç çarpımı olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.3.8 (Eşlenik) Bir $q \in Q$ kuaterniyonun eşleniği,

$$\begin{aligned} \alpha & : Q \rightarrow Q \\ q & \rightarrow \alpha q = S_q - \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan αq kuaterniyonudur [14]. $\vec{V}_{\alpha q} = -\vec{V}_q$ olduğundan

$$q \times \alpha q = \alpha q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dir. O halde

$$q \times \alpha q = \alpha q \times q \geq 0$$

ve

$$q \times \alpha q = \alpha q \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

dir. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- (i) $\alpha(ap + bq) = a\alpha p + b\alpha q$,
- (ii) $\alpha(p \times q) = \alpha q \times \alpha p$,
- (iii) $\alpha(\alpha p) = p$

şeklindeki özelliklere sahiptir [12].

Tanım 2.3.9 Eğer $\|q\| = 1$ ise o zaman q birim kuaterniyon diye isimlendirilir [15].

Tanım 2.3.10 $q + q = 0$ olduğunda q spatial(uzaysal) kuaterniyon olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.3.11 $q - q = 0$ olduğunda q temporal (geçici) kuaterniyondur [15].

Tanım 2.3.12 Bir $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| & : Q \rightarrow \mathbb{R} \\ q & \rightarrow \|q\| \\ \|q\|^2 & = h(q, q) = q \times \alpha q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\|q\|$ pozitif reel sayısına q nun normu denir [13].

Tanım 2.3.13 Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun inversi;

$$\begin{aligned} (\)^{-1} &: Q - \{0\} \rightarrow Q - \{0\} \\ q &\rightarrow q^{-1} = \frac{\alpha q}{\|q\|^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece,

$$q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$$

dir. $q \neq 0$ olmak üzere, $\forall q \in Q$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması Q cebirini bir bölüm cebiri yapar [11].

Tanım 2.3.14 $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Ancak kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Dolayısıyla bu çarpma iki türlü olduğundan p yi q ile iki türlü bölmek gerekir. r_1 ve r_2 iki kuaterniyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} r_1 &= p \times q^{-1} \\ r_2 &= q^{-1} \times p \end{aligned}$$

dir. Burada r_1 kuaterniyonuna p nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonunada p nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır [11].

Tanım 2.3.15 3- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$, $\{p \in \mathbb{Q}_H \mid p + \gamma p = 0\}$ spatial(uzaysal) kuaterniyonların uzayı ile açık bir şekilde tanımlansın. $\mathbb{R}$ reel doğrusu içindeki birim aralığını $[0, 1]$ olarak belirtelim.

$$\begin{aligned} \alpha &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_H \\ s &\rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) e_i \quad (1 \leq i \leq 3) \end{aligned}$$

$\{k, r\}$ sıfırdan farklı eğrilikler ile yay uzunluğu eğrisi olsun ve $\{t(s), n(s), b(s)\}$ α nın Frenet çatısı olarak tanımlansın. O zaman Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada k , α nın asli eğriliği ve r , α nın torsiyonudur [16].

Tanım 2.3.16 4- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$, birim kuaterniyonların uzayı ile tanımlansın. $\mathbb{R}$ reel doğrusu içindeki birim aralığını $[0, 1]$ olarak tanımlayalım ve

$$\begin{aligned} \alpha & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_H \\ s & \rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(s) e_i \end{aligned}$$

$\{K, k, r - K\}$ sıfırdan farklı eğrilikler ile $\mathbb{E}^4$ de her mertebeden türevlenebilen bir eğri olsun ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ α nın Frenet çatısı olarak tanımlansın. O zaman Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r - K) \\ 0 & 0 & -(r - K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada K , α nın asli eğriliği, k , α nın torsiyonu ve $(r - K)$, α nın bitorsiyonudur [16].

Tanım 2.3.17 $\bar{x}, x : I \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Q}$ sırasıyla, s^* ve s parametrelili herhangi regüler reel kuaterniyonik eğriler olsun. $\{V_{1\bar{x}}, V_{2\bar{x}}, V_{3\bar{x}}, V_{4\bar{x}}\}$ ve $\{V_{1x}, V_{2x}, V_{3x}, V_{4x}\}$, sırasıyla $\bar{x}$ ve x eğrilerinin Serret-Frenet çatısını belirtsin. Eğer $h(T_{\bar{x}}(s^*), T_x(s)) = 0$ ise o zaman $\{\bar{x}, x\}$ eğrileri, $\mathbb{Q}$ da reel kuaterniyonik involüt evolüt eğrileri olarak adlandırılır [15].

3. $\mathbb{E}^n$ DE İNVLÖT EĞRİ KAVRAMI

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n$ de regüler bir eğri olsun. O zaman x , d -inci oskülör mertebeden bir Frenet eğrisi diye isimlendirilir. I da ki tüm t ler için ($2 \leq d \leq n$) ise $x'(t), x''(t), \dots, x^d(t)$ lineer bağımsız $x'(t), x''(t), \dots, x^{(d+1)}(t)$ lineer bağımlıdır [22]. Bu durumda $\text{Im}(x) \mathbb{E}^{n+1}$ in d -boyutlu bir Öklid alt uzayında yatar. Rankı d olan her bir Frenet eğrisi için x boyunca $V_1 = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}, V_2, V_3, \dots, V_d$ ortonormal d çatısı bulunabilir. $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($d-1$) fonksiyonu Frenet eğrilikleri ve $\{V_1, V_2, \dots, V_d\}$ Frenet d - çatısı olmak üzere

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \dots \\ V_d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_d \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

dir. Burada $\nu = \|x'(t)\|$ x eğrisinin hızıdır. Ashında $V_1, V_2, \dots, V_d$ yi elde etmek için Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodunun $x'(t), x''(t), \dots, x^d(t)$ ye uygulanması yeterlidir. Dahası bu hesaplama sırasında $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$ fonksiyonları çarpma ile kolaylıkla elde edilir. Daha kesin olarak $V_1, V_2, \dots, V_d$ ve $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$ aşağıdaki formüllerle belirlenir. Sırasıyla

$$\begin{aligned} E_1(t) &= x'(t); V_1(t) : \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|}, \\ E_\alpha(t) &= x^\alpha(t) - \sum_{i=1}^{\alpha-1} \langle x^\alpha(t), E_i(t) \rangle \frac{E_i(t)}{\|E_i(t)\|^2}, \\ V_\alpha &= \frac{E_\alpha(t)}{\|E_\alpha(t)\|}, \quad 2 \leq \alpha \leq n \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve

$$\kappa_\delta(s) = \frac{\|E_{\delta+1}(t)\|}{\|E_\delta(t)\| \|E_1(t)\|}, \quad (3.3)$$

burada $\delta \in \{1, 2, 3, \dots, d-1\}$ [18]. $d = n$ durumunda da x Frenet eğrisi generic eğri olarak adlandırılır [22].

t deki bir generic x eğrisinin t deki Oskülör hiperdüzlemleri $x(t)$ den geçen ve $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ tarafından üretilen alt uzaydır. $V_n(t)$ birim vektörüne x in t deki bi-normal vektörü denir. x in t deki normal hiperdüzlemleri $x(t)$ den geçen $\{V_2, V_3, \dots, V_n\}$ lerden biri tarafından üretilen hiperdüzlemler olarak tanımlanır.

$\mathbb{E}^3$ deki bir ccr eğrisi genelleştirilmiş bir helis olarak bilinir.

$\mathbb{E}^4$ de bir generic x eğrisi göz önüne alındığında, Frenet 4 çatısı V_1, V_2, V_3, V_4 ve Frenet eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|} \\ V_4(t) &= \frac{x'(t) \wedge x''(t) \wedge x'''(t)}{\|x'(t) \wedge x''(t) \wedge x'''(t)\|} \\ V_3(t) &= \frac{V_4(t) \wedge x'(t) \wedge x''(t)}{\|V_4(t) \wedge x'(t) \wedge x''(t)\|} \\ V_2(t) &= \frac{V_3(t) \wedge V_4(t) \wedge x'(t)}{\|V_3(t) \wedge V_4(t) \wedge x'(t)\|} \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve

$$\kappa_1(t) = \frac{\langle V_2(t), x''(t) \rangle}{\|x'(t)\|^2}, \kappa_2(t) = \frac{\langle V_3(t), x'''(t) \rangle}{\|x'(t)\|^3 \kappa_1(t)}, \kappa_3(t) = \frac{\langle V_4(t), x''''(t) \rangle}{\|x'(t)\|^4 \kappa_1(t) \kappa_2(t)} \quad (3.5)$$

ile verilir. Burada $\wedge$, $\mathbb{E}^4$ içinde dış çarpımdır [18].

3.1. $\mathbb{E}^n$ deki k -ıncı mertebeden İnvölüt Eğriler

Tanım 3.1.1 $x = x(s)$ yay parametresi s ile verilen $\mathbb{E}^n$ de regüler generic bir eğri olsun. (Yani $\|x'(s)\| = 1$). x in k -boyutlu oskülatör hiperdüzlemlerinin sistemine ortogonal olan eğrilere, x eğrisinin k -ıncı mertebeden involütleri denir [9]. Basitlik için 1. mertebeden involütleri sadece verilen eğrinin involütü olarak adlandırılır.

λ_α , diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $s, \bar{x}$ in parametresi olduğunda yay uzunluğu parametresi olmak zorunda olmayan bir parametresi olmak üzere x eğrisinin k -ıncı mertebeden $\bar{x}$ involütlerinin parametrizasyonu

$$\bar{x}(s) = x(s) + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha(s) V_\alpha(s), \quad k \leq n-1 \quad (3.6)$$

dir. (3.6) ve (3.1) Frenet formüllerinin türevi aşağıdaki denklemi verir.

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) &= \left(1 + \lambda_1' - \kappa_1 \lambda_2\right)(s) V_1(s) \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{k-1} \left(\lambda_\alpha' - \lambda_{\alpha+1} \kappa_\alpha + \lambda_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1}\right)(s) V_\alpha(s) \\ &+ \left(\lambda_k' + \lambda_{k-1} \kappa_{k-1}\right)(s) \nu_\alpha(s) + \kappa_k(s) \lambda_k(s) V_{k+1}(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ayrıca, x eğrisinin k -ıncı mertebeden $\bar{x}$ involütleri

$$\left\langle \bar{x}'(s), V_j(s) \right\rangle = 0; \quad 1 \leq j \leq k \leq n-1$$

ile belirlenir. Bu durumun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1' - \kappa_1 \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_\alpha' - \lambda_{\alpha+1} \kappa_\alpha + \lambda_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} &= 0 \\ \lambda_k' + \lambda_{k-1} \kappa_{k-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

olmasıdır. Burada $2 \leq \alpha \leq n-1$ dir. Dolayısıyla regüler generic eğri x in k -ıncı mertebeden involütleri (3.8) ile gösterilir ve aynı şekilde seçildiğinde λ_k sıfır olmaz ve $\bar{V}_1(s) = \pm V_{k+1}$ dir. $\lambda_k \neq 0$ şartı daima sağlanır [9].

3.2. $\mathbb{E}^3$ deki İnvölütler

Bu bölümde sırasıyla $\mathbb{E}^3$ deki eğrilerin 1. mertebeden ve 2. mertebeden involütleri hesaplanacaktır.

3.2.1. $\mathbb{E}^3$ de 1. mertebeden İnvölütler

Önerme 3.2.1 $x = x(s)$ sıfırdan farklı Frenet eğrilikleri κ_1 ve κ_2 ile verilen $\mathbb{E}^3$ de regüler bir eğri olsun. x eğrisinin $\bar{x}$ involütlerinin $\bar{\kappa}_1$ ve $\bar{\kappa}_2$ Frenet eğrilikleri

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{|\kappa_1| |s-c|}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)' \kappa_1}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \cdot (c-s)} \quad (3.9)$$

ile verilir [9].

İspat: $\bar{x} = \bar{x}(s)$ $\mathbb{E}^3$ deki x eğrisinin involütü olsun. Sonra (3.7) ve (3.8) den

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= x(s) + \lambda_1(s) V_1(s) \\ \bar{x}'(s) &= V_1(s) + \lambda_1'(s) V_1(s) + \kappa_1(s) \lambda_1(s) V_2(s) \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\left\langle \bar{x}'(s), V_j(s) \right\rangle = 0, \quad j = 1$$

olduğundan

$$\left\langle \bar{x}'(s), V_1(s) \right\rangle = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$1 + \lambda_1'(s) = 0$$

olur. İntegral alınırsa c integral sabiti olmak üzere

$$s + \lambda_1(s) = c \Rightarrow \lambda_1(s) = c - s$$

olur. Böylece

$$\bar{x}(s) = x(s) + (c - s)V_1(s) \quad (3.10)$$

parametrizasyonu elde edilir. Ayrıca

$$\varphi(s) = \kappa_1(s)(c - s)$$

alınırsa

$$\bar{x}'(s) = \varphi(s)V_2(s)$$

olur.

$$\begin{aligned} \bar{x}''(s) &= -\varphi(s)\kappa_1(s)V_1(s) + \varphi'(s)V_2(s) + \varphi(s)\kappa_2(s)V_3(s) \\ \bar{x}'''(s) &= -\left\{\kappa_1'(s)\varphi(s) + 2\varphi'(s)\kappa_1(s)\right\}V_1(s) \\ &\quad + \left\{-\varphi(s)\kappa_1^2(s) + \varphi''(s) - \kappa_2(s)\varphi(s)\right\}V_2(s) \\ &\quad + \left\{\kappa_2'(s)\varphi(s) + \kappa_2(s)\varphi'(s) + \kappa_2(s)\varphi'(s)\right\}V_3(s) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\bar{x}'(s)$ in normu alınırsa

$$\|\bar{x}'(s)\| = |\varphi(s)| = |(c - s)\kappa_1(s)|$$

dir.

$$\bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s) = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ 0 & \varphi & 0 \\ -\varphi\kappa_1 & \varphi' & \varphi\kappa_2 \end{vmatrix} = \varphi^2[\kappa_2V_1(s) + \kappa_1V_3(s)]$$

elde edilir. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\|\bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s)\| = \varphi^2 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$$

olur. Böylece

$$\langle \bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s), \bar{x}'''(s) \rangle = \varphi^3 [\kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1']$$

olur ve yapılan hesaplamalardan

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}'(s)\| &= |\varphi(s)| = |(c-s)\kappa_1(s)| \\
\|\bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s)\| &= \varphi^2 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \\
\langle \bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s), \bar{x}'''(s) \rangle &= \varphi^3 [\kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2 \kappa_1']
\end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitlikleri bulunur. s parametresi $\bar{x}$ nün yay parametresi değildir, bu nedenle yukarıdaki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 &= \frac{\|\bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s)\|}{\|\bar{x}'(s)\|^3} = \frac{\varphi^2 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{\varphi^3} = \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{|\kappa_1| |s-c|} \\
\bar{\kappa}_2 &= \frac{\langle \bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s), \bar{x}'''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s)\|^2} = \frac{\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)' \kappa_1}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \cdot (c-s)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olur [17]. Dolayısıyla (3.11) ve (3.15) bağıntılarından (3.9) elde edilir.

(3.9) un kullanımı ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilebilir [9].

Sonuç 3.2.1 $x = x(s)$ $\mathbb{E}^3$ de bir silindirik helis olduğunda x in $\bar{x}$ ü involütü bir düzlemsel eğridir [9].

3.2.2. $\mathbb{E}^3$ de 2. mertebeden involütler

$\mathbb{E}^3$ de x regüler eğrisinin 2. mertebeden bir involütü

$$\bar{x}(s) = x(s) + \lambda_1(s) V_1(s) + \lambda_2(s) V_2(s) \tag{3.13}$$

şeklinde bir parametrizasyona sahiptir. Burada V_1 ve V_2 , x eğrisinin teğet ve normalidir ve λ_1, λ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
\lambda_1'(s) &= \kappa_1(s) \lambda_2(s) - 1 \\
\lambda_2'(s) &= -\lambda_1(s) \kappa_1(s)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

denklemlerini sağlayan türevlenebilir fonksiyonlardır [9].

Önerme 3.2.2 $x = x(s)$ sıfırdan farklı Frenet eğrilikleri κ_1 ve κ_2 ile verilen $\mathbb{E}^3$ de bir regüler eğri olsun. x eğrisinin 2. mertebeden $\bar{x}$ involütünün κ_1 ve κ_2 Frenet eğrilikleri

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\text{sgn}(\kappa_2)}{|\lambda_2|}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_1}{\lambda_2 \kappa_2} \tag{3.15}$$

ile verilir [9].

İspat: $\bar{x}(s)$ $\mathbb{E}^3$ deki x eğrisinin 2. mertebeden involütü olsun. (3.7) ve (3.8) den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\bar{x}(s) = x(s) + \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha}(s) V_{\alpha}(s) = x(s) + \lambda_1(s) V_1(s) + \lambda_2(s) V_2(s)$$

eşitliğininde türev alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) = & \left[1 + \lambda_1'(s) - \lambda_2(s) \kappa_1(s) \right] V_1(s) + \\ & \left[\lambda_1(s) \kappa_1(s) + \lambda_2'(s) \right] V_2(s) + [\lambda_2(s) \kappa_2(s)] V_3(s) \end{aligned}$$

olur. $1 \leq \alpha \leq 2$ olduğundan

$$\langle \bar{x}'(s), V_1(s) \rangle = 0, \langle \bar{x}'(s), V_2(s) \rangle = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$\bar{x}'(s) = \lambda_2(s) \kappa_2(s) V_3(s) \quad (3.16)$$

elde edilir.

$$\Psi(s) = \lambda_2(s) \kappa_2(s)$$

diye adlandırılırsa

$$\bar{x}'(s) = \Psi(s) V_3(s)$$

olur. Bu denklemlerin türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{x}''(s) = & -\Psi(s) \kappa_2(s) V_2(s) + \Psi'(s) V_3(s) \\ \bar{x}'''(s) = & \Psi(s) \kappa_1(s) \kappa_2(s) V_1(s) - \left\{ 2\Psi'(s) \kappa_2(s) + \Psi(s) \kappa_2'(s) \right\} V_2(s) \\ & + \left\{ \Psi''(s) - \Psi(s) \kappa_2^2(s) \right\} V_3(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \left\| \bar{x}'(s) \right\| &= |\Psi(s)| = |\lambda_2(s) \kappa_2(s)| \\ \bar{x}'(s) \times \bar{x}''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ 0 & 0 & \Psi(s) \\ 0 & -\Psi(s) \kappa_2(s) & \Psi'(s) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\| \overline{x}'(s) \times \overline{x}''(s) \right\| &= \Psi^2(s) \kappa_2(s) \\
\left\| \overline{x}'(s) \right\| &= |\Psi(s)| = |\lambda_2(s) \kappa_2(s)| \\
\left\langle \overline{x}'(s) \times \overline{x}''(s), \overline{x}'''(s) \right\rangle &= \Psi^3(s) \kappa_1(s) \kappa_2^2(s)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. Sonuç olarak Frenet eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\overline{\kappa}_1 &= \frac{\left\| \overline{x}'(s) \times \overline{x}''(s) \right\|}{\left\| \overline{x}'(s) \right\|^3} = \frac{\Psi^2(s) \kappa_2(s)}{|\Psi(s)|^3} = \frac{\kappa_2(s)}{|\lambda_2(s) \kappa_2(s)|} = \frac{\text{sgn}(\kappa_2)}{|\lambda_2|} \\
\overline{\kappa}_2 &= \frac{\left\langle \overline{x}'(s) \times \overline{x}''(s), \overline{x}'''(s) \right\rangle}{\left\| \overline{x}'(s) \times \overline{x}''(s) \right\|^2} = \frac{\Psi^3(s) \kappa_1(s) \kappa_2^2(s)}{\Psi^4(s) \kappa_2^2(s)} = \frac{\kappa_1}{\lambda_2 \kappa_2}
\end{aligned}$$

sonuçlarına varılır [9].

Sonuç 3.2.2 $\mathbb{E}^3$ deki bir genelleştirilmiş helisin 2. mertebeden $\overline{x}$ involütü $\mathbb{E}^3$ de bir genelleştirilmiş helisdir [9].

(3.14) diferansiyel denklem sisteminin çözülmesiyle aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3 $x = x(s)$ $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı Salkowski eğrisi olsun. Daha sonra x eğrisinin 2. dereceden $\overline{x}$ involütlerinin katsayı fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\lambda_1(s) &= c_1 \sin(\kappa_1(s)) + c_2 \cos(\kappa_1(s)) \\
\lambda_2(s) &= c_1 \cos(\kappa_1(s)) - c_2 \sin(\kappa_1(s)) - \frac{1}{\kappa_1}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ile verilen (3.13) parametrizasyonuna sahiptir. Burada c_1 ve c_2 reel sabitlerdir [9].

3.3. $\mathbb{E}^4$ deki İnvolutler

Bu bölümde $\mathbb{E}^4$ uzayında bir x eğrisi için ($1 \leq k \leq 3$) olmak üzere k -ıncı mertebeden involütler ele alınacaktır.

3.3.1. $\mathbb{E}^4$ deki 1. mertebeden involütler

Önerme 3.3.1 $x = x(s)$, $\mathbb{E}^4$ de Frenet eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 ile verilen bir regüler eğri olsun. O zaman x eğrisinin $\bar{x}$ involütünün Frenet 4 çatısı $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4$ ve $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3$ Frenet eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(s) &= V_2 \\ \bar{V}_2(s) &= \frac{-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \\ \bar{V}_3(s) &= \frac{-(\kappa_2 A - \kappa_1 C)\kappa_2 V_1 - (\kappa_2 A - \kappa_1 C)\kappa_1 V_3 + D(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)V_4}{W \left(\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \right)} \\ \bar{V}_4(s) &= \frac{D\kappa_2 V_1 + D\kappa_1 V_3 + (\kappa_2 A - \kappa_1 C)V_4}{W}\end{aligned} \quad (3.19)$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_1 &= \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{|\varphi|}; \varphi = (c - s)\kappa_1 \\ \bar{\kappa}_2 &= \frac{W}{\varphi^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)} \\ \bar{\kappa}_3 &= \frac{(\kappa_2 A - \kappa_1 C)(\kappa_3 C + D') - D(\kappa_2 A' - \kappa_1 C') + D^2 \kappa_1 \kappa_3}{W \varphi^4 \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2}\end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak verilir. Burada

$$\begin{aligned}A &= \kappa_1' \varphi + 2\kappa_1 \varphi' \\ B &= \varphi'' - \kappa_1^2 \varphi - \kappa_2^2 \varphi \\ C &= \kappa_2' \varphi + 2\kappa_2 \varphi' \\ D &= \kappa_2 \kappa_3 \varphi\end{aligned}$$

ve

$$W = \sqrt{D^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + (\kappa_1 C - \kappa_2 A)^2} = |\varphi| \sqrt{\kappa_2^2 \kappa_3^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + (\kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2 \kappa_1')^2} \quad (3.21)$$

dir [9].

İspat: Önerme 3.2.2 nin ispatında olduğu gibi $\mathbb{E}^4$ deki x eğrisinin $\bar{x} = \bar{x}(s)$ involütüne benzer olarak

$$\bar{x}(s) = x(s) + (c-s)V_1(s)$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada V_1 , x in birim teğet vektörüdür.

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılarak $\bar{x}(s)$ konum vektörünün türevleri alınır ve $(c-s)\kappa_1 = \varphi$ denilirse

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) &= (c-s)\kappa_1 V_2 = \varphi V_2 \\ \bar{x}''(s) &= -\varphi\kappa_1 V_1 + \varphi' V_2 + \varphi\kappa_2 V_3 \\ \bar{x}'''(s) &= -\left\{\varphi'\kappa_1 + \varphi\kappa_1 + \varphi'\kappa_1\right\} V_1 + \left\{\varphi'' - \varphi\kappa_1^2 - \varphi\kappa_2^2\right\} V_2 + \left\{\varphi'\kappa_2 + \varphi'\kappa_2 + \varphi\kappa_2'\right\} V_3 + \varphi\kappa_2\kappa_3 V_4 \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} A &= \kappa_1'\varphi + 2\kappa_1\varphi' \\ B &= \varphi'' - \kappa_1^2\varphi - \kappa_2^2\varphi \\ C &= \kappa_2'\varphi + 2\kappa_2\varphi' \\ D &= \kappa_2\kappa_3\varphi \end{aligned} \quad (3.23)$$

olduğundan

$$\bar{x}'''(s) = -AV_1 + BV_2 + CV_3 + DV_4 \quad (3.24)$$

dir. Ayrıca $\bar{x}'''(s)$ in s e göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \bar{x}''''(s) &= -\left\{A' + B\kappa_1\right\} V_1 + \left\{-A\kappa_1 + B' - C\kappa_2\right\} V_2 \\ &\quad + \left\{B\kappa_2 + C' - D\kappa_3\right\} V_3 + \left\{D' + C\kappa_3\right\} V_4 \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. $\bar{V}_1(s)$ hesaplanırsa

$$\bar{V}_1(s) = \frac{\bar{x}'(s)}{\|\bar{x}'(s)\|} = \frac{\varphi V_2}{\varphi} = V_2$$

olur. Şimdi (3.22) kullanılarak $\bar{x}$ nin 2. esas normali ve $\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)$ formu hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ 0 & \varphi & 0 & 0 \\ -\varphi\kappa_1 & \varphi' & \varphi\kappa_2 & 0 \\ -A & B & C & D \end{vmatrix} \\ &= \varphi^2 \{D\kappa_2 V_1 + D\kappa_1 V_3 + (\kappa_2 A - \kappa_1 C) V_4\} \end{aligned}$$

$\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)$ normu alınırsa

$$\left\| \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) \right\| = \varphi^2 \sqrt{D^2 (\kappa_2^2 + \kappa_1^2) + (\kappa_2 A - \kappa_1 C)^2}$$

dir. $\bar{V}_4(s)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \bar{V}_4(s) &= \frac{\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)}{\left\| \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) \right\|} \\ &= \frac{\varphi^2 \{D\kappa_2 V_1 + D\kappa_1 V_3 + (\kappa_2 A - \kappa_1 C) V_4\}}{\varphi^2 \sqrt{D^2 (\kappa_2^2 + \kappa_1^2) + (\kappa_2 A - \kappa_1 C)^2}} \\ &= \frac{D\kappa_2 V_1 + D\kappa_1 V_3 + (\kappa_2 A - \kappa_1 C) V_4}{W} \end{aligned} \quad (3.26)$$

olur. Burada

$$W = \sqrt{D^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + (\kappa_1 C - \kappa_2 A)^2} \quad (3.27)$$

dir. $\bar{V}_3(s)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \frac{D\kappa_2}{W} & 0 & \frac{D\kappa_1}{W} & \frac{\kappa_2 A - \kappa_1 C}{W} \\ 0 & \varphi & 0 & 0 \\ -\varphi\kappa_1 & \varphi' & \varphi\kappa_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\varphi^2}{w} \left\{ \begin{array}{l} -(\kappa_2 A - \kappa_1 C) \kappa_2 V_1 \\ -(\kappa_2 A - \kappa_1 C) \kappa_1 V_3 + D(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) V_4 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s)$ ifadesinin normu alınırsa

$$\begin{aligned} &\left\| \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \right\| \\ &= \sqrt{\frac{\varphi^4}{W^2} (\kappa_2 A - \kappa_1 C)^2 \kappa_2^2 + (\kappa_2 A - \kappa_1 C)^2 \kappa_1^2 + D^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2} \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
\bar{V}_3(s) &= \frac{\bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s)}{\|\bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s)\|} \\
&= \frac{-(\kappa_2 A - \kappa_1 C) \kappa_2 V_1 - (\kappa_2 A - \kappa_1 C) \kappa_1 V_3 + D(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) V_4}{W \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\bar{V}_2(s)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\bar{V}_3(s) \wedge \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \frac{-\kappa_2^2 A + \kappa_1 \kappa_2 C}{W \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} & 0 & \frac{-\kappa_2 \kappa_1 A + \kappa_1^2 C}{W \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} & \frac{D(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{W \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \\ \frac{D \kappa_2}{W} & 0 & \frac{D \kappa_1}{W} & \frac{+\kappa_2 A - \kappa_1 C}{W} \\ 0 & \varphi & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \varphi \left\{ \frac{[D^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - (\kappa_2 A - \kappa_1 C)^2] [-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3]}{W^2 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $\bar{V}_3(s) \wedge \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s)$ normu alınır

$$\|\bar{V}_3(s) \wedge \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s)\| = \sqrt{\frac{\varphi^2 \{D^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - (\kappa_2 A - \kappa_1 C)^2\}^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{W^4 (\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2})^2}}$$

olur.

$$\bar{V}_2(s) = \frac{\bar{V}_3(s) \wedge \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s)}{\|\bar{V}_3(s) \wedge \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s)\|} = \frac{-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \quad (3.29)$$

dir. (3.5) kullanılarak $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ hesaplanabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle \bar{V}_2(s), \bar{x}''(s) \rangle &= \left\langle \frac{-\kappa_1 V_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} + \frac{\kappa_2 V_3}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}, -\varphi \kappa_1 V_1 + \varphi' V_2 + \varphi \kappa_2 V_3 \right\rangle \\
&= \frac{\varphi(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} = \varphi \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \\
\langle \bar{V}_3(s), \bar{x}'''(s) \rangle &= \left\langle \frac{-(\kappa_2 A - \kappa_1 C) \kappa_2 V_1 - (\kappa_2 A - \kappa_1 C) \kappa_1 V_3 + D(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) V_4}{W \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}, \right. \\
&\quad \left. -A V_1 + B V_2 + C V_3 + D V_4 \right\rangle \quad (3.30) \\
&= \frac{W}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \left\langle \frac{D \kappa_2 V_1 + D \kappa_1 V_3 + (\kappa_2 A - \kappa_1 C) V_4}{W}, \right. \\
\langle \bar{V}_4(s), \bar{x}''''(s) \rangle &= - (A' + B \kappa_1) V_1 + (-A \kappa_1 + B' - C \kappa_2) V_2 \\
&\quad + (B \kappa_2 + C' - D \kappa_3) V_3 + (D' + C \kappa_3) V_4 \\
&= \frac{(\kappa_2 A - \kappa_1 C) (D' + C \kappa_3) - D (\kappa_2 A' - \kappa_1 C') + D^2 \kappa_1 \kappa_3}{W}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1(s) &= \frac{\langle \bar{V}_2(s), \bar{x}''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^2} = \frac{\varphi \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{\varphi^2} = \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{|\varphi|} \\
\bar{\kappa}_2(s) &= \frac{\langle \bar{V}_3(s), \bar{x}'''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^3 \bar{\kappa}_1(s)} = \frac{\frac{W}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}}{\varphi^3 \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{\varphi}} = \frac{W}{\varphi^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)} \\
\bar{\kappa}_3(s) &= \frac{\langle \bar{V}_4(s), \bar{x}''''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^4 \bar{\kappa}_1(s) \bar{\kappa}_2(s)} \\
&= \frac{(\kappa_2 A - \kappa_1 C)(D' + \kappa_3 C) - D(\kappa_2 A' - \kappa_1 C') + D^2 \kappa_1 \kappa_3}{W \varphi^4 \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2}
\end{aligned}$$

bulunur [9].

Sonuç 3.3.1 $\bar{x}$, $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ ve $\bar{\kappa}_3$ Frenet eğrilikleri ile verilen $\mathbb{E}^4$ deki x eğrisinin bir involütü olsun. Eğer x bir W generic eğrisi ise o zaman x eğrisinin $\bar{x}$ involütünün Frenet 4 çatısı $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4$ ve Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ ve $\bar{\kappa}_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1(s) &= V_2 \\
\bar{V}_2(s) &= \frac{-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \\
\bar{V}_3(s) &= V_4 \\
\bar{V}_4(s) &= \frac{\kappa_2 V_1 + \kappa_1 V_3}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1(s) &= \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{|\varphi|} \\
\bar{\kappa}_2(s) &= \frac{\kappa_2 \kappa_3}{|\varphi| \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \\
\bar{\kappa}_3(s) &= \frac{-\kappa_1 \kappa_3}{|\varphi| \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

dir. Burada $\varphi = (c - s) \kappa(s)$ dir [9].

Sonuç 3 3 2 $\bar{x}$, Frenet eğrilikleri, $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ ve $\bar{\kappa}_3$ ile verilen $\mathbb{E}^4$ deki genel bir x eğrisinin involütü olsun. Eğer x bir W eğrisi ise o zaman $\bar{x}$ bir ccr eğrisi olur [9].

3.3.2. $\mathbb{E}^4$ 2. mertebeden involütler

$\mathbb{E}^4$ deki x regüler eğrisinin 2. mertebeden involütü

$$\bar{x}(s) = x(s) + \lambda_1(s) V_1(s) + \lambda_2(s) V_2(s) \quad (3.33)$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada V_1, V_2 $\mathbb{E}^4$ de teğet ve x in normal vektörüdür ve λ_1, λ_2 aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyonlardır.[9].

$$\begin{aligned} \lambda_1'(s) &= \kappa_1(s) \lambda_2(s) - 1 \\ \lambda_2'(s) &= -\lambda_1(s) \kappa_1(s) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Önceki alt bölümde olduğu gibi aşağıdaki sonuç elde edilir

Sonuç 3.3.3 $x = x(s)$ $\mathbb{E}^4$ de bir birim hızlı Salkowski eğrisi olsun. x eğrisinin 2. mertebeden $\bar{x}$ involütü, aşağıdaki katsayı fonksiyonları ile verilen (3.33) parametrizasyonuna sahiptir.

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= c_1 \sin(\kappa_1(s)) + c_2 \cos(\kappa_1(s)) \\ \lambda_2(s) &= c_1 \cos(\kappa_1(s)) - c_2 \sin(\kappa_1(s)) - \frac{1}{\kappa_1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Burada c_1 ve c_2 reel sabitlerdir [9].

Önerme 3.3.2 $x = x(s)$ sıfırdan farklı Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3$ ile verilen $\mathbb{E}^4$ de regüler bir eğri olsun. x in 2. mertebeden $\bar{x}$ involütünün Frenet çatısı $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4$ ve Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3$

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(s) &= V_3 \\ \bar{V}_2(s) &= \frac{-\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4}{\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}} \\ &\quad K(\kappa_2^2 + \kappa_3^2) V_1 + (\kappa_2 N - \kappa_3 L) \kappa_3 V_2 \\ &\quad + (\kappa_2 N - \kappa_3 L) \kappa_2 V_4 \\ \bar{V}_3(s) &= \frac{W \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}}{W \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}} \\ \bar{V}_4(s) &= \frac{(\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_1 - \kappa_3 K V_2 - \kappa_2 K V_4}{W} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 &= \frac{\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}}{|\phi|}; \phi = \lambda_2(s) \kappa_2(s) \\
\bar{\kappa}_2 &= \frac{W}{\phi^2 (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)} \\
\bar{\kappa}_3 &= \frac{(\kappa_2 N - \kappa_3 L) (\kappa_1 L + K') + (-\kappa_2 N' + \kappa_3 L') K - \kappa_1 \kappa_3 K^2}{W \phi^4 \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
K &= \kappa_1 \kappa_2 \phi \\
L &= 2\kappa_2 \phi' + \kappa_2' \phi \\
N &= 2\kappa_3 \phi' + \kappa_3' \phi
\end{aligned}$$

ve

$$W = \sqrt{K^2 (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) + (\kappa_2 N - \kappa_3 L)^2} = |\phi| \sqrt{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) + (\kappa_2 \kappa_3' - \kappa_3 \kappa_2')^2} \tag{3.38}$$

dir [9].

İspat: $\bar{x} = \bar{x}(s) \mathbb{E}^4$ deki x eğrisinin 2. mertebeden involütü olsun. Daha sonra (3.7) nin kullanılmasıyla

$$\bar{x}'(s) = \phi V_3 \tag{3.39}$$

elde edilir. Burada $\phi(s) = \lambda_2(s) \kappa_2(s)$ türevlenebilir bir fonksiyondur. Dahası (3.39) un türevlerinin alınmasıyla aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
\bar{x}''(s) &= -\phi \kappa_2 V_2 + \phi' V_3 + \phi \kappa_3 V_4 \\
\bar{x}'''(s) &= \kappa_1 \kappa_2 \phi V_1 - \left\{ 2\kappa_2 \phi' + \kappa_2' \phi \right\} V_2 \\
&\quad + \left\{ \phi'' - \kappa_2^2 \phi - \kappa_3^2 \phi \right\} V_3 + \left\{ 2\kappa_3 \phi' + \kappa_3' \phi \right\} V_4
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
K &= \kappa_1 \kappa_2 \phi \\
L &= 2\kappa_2 \phi' + \kappa_2' \phi \\
M &= \phi'' - \kappa_2^2 \phi - \kappa_3^2 \phi \\
N &= 2\kappa_3 \phi' + \kappa_3' \phi
\end{aligned} \tag{3.41}$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\bar{x}''' = KV_1 - LV_2 + MV_3 + NV_4 \quad (3.42)$$

olur. $\bar{x}'''$ nin s e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{x}'''' &= \left\{ K' + \kappa_1 L \right\} V_1 + \left\{ \kappa_1 K - \kappa_2 M - L' \right\} V_2 \\ &+ \left\{ M' - \kappa_2 L - \kappa_3 N \right\} V_3 + \left\{ N' + \kappa_3 M \right\} V_4 \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. Dolayısıyla önceki önermelerde olduğu gibi bazı hesaplamalardan sonra (3.39) ve (3.43), (3.4) ve (3.5) te yerine koyulursa aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Buradan $\bar{V}_1(s)$

$$\bar{V}_1(s) = \frac{\bar{x}'(s)}{\|\bar{x}'(s)\|} = \frac{\phi V_3}{\phi} = V_3$$

olarak elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi\kappa_2 & \phi' & \phi\kappa_3 \\ K & -L & M & N \end{vmatrix} \\ &= \phi^2 \{ (\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_1 - K\kappa_3 V_2 - K\kappa_2 V_4 \} \end{aligned}$$

olur. $\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)$ in normu alınırsa

$$\left\| \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) \right\| = \sqrt{\phi^4 \{ (\kappa_2 N - \kappa_3 L)^2 + K^2 (\kappa_3^2 + \kappa_2^2) \}}$$

bulunur.

$$W = \phi^2 \sqrt{\{ (\kappa_2 N - \kappa_3 L)^2 + K^2 (\kappa_3^2 + \kappa_2^2) \}}$$

diye ifade edilirse

$$\begin{aligned} \bar{V}_4(s) &= \frac{\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)}{\left\| \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) \right\|} \\ &= \frac{(\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_1 - K\kappa_3 V_2 - K\kappa_2 V_4}{W} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \frac{\kappa_2 N - \kappa_3 L}{W} & \frac{-\kappa_3 K}{W} & 0 & \frac{-K\kappa_2}{W} \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi\kappa_2 & \phi' & \phi\kappa_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\phi^2}{W} \left\{ \begin{array}{l} K(\kappa_3^2 + \kappa_2^2) V_1 + \kappa_3(\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_2 \\ + \kappa_2(\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_4 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

olur. $\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s)$ in normu alınırsa

$$\begin{aligned}\|\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s)\| &= \frac{\phi^2}{W} \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2} W \\ &= \phi^2 \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{V}_3(s) &= \frac{\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s)}{\|\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s)\|} \\ &= \frac{\{K(\kappa_3^2 + \kappa_2^2) V_1 + \kappa_3(\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_2 + \kappa_2(\kappa_2 N - \kappa_3 L) V_4\}}{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2} W}\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned}&\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \\ &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ K(\kappa_3^2 + \kappa_2^2) & \kappa_3(\kappa_2 N - \kappa_3 L) & 0 & \kappa_2(\kappa_2 N - \kappa_3 L) \\ \kappa_2 N - \kappa_3 L & -\kappa_3 K & 0 & -\kappa_2 K \\ 0 & 0 & \phi & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{W^2 \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}} \\ &= \frac{\phi(\kappa_3 V_4 - \kappa_2 V_2)}{W \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}\end{aligned}$$

olur. $\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s)$ in normu alınırsa

$$\|\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s)\| = \sqrt{\frac{\phi^2(\kappa_3^2 + \kappa_2^2)}{W^2 \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}}$$

ve

$$\overline{V}_2(s) = \frac{\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s)}{\|\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s)\|} = \frac{\kappa_3 V_4 - \kappa_2 V_2}{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}$$

bulunur. Sonuç olarak Frenet eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1(s) &= \frac{\langle \bar{V}_2(s), \bar{x}''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^2} = \frac{\left\langle \frac{\kappa_3 V_4 - \kappa_2 V_2}{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}, -\phi \kappa_2 V_2 + \phi' V_3 + \phi \kappa_3 V_4 \right\rangle}{\left(\sqrt{\phi^2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}{|\phi|} \\
\bar{\kappa}_2(s) &= \frac{\langle \bar{V}_3(s), \bar{x}'''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^3 \bar{\kappa}_1(s)} \\
&= \frac{\left\langle \frac{\{K(\kappa_3^2 + \kappa_2^2)V_1 + \kappa_3(\kappa_2 N - \kappa_3 L)V_2 + \kappa_2(\kappa_2 N - \kappa_3 L)V_4\}}{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2} W}, KV_1 - LV_2 + MV_3 + NV_4 \right\rangle}{|\phi|^2 \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}} \\
&= \frac{W}{\phi^2 (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)} \\
\bar{\kappa}_3(s) &= \frac{\langle \bar{V}_4(s), \bar{x}''''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^4 \bar{\kappa}_1(s) \bar{\kappa}_2(s)} \\
&= \frac{\left\langle \frac{(\kappa_2 N - \kappa_3 L)V_1 - K\kappa_3 V_2 - K\kappa_2 V_4}{W}, \right. \\
&\quad \left. \{K' + \kappa_1 L\} V_1 + \{\kappa_1 K - \kappa_2 M - L'\} V_2 \right. \\
&\quad \left. + \{M' - \kappa_2 L - \kappa_3 N\} V_3 + \{N' + \kappa_3 M\} V_4 \right\rangle}{W |\phi|^4 \bar{\kappa}_1(s) \bar{\kappa}_2(s)} \\
\bar{\kappa}_4(s) &= \frac{(\kappa_2 N - \kappa_3 L)(\kappa_1 L + K') + K(-\kappa_2 N' + \kappa_3 L') - \kappa_3 \kappa_1 K^2}{W |\phi|^4 \bar{\kappa}_1(s) \bar{\kappa}_2(s)}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur [9].

Sonuç 3.3.4 $\bar{x}$, Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1(s)$, $\bar{\kappa}_2(s)$, $\bar{\kappa}_3(s)$ ile verilen $\mathbb{E}^4$ deki generic bir x eğrisinin 2. mertebeden involütü olsun. Eğer x bir W eğrisi ise $\mathbb{E}^4$ deki bir regüler x eğrisinin 2. mertebeden $\bar{x}$ involütünün Frenet 4 çatısı $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ ve $\bar{V}_4$ Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ ve $\bar{\kappa}_3$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1(s) &= V_3 \\
\bar{V}_2(s) &= \frac{-\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4}{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}} \\
\bar{V}_3(s) &= V_1 \\
\bar{V}_4(s) &= \frac{\kappa_3 V_2 + \kappa_2 V_4}{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_1 &= \frac{\sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}{|\phi|} \\ \bar{\kappa}_2 &= \frac{\kappa_1 \kappa_2}{|\phi| \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}} \\ \bar{\kappa}_3 &= \frac{\kappa_1 \kappa_3}{|\phi| \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}}\end{aligned}\tag{3.45}$$

dir. Burada $\phi(s) = \lambda_2(s) \kappa_2(s)$ dir [9].

Sonuç 3.3.5 $\bar{x}$ Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ ve $\bar{\kappa}_3$ ile verilen $\mathbb{E}^4$ deki generic bir x eğrisinin 2. mertebeden involütü olsun. x bir W eğrisi ise $\bar{x}$ bir ccr eğrisi olur [9].

3.3.3. $\mathbb{E}^4$ deki 3. mertebeden involütler

$\mathbb{E}^4$ deki bir regüler x eğrisinin 3. mertebeden involütü

$$\bar{x}(s) = x(s) + \lambda_1(s) V_1(s) + \lambda_2(s) V_2(s) + \lambda_3(s) V_3(s)\tag{3.46}$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada

$$\begin{aligned}\lambda_1'(s) &= \kappa_1(s) \lambda_2(s) - 1 \\ \lambda_2'(s) &= \lambda_3(s) \kappa_2 - \lambda_1 \kappa_1 \\ \lambda_3'(s) &= -\lambda_2(s) \kappa_2(s)\end{aligned}\tag{3.47}$$

dir.[9].

(3.47) deki diferansiyel denklem sistemi kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir

Sonuç 3.3.6 $x = x(s)$ $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı W eğrisi x eğrisinin 3. mertebeden $\bar{x}$ involütü, aşağıdaki katsayı fonksiyonları ile verilen (3.46) parametrizasyonuna sahiptir.

$$\begin{aligned}\lambda_1(s) &= \frac{\kappa_1(c_2 \sin \kappa(s)) - c_3 \cos(\kappa(s))}{\sqrt{\kappa}} + \frac{c_1 \kappa - \kappa^2(s)}{\kappa} \\ \lambda_2(s) &= c_2 \cos(\kappa(s)) - c_3 \sin(\kappa(s)) + \frac{\kappa_1}{\kappa} \\ \lambda_3(s) &= \frac{\kappa_2(c_2 \sin \kappa(s) - c_3 \cos \kappa(s))}{\sqrt{\kappa}} - \frac{c_1 \kappa_1 \kappa - \kappa_1 \kappa_2^2(s)}{\kappa \kappa_2}\end{aligned}\tag{3.48}$$

Burada $\kappa = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$, c_1, c_2 ve c_3 reel sabitlerdir [9].

Önerme 3.3.3 $x = x(s)$, sıfırdan farklı Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3$ ile verilen $\mathbb{E}^4$ de bir regüler eğri olsun. x eğrisinin 3. mertebeden $\bar{x}$ involütünün Frenet 4 çatısı $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ ve $\bar{V}_4$ Frenet eğrilikleri $\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2$ ve $\bar{\kappa}_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(s) &= V_4 \\ \bar{V}_2(s) &= -V_3 \\ \bar{V}_3(s) &= -V_2 \\ \bar{V}_4(s) &= V_1\end{aligned}\tag{3.49}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_1 &= \frac{\kappa_3}{|\Psi|} \\ \bar{\kappa}_2 &= \frac{-\kappa_2}{|\Psi|} \\ \bar{\kappa}_3 &= \frac{\kappa_1}{|\Psi|}\end{aligned}\tag{3.50}$$

ile verilir. Burada $\Psi(s) = \lambda_3(s) \kappa_3(s)$ dir [9].

İspat: $\bar{x} = \bar{x}(s) \mathbb{E}^4$ de x eğrisinin 3. mertebeden involütü olsun. (3.7) ile (3.8) kullanılarak

$$\bar{x}'(s) = \Psi V_4\tag{3.51}$$

elde edilir. Burada $\Psi = \lambda_3(s) \kappa_3(s)$ bir türevlenebilir fonksiyondur. Dahası (3.51) in türevlerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}\bar{x}''(s) &= \Psi'(s) V_4(s) - \Psi(s) \kappa_3(s) V_3(s) \\ \bar{x}'''(s) &= \kappa_2(s) \kappa_3(s) \Psi(s) V_2(s) - \left\{ 2\kappa_3(s) \Psi'(s) + \kappa_3'(s) \Psi(s) \right\} V_3(s) \\ &\quad + \left\{ \Psi''(s) - \kappa_3^2(s) \Psi(s) \right\} V_4(s)\end{aligned}$$

bulunur. Eğer

$$\begin{aligned}E &= \kappa_2(s) \kappa_3(s) \Psi(s) \\ F &= 2\kappa_3(s) \Psi'(s) + \kappa_3'(s) \Psi(s) \\ G &= \Psi''(s) - \kappa_3^2(s) \Psi(s)\end{aligned}\tag{3.52}$$

ise

$$\bar{x}'''(s) = EV_2 - FV_3 + GV_4 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}''''(s) &= -\kappa_1(s)EV_1(s) + \left\{ \kappa_2(s)F + E' \right\} V_2(s) \\ &\quad + \left\{ \kappa_2(s)E - \kappa_3(s)G - F' \right\} V_3(s) + \left\{ G' - \kappa_3(s)F \right\} V_4(s) \end{aligned} \quad (3.54)$$

elde edilir. $\bar{V}_1(s)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(s) &= \frac{\bar{x}'(s)}{\|\bar{x}'(s)\|} \\ &= \frac{\Psi(s)V_4(s)}{\sqrt{\Psi^2(s)}} = V_4(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & -\Psi(s)\kappa_3(s) & \Psi' \\ 0 & E & -F & G \end{vmatrix} \\ &= \Psi^2(s)E\kappa_3(s)V_1(s) \end{aligned}$$

bulunur. $\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)$ in normu alınırsa

$$\|\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)\| = \sqrt[2]{\Psi^4(s)E^2(s)\kappa_3^2(s)}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{V}_4(s) &= \frac{\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)}{\|\bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) \wedge \bar{x}'''(s)\|} \\ &= \frac{\Psi^2(s)E\kappa_3(s)V_1(s)}{\sqrt{\Psi^4(s)E^2(s)\kappa_3^2(s)}} = V_1(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \bar{V}_4(s) \wedge \bar{x}'(s) \wedge \bar{x}''(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & -\Psi(s)\kappa_3(s) & \Psi \end{vmatrix} \\ &= \{-\Psi^2(s)\kappa_3(s)\}V_2(s) \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s)$ in normu alınırsa

$$\left\| \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s) \right\| = \sqrt{\Psi^4(s) \kappa_3^2(s)}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \overline{V}_3(s) &= \frac{\overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s)}{\left\| \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \wedge \overline{x}''(s) \right\|} \\ &= \frac{-\{\Psi^2(s) \kappa_3(s)\} V_2(s)}{\sqrt{\Psi^4(s) \kappa_3^2(s)}} = -V_2(s) \end{aligned}$$

dir. Son olarak

$$\begin{aligned} \overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi(s) \end{vmatrix} \\ &= \{-\Psi(s)\} V_3(s) \end{aligned}$$

olur. $\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s)$ in normu alınırsa

$$\left\| \overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \right\| = \sqrt{\Psi^2(s)}$$

olur. Böylece

$$\overline{V}_2(s) = \frac{\overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s)}{\left\| \overline{V}_3(s) \wedge \overline{V}_4(s) \wedge \overline{x}'(s) \right\|} = -V_3(s)$$

elde edilir. $\overline{\kappa}_1(s), \overline{\kappa}_2(s), \overline{\kappa}_3(s)$ eğrilikleri

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}_1(s) &= \frac{\langle \overline{V}_2(s), \overline{x}''(s) \rangle}{\left\| \overline{x}'(s) \right\|^2} \\ &= \frac{\langle -V_3(s), \Psi(s) V_4(s) - \Psi(s) \kappa_3(s) V_3(s) \rangle}{\left(\sqrt{\Psi^2(s)} \right)^2} = \frac{\kappa_3(s)}{|\Psi(s)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}_2(s) &= \frac{\langle \overline{V}_3(s), \overline{x}'''(s) \rangle}{\left\| \overline{x}'(s) \right\|^3 \overline{\kappa}_1(s)} \\ &= \frac{\langle -\overline{V}_2(s), EV_2 - FV_3 + GV_4 \rangle}{\Psi(s)^3 \frac{\kappa_3(s)}{|\Psi(s)|}} = \frac{-\kappa_2(s)}{|\Psi(s)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_3(s) &= \frac{\langle \bar{V}_4(s), \bar{x}'''(s) \rangle}{\|\bar{x}'(s)\|^4 \bar{\kappa}_1(s) \bar{\kappa}_2(s)} \\
&\quad \langle V_1(s), \\
&\quad -\kappa_1(s) EV_1(s) + \{\kappa_2(s) F + E'\} V_2(s) + \\
&= \frac{\{\kappa_2(s) E - \kappa_3(s) G - F'\} V_3(s) + \{G' - \kappa_3(s) F\} V_4(s) \rangle}{|\Psi(s)|^4 \frac{\kappa_3(s)}{|\Psi(s)|} \cdot \frac{-\kappa_2(s)}{|\Psi(s)|}} \\
&= \frac{\kappa_1(s)}{|\Psi(s)|}
\end{aligned}$$

olur [9].

Sonuç 3.3.7 $\mathbb{E}^4$ deki x ccr eğrisinin 3. mertebeden $\bar{x}$ involütü ayrıca $\mathbb{E}^4$ ün bir ccr eğrisidir [9].

4. $\mathbb{Q}_3$ 3-BOYUTLU KUATERNİYONİK UZAYDA İNVOLÜTLER

3- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{Q}$ ile gösterilen spatial kuaterniyonların uzayı ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} x & : I \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Q} \\ s & \rightarrow x(s) \rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i(s) e_i \quad (1 \leq i \leq 3) \end{aligned}$$

$I = [0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlanan her mertebeden türevlenebilen bir eğri olsun. s , parametresi birim büyüklüğü $T = x'(s)$ olacak şekilde seçilsin. $\mathbb{Q}$ daki $x = x(s)$ kuaterniyon eğrisinin Serret- Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $\{K(s), k(s)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{\|x'(s) \times x''(s)\|}{\|x'(s)\|^3} \\ k(s) &= \frac{\langle x'(s) \times x''(s), x'(s) \rangle}{\|x'(s) \times x''(s)\|^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ile verilir. Bu bölümde 3- boyutlu Kuaterniyonik uzay $\mathbb{Q}_3$ de verilen bir eğrinin 1. ve 2. mertebeden involütleri hesaplanacaktır.

4.1. $\mathbb{Q}_3$ de 1. mertebeden İnvölütler

Teorem.4.1.1 $x, \mathbb{Q}_3$ de bir regüler birim hızlı reel kuaterniyonik eğri ve herhangi bir reel kuaterniyonik diğer eğri $\bar{x}$ ise x eğrisinin kuaterniyonik involütü olsun. x eğrisinin 1. mertebeden $\bar{x}$ kuaterniyonik involütünün $K_{\bar{x}}(s^*)$ ve $k_{\bar{x}}(s^*)$ Frenet eğrilikleri

$$K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{\sqrt{r^2(s) + k^2(s)}}{|c - s| k(s)}, k_{\bar{x}}(s^*) = \frac{\left(\frac{r(s)}{k(s)}\right)' k(s)}{|c - s| r^2(s) + k^2(s)}$$

ile verilir.

İspat:

$$s \rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) e_i \quad (1 \leq i \leq 3)$$

ifadesinin kullanılmasıyla

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + |c - s| V_{1X}(s)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= |c-s| k(s) V_{2_X}(s) \\
\frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} &= -k(s) V_{2_X}(s) + |c-s| k'(s) V_{2_X}(s) \\
&\quad + |c-s| k(s) [-k(s) V_{1_X}(s) + r(s) V_{3_X}(s)] \\
&= -|c-s| k^2(s) V_{1_X}(s) + \left(|c-s| k'(s) - k(s) \right) V_{2_X}(s) \\
&\quad + |c-s| k(s) r(s) V_{3_X}(s) \\
\frac{d^3\bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} &= \left[\begin{array}{c} k^2(s) - |c-s| 2k(s) k'(s) - \\ |c-s| k'(s) k(s) + k^2(s) \end{array} \right] V_{1_X}(s) \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} -|c-s| k^3(s) - k'(s) + |c-s| k''(s) - k'(s) - \\ |c-s| k(s) r^2(s) \end{array} \right] V_{2_X}(s) \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} |c-s| k'(s) r(s) - k(s) r(s) - k(s) r(s) + \\ |c-s| k'(s) r(s) + |c-s| k(s) r'(s) \end{array} \right] V_{3_X}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\| = |(c-s) k(s)|$$

olur.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} &= \left| \begin{array}{ccc} V_{1_X}(s) & V_{2_X}(s) & V_{3_X}(s) \\ 0 & |c-s| k(s) & 0 \\ -|c-s| k^2(s) & -|c-s| k'(s) k(s) & |c-s| k(s) r(s) \end{array} \right| \\
&= |c-s|^2 k^2(s) [r(s) V_{1_X}(s) + k(s) V_{3_X}(s)]
\end{aligned}$$

ifadesinin normu alınırsa

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} \right\| = |c-s|^2 k^2(s) \sqrt{r^2(s) + k^2(s)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds}, \frac{d^3\bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} \right\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} |c-s|^2 k^2(s) \begin{bmatrix} r(s) V_{1x}(s) \\ +k(s) V_{3x}(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k^2(s) \\ -|c-s| 2k(s) k'(s) \\ -|c-s| k'(s) k(s) \\ +k^2(s) \end{bmatrix} V_{1x}(s) \\ \begin{bmatrix} -|c-s| k^3(s) - k'(s) \\ +|c-s| k''(s) - k'(s) \\ -|c-s| k(s) r^2(s) \end{bmatrix} V_{2x}(s) \\ \begin{bmatrix} |c-s| k'(s) r(s) \\ -k(s) r(s) - k(s) r(s) \\ +|c-s| k'(s) r(s) \\ +|c-s| k(s) r'(s) \end{bmatrix} V_{3x}(s) \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= |c-s|^2 k^2(s) \begin{bmatrix} 2k^2(s) r(s) \\ -|c-s| 2k(s) k'(s) r(s) \\ -|c-s| k'(s) k(s) r(s) \\ +|c-s| k'(s) r(s) k(s) \\ -2k^2(s) r(s) \\ +|c-s| k'(s) r(s) k(s) \\ +|c-s| k^2(s) r'(s) \end{bmatrix} \\
\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds}, \frac{d^3\bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} \right\| &= |c-s|^3 k^3(s) \left(k(s) r'(s) - r(s) k'(s) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunanlar (4.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
K_{\bar{x}}(s^*) &= \frac{|c-s|^2 k^2(s) \sqrt[2]{r^2(s) + k^2(s)}}{|c-s|^3 k^3(s)} \\
&= \frac{\sqrt{r^2(s) + k^2(s)}}{|c-s| k(s)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
k_{\bar{x}}(s^*) &= \frac{|c-s|^3 k^3(s) (k(s) r'(s) - r(s) k'(s))}{|c-s|^4 k^4(s) (r^2(s) + k^2(s))} \\
&= \frac{\left(\frac{r(s)}{k(s)} \right)' k(s)}{|c-s| (r^2(s) + k^2(s))}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. $\mathbb{Q}_3$ de 2. mertebeden İnvölütler

Teorem.4.2.1 $x, \mathbb{Q}_3$ de bir regüler birim hızlı reel kuaterniyonik eğri ve herhangi bir reel kuaterniyonik eğri $\bar{x}$ ise x eğrisinin kuaterniyonik involütü olsun. x eğrisinin 2. mertebeden $\bar{x}$ kuaterniyonik involütünün $K_{\bar{x}}(s^*)$ ve $k_{\bar{x}}(s^*)$ Frenet eğrilikleri

$$K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{\text{sgn}(r(s))}{|\lambda_2(s)|}, k_{\bar{x}}(s^*) = \frac{k(s)}{\lambda_2(s) r(s)}$$

ile verilir.

İspat:

$$s \rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) e_i \quad (1 \leq i \leq 3)$$

ifadesinin kullanılmasıyla

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + \lambda_1(s) V_{1x}(s) + \lambda_2(s) V_{2x}(s)$$

yazılabilir. Bu ifade türevlenirse

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= V_{1x}(s) + \lambda_1'(s) V_{1x}(s) + \lambda_1(s) k(s) V_{2x}(s) \\ &\quad + \lambda_2'(s) V_{2x}(s) + \lambda_2(s) [-k(s) V_{1x}(s) + r(s) V_{3x}(s)] \\ &= [1 + \lambda_1'(s) - \lambda_2(s) k(s)] V_{1x}(s) \\ &\quad + [\lambda_1(s) k(s) + \lambda_2'(s)] V_{2x}(s) + \lambda_2(s) r(s) V_{3x}(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\langle \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds}, V_{1x}(s) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds}, V_{2x}(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan

$$\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \lambda_2(s) r(s) V_{3x}(s)$$

olur. Bu ifadenin türevleri alınır

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} &= \lambda_2'(s) r(s) V_{3x}(s) + \lambda_2(s) r'(s) V_{3x}(s) \\ &\quad + \lambda_2(s) r(s) [-r(s) V_{2x}(s)] \\ &= -r^2(s) \lambda_2(s) V_{2x}(s) \\ &\quad + [\lambda_2'(s) r(s) + \lambda_2(s) r'(s)] V_{3x}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 \bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} &= r^2(s) k(s) \lambda_2(s) V_{1_x}(s) \\
&+ \begin{bmatrix} -2r(s) r'(s) \lambda_2(s) - 2r^2(s) \lambda_2'(s) \\ -\lambda_2(s) r'(s) r(s) \end{bmatrix} V_{2_x}(s) \\
&+ \begin{bmatrix} -r^3(s) \lambda_2(s) + \lambda_2''(s) r(s) \\ +2\lambda_2'(s) r'(s) + \lambda_2(s) r''(s) \end{bmatrix} V_{3_x}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\| = |\lambda_2(s) r(s)|$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2 \bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} &= \begin{vmatrix} V_{1_x}(s) & V_{2_x}(s) & V_{3_x}(s) \\ 0 & 0 & \lambda_2(s) r(s) \\ 0 & -\lambda_2(s) r^2(s) & \lambda_2'(s) r(s) \\ & & +\lambda_2(s) r'(s) \end{vmatrix} \\
&= \lambda_2^2(s) r^3(s) V_{1_x}(s)
\end{aligned}$$

ifadesinin normu alınır

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2 \bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} \right\| = \lambda_2^2(s) r^3(s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \times \frac{d^2 \bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds}, \frac{d^3 \bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} \lambda_2^2(s) r^3(s) V_{1_x}(s), \\ [\lambda_2(s) r^2(s) k(s)] V_{1_x}(s) \\ -2r(s) r'(s) \lambda_2(s) \\ -2r^2(s) \lambda_2'(s) - \lambda_2(s) r'(s) r(s) \\ -r^3(s) \lambda_2(s) + \lambda_2''(s) r(s) \\ +2\lambda_2'(s) r'(s) + \lambda_2(s) r''(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2_x}(s) \\ V_{3_x}(s) \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \lambda_2^3(s) r^5(s) k(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen ifadeler (4.1) de yerine yazılırsa

$$K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{\lambda_2^2(s) r^3(s)}{|\lambda_2^3(s) r^3(s)|} = \frac{\text{sgn}(r(s))}{|\lambda_2(s)|}$$

ve

$$k_x(s^*) = \frac{\lambda_2^3(s) r^5(s) k(s)}{\lambda_2^4(s) r^6(s)} = \frac{k(s)}{\lambda_2(s) r(s)}$$

bulunur.



5. $\mathbb{Q}_4$ 4-BOYUTLU KUATERNİYONİK UZAYDA İNVOLÜTLER

4 boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$, $\mathbb{Q}$ ile gösterilen birim kuaterniyonların uzayı ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} x & : I \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Q} \\ s & \rightarrow x(s) \rightarrow \sum_{i=1}^4 x_i(s) e_i \quad (1 \leq i \leq 4), e_4 = 1 \end{aligned}$$

$I = [0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlanan her mertebeden türevlenebilen bir eğri olsun. s , parametresi birim büyüklüğü $T = x'(s)$ olacak şekilde seçilsin. $\mathbb{Q}$ daki $x = x(s)$ kuaterniyon eğrisinin Serret- Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ olsun. O zaman Serret-Frenet eşitlikleri

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= K(s) V_2(s) \\ V_2'(s) &= -K(s) V_1(s) + k(s) V_3(s) \\ V_3'(s) &= -k(s) V_2(s) + (r(s) - K(s)) V_4(s) \\ V_4'(s) &= -(r(s) - K(s)) V_3(s) \end{aligned} \tag{5.1}$$

dir. Burada $K(s) = \|V_1'(s)\|$ dir [13].

$\mathbb{E}^3$ deki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi için Serret-Frenet denklemleri kullanılarak $x = x(s)$ eğrisi için Serret-Frenet denklemleri bulunur. Burada α , x kuaterniyonik eğrisinin spatial kuaterniyonik eğrisidir. Ayrıca α ve x eğrilerinin eğrilikleri arasında ilişki vardır [13]. Bu ilişkilerle α eğrisinin 1. eğriliği olan k , x in torsiyonu olarak açıklanabilir. Aynı zamanda x in bitorsiyonu $(r - K)$ dır. Burada r , α nın 3. eğriliği ve K , x in 1. eğriliğidir.

Dahası x kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}
V_1(s) &= \frac{x'(s)}{\|x'(s)\|}, \\
V_2(s) &= \frac{\|x'(s)\|^2 x''(s) - h(x'(s), x''(s)) x'(s)}{\left\| \|x'(s)\|^2 x''(s) - h(x'(s), x''(s)) x'(s) \right\|}, \\
V_3(s) &= \eta V_4(s) \wedge V_1(s) \wedge V_2(s), \\
V_4(s) &= \eta \frac{V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge x'''(s)}{\|V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge x'''(s)\|}, (\eta = \pm 1), \\
K(s) &= \frac{\left\| \|x'(s)\|^2 x''(s) - h(x'(s), x''(s)) x'(s) \right\|}{\|x'(s)\|^4}, \\
k(s) &= \frac{\|V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge x'''(s)\| \|x'(s)\|}{\left\| \|x'(s)\|^2 x''(s) - h(x'(s), x''(s)) x'(s) \right\|}, \\
(r - K)(s) &= \frac{h(x''''(s), V_4(s))}{\|V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge x'''(s)\| \|x'(s)\|}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklinde verilir [15].

Teorem.5.1 $x, \mathbb{Q}_4$ de bir regüler birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun. Herhangi reel kuaterniyonik eğri $\bar{x}$ de x eğrisinin kuaterniyonik involüt eğrisiyse, o zaman $d(x(s), \bar{x}(s^*)) = |c - s|$ dir. Burada c reel sayıdır [15].

İspat: $\bar{x}, x : I \rightarrow \mathbb{Q}$ eğrisinin birim hızlı reel kuaterniyonik involüt eğrisi olsun.

Tanım 2.3.10 dan

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + \lambda(s) V_{1_x}(s) \tag{5.3}$$

yazılabilir. $\bar{x}(s^*)$ ifadesinin türevi alınır

$$\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \lambda'(s)\right) V_{1_x}(s) + \lambda(s) K_x(s) V_{2_x}(s)$$

elde edilir. Bu denklem $V_{1_x}(s)$ teğet vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$0 = h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds}, V_{1_x}(s)\right) = \left(1 + \lambda'(s)\right)$$

olur. Yani

$$\lambda(s) = c - s \tag{5.4}$$

olur. (5.3) ve (5.4) eşitlikleri kullanılarak

$$d(x(s), \bar{x}(s^*)) = |\lambda| = |c - s|$$

yazılabilir. (5.3) ve (5.4) eşitliklerinden

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + (c - s) V_{1_x}(s)$$

ulaşılabilir [15].

5.1. $\mathbb{Q}_4$ de 1. mertebeden İnvölütler

Teorem.5.1.1 $x, \mathbb{Q}_4$ de regüler birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun ve herhangi bir reel kuaterniyonik eğri $\bar{x}, \mathbb{Q}_4$ de x in invölütü olsun. $\bar{x}$ kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet denklemleri x in denklemleri tarafından oluşturulabilir [15].

İspat: $x = x(s)$ bir birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun. Varsayalım ki $\bar{x} = \bar{x}(s), x$ in invölütü olsun.

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + (c - s) V_{1_x}(s)$$

olduğu gösterilmişti. Bu ifadenin türevleri alınır

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= V_{1_x}(s) - V_{1_x}(s) + (c - s) K_x(s) V_{2_x}(s) \\ &= (c - s) K_x(s) V_{2_x}(s) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} &= -(c - s) K_x^2(s) V_{1_x}(s) \\ &+ \left[(c - s) K'_x(s) - K_x(s) \right] V_{2_x}(s) + (c - s) K_x(s) k(s) V_{3_x}(s) \end{aligned} \quad (5.6)$$

tekrar türev alınır

$$\begin{aligned} \frac{d^3\bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} &= \left[2K_x^2(s) - 3(c - s) K_x(s) K'_x(s) \right] V_{1_x}(s) \\ &+ \left[\begin{array}{c} (c - s) K''_x(s) - 2K'_x(s) \\ -(c - s) K_x(s) [K_x^2(s) + k^2(s)] \end{array} \right] V_{2_x}(s) \\ &+ \left[\begin{array}{c} 2(c - s) K'_x(s) k(s) + (c - s) K_x(s) k'(s) \\ -2K_x(s) k(s) \end{array} \right] V_{3_x}(s) \\ &+ [(c - s) K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s))] V_{4_x}(s) \end{aligned} \quad (5.7)$$

türev alma işlemine devam edilirse

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \bar{x}}{ds^{*4}} \frac{ds^{*4}}{ds} = & \left[\begin{array}{l} 9K_x(s) K'_x(s) - 4(c-s) K_x(s) K''_x(s) \\ -3(c-s) (K'_x(s))^2 \\ + (c-s) K_x^2(s) [K_x^2(s) + k^2(s)] \end{array} \right] V_{1_x}(s) \\
+ & \left[\begin{array}{l} -3K''_x(s) + (c-s) K'''_x(s) \\ +3K_x^3(s) - 6(c-s) K_x^2(s) K'_x(s) \\ +3K_x(s) k^2(s) - 3(c-s) K'_x(s) k^2(s) \\ -3(c-s) K_x(s) k'(s) k(s) \end{array} \right] V_{2_x}(s) \\
+ & \left[\begin{array}{l} -6K'_x(s) k(s) + 3(c-s) K''_x(s) k(s) \\ +3(c-s) K'_x(s) k'(s) - 3K_x(s) k'(s) \\ + (c-s) K_x(s) k''(s) \\ - (c-s) K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ - (c-s) K_x(s) [K_x^2(s) + k^2(s)] k(s) \end{array} \right] V_{3_x}(s) \\
+ & \left[\begin{array}{l} 3(c-s) K'_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ -3K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +2(c-s) K_x(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ + (c-s) K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \end{array} \right] V_{4_x}(s)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

ifadeleri elde edilir. (5.5) eşitliğinin kuaterniyonik normu alınır

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\|^2 = (c-s)^2 K_x^2(s)$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\| = K_x(s) |(c-s)| \tag{5.9}$$

yazılabilir. (5.2), (5.5), (5.9) eşitlikleri kullanılarak

$$V_{1_{\bar{x}}}(s^*) = \frac{\frac{ds^*}{ds} (c-s) K_x(s)}{\left| \frac{ds^*}{ds} \right| (K_x(s) |(c-s)|)} V_{2_x}(s)$$

olur. Dolayısıyla

$$V_{1_{\bar{x}}}(s^*) = \pm V_{2_x}(s) \tag{5.10}$$

yazılabilir. $h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*}, \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}}\right)$ ifadesi (5.5) ve (5.6) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*}, \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}}\right) &= \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\begin{array}{c} -(c-s)^2 \\ K_x^3(s) \frac{1}{2} \\ [V_{2_x}(s) \times V_{1_x}(s) + V_{1_x}(s) \times V_{2_x}(s)] \end{array} \right] \\
&\quad + (c-s) K_x(s) \left[\begin{array}{c} (c-s) K'_x(s) \\ -K_x(s) \end{array} \right] \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} V_{2_x}(s) \times V_{2_x}(s) \\ +V_{2_x}(s) \times V_{2_x}(s) \end{array} \right] \\
&\quad + (c-s)^2 K_x^2(s) k(s) \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} V_{2_x}(s) \times V_{3_x}(s) \\ +V_{3_x}(s) \times V_{2_x}(s) \end{array} \right] \\
&= \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\begin{array}{c} (c-s)^2 K_x(s) K'_x(s) \\ -(c-s) K_x^2(s) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $V_{2_{\bar{x}}}(s^*)$ (5.2), (5.5), (5.6), (5.9) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$V_{2_{\bar{x}}}(s^*) = \frac{\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)}{\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\|}$$

formülü kullanılarak $\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)$ ifadesi bulunursa

$$\begin{aligned}
&\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \\
&= K_x^2(s) (c-s)^2 \left(\begin{array}{c} -(c-s) K_x^2(s) V_{1_x}(s) \\ + \left[\begin{array}{c} (c-s) K'_x(s) \\ -K_x(s) \end{array} \right] V_{2_x}(s) \\ + (c-s) K_x(s) k(s) V_{3_x}(s) \end{array} \right) \\
&\quad - \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\begin{array}{c} (c-s)^2 K_x(s) K'_x(s) \\ -(c-s) K_x^2(s) \end{array} \right] (c-s) K_x(s) V_{2_x}(s) \\
&= K_x^2(s) (c-s)^2 \left[\begin{array}{c} -(c-s) K_x^2(s) V_{1_x}(s) \\ + (c-s) K_x(s) k(s) V_{3_x}(s) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

olur. $\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)$ ifadesinin normu alınır

$$\begin{aligned}
&\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\| \\
&= K_x^2(s) (c-s)^2 \left((c-s)^2 K_x^4(s) + (c-s)^2 K_x^2(s) k^2(s) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. $V_{2\bar{x}}(s^*)$

$$\begin{aligned} V_{2\bar{x}}(s^*) &= \frac{(-(c-s)K_x^2(s)V_{1_x}(s) + (c-s)K_x(s)k(s)V_{3_x}(s))}{(c-s)K_x(s)\sqrt{K_x^2(s)+k^2(s)}} \\ &= \frac{-K_x(s)V_{1_x}(s) + k(s)V_{3_x}(s)}{\sqrt{K_x^2(s)+k^2(s)}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

olur. $V_{4\bar{x}}(s^*)$

$$V_{4\bar{x}}(s^*) = \eta \frac{V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)}{\|V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\|}$$

formülü kullanılarak hesaplanabilir. $V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)$ ifadesi (5.7), (5.10), (5.11) eşitlikleri kullanılarak bulunursa

$$\begin{aligned} & V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_x^2(s)+k^2(s)}} \begin{vmatrix} V_{1_x}(s) & V_{2_x}(s) & V_{3_x}(s) & V_{4_x}(s) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_x(s) & 0 & k(s) & 0 \\ 2K_x^2(s) & (c-s)K_x''(s) & K_x'(s)k(s) & (c-s) \\ -3(c-s) & -2K_x'(s) & +(c-s) & K_x(s)k(s) \\ K_x(s)K_x'(s) & -(c-s)K_x(s) & K_x(s)k'(s) & (r(s)-K_x(s)) \\ & (K_x^2(s)+k^2(s)) & -2(c-s) & K_x(s)k(s) \end{vmatrix} \\ &= \frac{(c-s)K_x(s)}{\sqrt{K_x^2(s)+k^2(s)}} \begin{pmatrix} (k^2(s)(r(s)-K_x(s))V_{1_x}(s) + K_x(s)k(s) \\ (r(s)-K_x(s))V_{2_x}(s) + (K_x'(s)k(s) - K_x(s)k'(s))V_{4_x}(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

bulunur. $V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)$ ifadesinin normu alınrsa

$$\begin{aligned} & \left\| V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) \right\| \\ &= \frac{|(c-s)K_x(s)|}{\sqrt{K_x^2(s)+k^2(s)}} \left(k^4(s)(r(s)-K_x(s))^2 + K_x^2(s)k^2(s) \right. \\ & \quad \left. (r(s)-K_x(s))^2 + (K_x'(s)k(s) - K_x(s)k'(s))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

olur. $V_{4\bar{x}}(s^*)$

$$V_{4\bar{x}}(s^*) = \eta \frac{(k^2(s)(r(s) - K_x(s))V_{1_x}(s) + K_x(s)k(s)(r(s) - K_x(s))V_{3_x}(s) + (K'_x(s)k(s) - K_x(s)k'(s))V_{4_x}(s))}{(k^4(s)(r(s) - K_x(s))^2 K_x^2(s)k^2(s)(r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s)k(s) - K_x(s)k'(s))^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.14)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta = \pm 1$, $\det(V_{1_x}(s), V_{2_x}(s), V_{3_x}(s), V_{4_x}(s)) = \pm 1$ i sağlar. $V_{3\bar{x}}(s^*)$ (5.2), (5.10), (5.11), (5.14) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} V_{3\bar{x}}(s^*) &= \eta (V_{4\bar{x}}(s^*) \wedge V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*)) \\ &= \eta \frac{1}{\left(\begin{array}{c} K_x^2(s) + k^2(s)(k^4(s)(r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s)k^2(s)) \\ (r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s)k(s) - K_x(s)k'(s))^2 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \left| \begin{array}{cccc} V_{1_x}(s) & V_{2_x}(s) & V_{3_x}(s) & V_{4_x}(s) \\ k^2(s) & 0 & K_x(s)k(s) & K'_x(s)k(s) \\ (r(s) - K_x(s)) & 0 & (r(s) - K_x(s)) & -K_x(s)k'(s) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_x(s) & 0 & k(s) & 0 \end{array} \right| \\ &= \eta \frac{\left(\begin{array}{c} ((K'_x(s)k(s) - K_x(s)k'(s))[k(s)V_{1_x}(s) + K_x(s)V_{3_x}(s)]) \\ -k(s)(r(s) - K_x(s))(K_x^2(s) + k^2(s))V_{4_x}(s) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} K_x^2(s) + k^2(s)(k^4(s)(r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s)k^2(s)) \\ (r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s)k(s) - K_x(s)k'(s))^2 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

bulunur. $K_{\bar{x}}(s^*)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} K_{\bar{x}}(s^*) &= \frac{\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)}{\|\bar{x}'(s^*)\|^4} \\ &= \frac{K_x^2(s)(c-s)^2 \sqrt{K_x^4(s)(c-s)^2 + (c-s)^2 K_x^2(s)k^2(s)}}{K_x^4(s)|c-s|^4} \\ &= \frac{\sqrt[2]{K_x^2(s) + k^2(s)}}{K_x(s)|c-s|} \end{aligned}$$

elde edilir. $k^*(s^*)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
k^*(s^*) &= \frac{\|V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\| \|\bar{x}'(s^*)\|}{\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\|} \\
&= \frac{K_x(s) |(c-s)|}{\sqrt{K_x^2(s) + k^2(s)}} \frac{\left(\begin{array}{c} k^4(s) (r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s) \\ k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ + (K'_x(s) k(s) - K_x(s) k'(s))^2 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}} K_x(s) |(c-s)|}{K_x^3(s) (c-s)^3 \sqrt{K_x^2(s) + k^2(s)}} \\
&= \frac{(k^4(s) (r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s) k(s) - K_x(s) k'(s))^2)^{\frac{1}{2}}}{K_x(s) |(c-s)| (K_x^2(s) + k^2(s))}
\end{aligned}$$

elde edilir. $r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*)$ bulunursa

$$r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{h(\bar{x}''''(s^*), V_{4\bar{x}}(s^*))}{\|V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\| \|\bar{x}'(s^*)\|}$$

formülü kullanılarak $h(\bar{x}''''(s^*), V_{4\bar{x}}(s^*))$ ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(k^4(s) (r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s) k(s) - K_x(s) k'(s))^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

ifadesi

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & 9K_x(s) K'_x(s) - 4(c-s) K_x(s) K''_x(s) \\ & -3(c-s) (K'_x(s))^2 \\ & + (c-s) K_x^2(s) [K_x^2(s) + k^2(s)] \end{aligned} \right] \\
& k^2(s) (r(s) - K_x(s)) \frac{1}{2} [V_{1_x}(s) \times V_{1_x}(s) + V_{1_x}(s) \times V_{1_x}(s)] \\
& + \left[\begin{aligned} & -6K'_x(s) k(s) + 3(c-s) K''_x(s) k(s) \\ & +3(c-s) K'_x(s) k'(s) - 3K_x(s) k'(s) \\ & + (c-s) K_x(s) k''(s) \\ & - (c-s) K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ & - (c-s) K_x(s) [K_x^2(s) + k^2(s)] k(s) \end{aligned} \right] \\
& K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \frac{1}{2} [V_{3_x}(s) \times V_{3_x}(s) + V_{3_x}(s) \times V_{3_x}(s)] \\
& + \left[\begin{aligned} & 3(c-s) K'_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & -3K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & +2(c-s) K_x(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & + (c-s) K_x(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \end{aligned} \right] \\
& \left(K'_x(s) k(s) - K_x(s) k'(s) \right) \frac{1}{2} [V_{4_x}(s) \times V_{4_x}(s) + V_{4_x}(s) \times V_{4_x}(s)]
\end{aligned}$$

çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned}
h\left(\overline{x}'''(s^*), V_{4_{\overline{x}}}(s^*)\right) &= \frac{\left(\begin{aligned} & - (c-s) K''_x(s) K_x(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & +2(c-s) K'_x(s) K_x(s) k(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & - (c-s) K_x^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^3 + (c-s) \\ & K'_x(s) K_x(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))' - 2(c-s) \\ & K_x^2(s) (k'(s))^2 (r(s) - K_x(s)) - (c-s) K_x^2(s) \\ & k'(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \end{aligned} \right)}{\left(k^4(s) (r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s) k^2(s) \right.} \\
& \left. (r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s) k(s) - K_x(s) k'(s))^2 \right)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& \left\| V_{1_{\overline{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\overline{x}}}(s^*) \wedge \overline{x}'''(s^*) \right\| \left\| \overline{x}'(s^*) \right\| \\
& = \frac{(c-s)^2 K_x^2(s)}{\sqrt{K_x^2(s) + k^2(s)}} \frac{(k^4(s) (r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s) k^2(s))}{(r(s) - K_x(s))^2 + (K'_x(s) k(s) - K_x(s) k'(s))^2}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{\begin{pmatrix} -(c-s) K_x''(s) K_x(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +2(c-s) K_x'(s) K_x(s) k(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ -(c-s) K_x^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^3 \\ + (c-s) K_x'(s) K_x(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))' \\ -2(c-s) K_x^2(s) (k'(s))^2 (r(s) - K_x(s)) \\ -(c-s) K_x^2(s) k'(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \end{pmatrix}}{\frac{(c-s)^2 K_x^2(s)}{\sqrt{K_x^2(s) + k^2(s)}} (k^4(s) (r(s) - K_x(s))^2 + K_x^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + (K_x'(s) k(s) - K_x(s) k'(s))^2)}$$

elde edilir [15].

5.2. $\mathbb{Q}_4$ de 2. mertebeden İnvölütler

Teorem.5.2.1 $x, \mathbb{Q}_4$ de regüler birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun ve herhangi bir reel kuaternik eğri $\bar{x}$ de x in 2. mertebeden invölütü olsun. $\bar{x}$ kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet denklemleri x in denklemleri tarafından oluşturulabilir.

İspat: $x = x(s)$ bir birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun. Varsayalım ki $\bar{x} = \bar{x}(s)$, x in 2. mertebeden invölütü olsun. Dolayısıyla

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + \lambda_1(s) V_{1_x}(s) + \lambda_2(s) V_{2_x}(s) \quad (5.15)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= x'(s) + \lambda_1(s) V_{1_x}(s) + \lambda_1(s) [K_x(s) V_{2_x}(s)] \\ &\quad + \lambda_2'(s) V_{2_x}(s) + \lambda_2(s) [-K_x(s) V_{1_x}(s) + k(s) V_{3_x}(s)] \\ &= [1 + \lambda_1'(s) - \lambda_2(s) K_x(s)] V_{1_x}(s) + [\lambda_1(s) K_x(s) + \lambda_2'(s)] V_{2_x}(s) \\ &\quad + \lambda_2(s) k(s) V_{3_x}(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\langle \bar{x}'(s^*), V_{1_x}(s) \rangle = 0, \quad \langle \bar{x}'(s^*), V_{2_x}(s) \rangle = 0$$

olduğundan

$$\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \lambda_2(s) k(s) V_{3_x}(s) \quad (5.16)$$

olur. Türev alma işlemine devam edilirse

$$\frac{d^2 \bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} = -\lambda_2(s) k^2(s) V_{2_x}(s) + \left(\lambda_2'(s) k(s) + \lambda_2(s) k'(s) \right) V_{3_x}(s) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & + (\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))) V_{4_x}(s) \\ \frac{d^3 \bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} & = [\lambda_2(s) k^2(s) K_x(s)] V_{1_x}(s) \quad (5.18) \\ & + \left[-2\lambda_2'(s) k^2(s) - 3\lambda_2(s) k'(s) k(s) \right] V_{2_x}(s) \\ & + \left[\begin{array}{l} -\lambda_2(s) k^3(s) + \lambda_2''(s) k(s) \\ +2\lambda_2'(s) k'(s) + \lambda_2(s) k''(s) \\ -(\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s)))^2 \end{array} \right] V_{3_x}(s) \\ & + \left[\begin{array}{l} 2\lambda_2'(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +2\lambda_2(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \end{array} \right] V_{4_x}(s) \end{aligned}$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \bar{x}}{ds^{*4}} \frac{ds^{*4}}{ds} = & \left[\begin{array}{c} 3\lambda_2'(s) k^2(s) K_x(s) \\ +5\lambda_2(s) k'(s) k(s) K_x(s) + \lambda_2(s) k^2(s) K_x'(s) \end{array} \right] V_{1_x}(s) \\
& + \left[\begin{array}{c} \lambda_2(s) k^2(s) K_x^2(s) - 3\lambda_2''(s) k^2(s) \\ -9\lambda_2'(s) k'(s) k(s) - 4\lambda_2(s) k''(s) k(s) \\ -3\lambda_2(s) (k'(s))^2 + \lambda_2(s) k^4(s) \\ +\lambda_2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 \end{array} \right] V_{2_x}(s) \\
& + \left[\begin{array}{c} -3\lambda_2'(s) k^3(s) - 6\lambda_2(s) k^2(s) k'(s) \\ +\lambda_2'''(s) k(s) \\ +3\lambda_2''(s) k'(s) + 3\lambda_2'(s) k''(s) \\ +\lambda_2(s) k'''(s) \\ - (r(s) - K_x(s))^2 [3\lambda_2'(s) k(s) + 3\lambda_2(s) k'(s)] \\ -3\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) (r(s) - K_x(s))' \end{array} \right] V_{3_x}(s) \\
& + \left[\begin{array}{c} -\lambda_2(s) k^3(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +3\lambda_2''(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +6\lambda_2'(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +3\lambda_2(s) k''(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +3\lambda_2'(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \\ +3\lambda_2(s) k'(s) (r(s) - K_x(s))' \\ +\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))'' \\ -\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^3 \end{array} \right] V_{4_x}(s)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.16) eşitliğinin kuaterniyonik normu alınırsa

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\|^2 = \lambda_2^2(s) k^2(s)$$

olduğundan

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\| = \lambda_2(s) k(s) \tag{5.20}$$

olur. (5.2), (5.16), (5.20) eşitlikleri kullanılarak

$$V_{1_{\bar{x}}}(s^*) = \frac{\frac{ds^*}{ds} \lambda_2(s) k(s) V_{3_x}(s)}{\left| \frac{ds^*}{ds} \right| \sqrt{\lambda_2^2(s) k^2(s)}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$V_{1_{\bar{x}}}(s^*) = V_{3_x}(s) \tag{5.21}$$

yazılabilir. $h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*}, \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}}\right)$ ifadesi (5.16) ve (5.17) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*}, \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}}\right) &= \frac{ds^3}{ds^{*3}} [-\lambda_2^2(s) k^3(s)] \cdot \\ &\quad \left[\frac{1}{2} [V_{3_X}(s) \times V_{2_X}(s) + V_{2_X}(s) \times V_{3_X}(s)] \right. \\ &\quad \left. + [\lambda_2(s) \lambda_2'(s) k^2(s) + \lambda_2^2(s) k'(s) k(s)] \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [V_{3_X}(s) \times V_{3_X}(s) + V_{3_X}(s) \times V_{3_X}(s)] \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s)) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [V_{3_X}(s) \times V_{4_X}(s) + V_{4_X}(s) \times V_{3_X}(s)] \right] \\ &= \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\lambda_2(s) k(s) \left(\lambda_2'(s) k(s) + \lambda_2(s) k'(s) \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $V_{2_{\bar{x}}}(s^*)$ (5.2), (5.16), (5.17), (5.20) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$V_{2_{\bar{x}}}(s^*) = \frac{\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)}{\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\|}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) &= \lambda_2^2(s) k^2(s) \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} -\lambda_2(s) k^2(s) V_{2_X}(s) \\ + \begin{pmatrix} \lambda_2(s) k(s) \\ (r(s) - K_x(s)) \end{pmatrix} \\ V_{4_X}(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. $\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)$ ifadesinin normu alınırsa

$$\begin{aligned} &\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\| \\ &= \lambda_2^3(s) k^3(s) \sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan

$$V_{2_{\bar{x}}}(s^*) = \frac{(-k(s) V_{2_X}(s) + (r(s) - K_x(s)) V_{4_X}(s))}{\sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2}} \quad (5.22)$$

olur. Ayrıca

$$V_{4_{\bar{x}}}(s^*) = \eta \frac{V_{1_{\bar{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\bar{x}}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)}{\|V_{1_{\bar{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\bar{x}}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\|}$$

formülü kullanılarak hesaplanabilir. (5.8), (5.21), (5.22) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
 V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) &= \frac{1}{\sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2}} \\
 &= \frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2}} \\
 &\quad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4\lambda_2'(s)k(s)(r(s) - K_x(s)) \\ +5\lambda_2(s)k'(s)(r(s) - K_x(s)) \\ +\lambda_2(s)k(s)(r(s) - K_x(s))' \end{array} \right] V_{1x}(s) \\ \left[\begin{array}{l} -\lambda_2(s)k(s)K_x(s) \\ (r(s) - K_x(s)) \end{array} \right] V_{2x}(s) \\ [-\lambda_2(s)k^2(s)K_x(s)] V_{4x}(s) \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

şeklinde elde edilir. $V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)$ ifadesinin normu alınırsa

$$\begin{aligned}
 \left\| V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) \right\| &= \frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2}} \\
 &\quad \left(16\lambda_2'^2(s)k^2(s)(r(s) - K_x(s))^2 \right. \\
 &\quad + 25\lambda_2^2(s)k'^2(s)(r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s)k^2(s) \\
 &\quad \left. \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 + \lambda_2^2(s)k^2(s)K_x^2(s) \right. \\
 &\quad \left. (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s)k^4(s)K_x^2(s) \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

olur. Buradan

$$V_{4\overline{x}}(s^*) = \eta \frac{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 4\lambda_2'(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +5\lambda_2(s) k'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +\lambda_2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))' \end{bmatrix} V_{1_x}(s) \\ [-\lambda_2(s) k(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))] V_{2_x}(s) \\ [-\lambda_2(s) k^2(s) K_x(s)] V_{4_x}(s) \end{pmatrix}}{\begin{aligned} & \left(16\lambda_2'^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 \right. \\ & + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) \\ & \left. \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) \right. \\ & \left. (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^4(s) K_x^2(s) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}} \quad (5.25)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta = \pm 1$, $\det(V_{1_x}(s), V_{2_x}(s), V_{3_x}(s), V_{4_x}(s)) = \pm 1$ i sağlar.

$V_{3\overline{x}}(s^*)$ (5.2), (5.21), (5.22), (5.25) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} V_{3\overline{x}}(s^*) &= \eta (V_{4\overline{x}}(s^*) \wedge V_{1\overline{x}}(s^*) \wedge V_{2\overline{x}}(s^*)) \\ &= \eta \frac{1}{\left(\begin{aligned} & \left(16\lambda_2'^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) \right. \\ & (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 \\ & + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^4(s) K_x^2(s) \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}} } \\ & \quad \left(k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2 \right) \end{aligned}$$

$V_{1_x}(s)$	$V_{2_x}(s)$	$V_{3_x}(s)$	$V_{4_x}(s)$
$4\lambda_2'(s)$			
$k(s)$			
$(r(s) - K_x(s))$	$-\lambda_2(s)$		
$+5\lambda_2(s)$	$k(s)$		$-\lambda_2(s)$
$k'(s)$	$K_x(s)$	0	$k^2(s)$
$(r(s) - K_x(s))$	$(r(s) - K_x(s))$		$K_x(s)$
$+ \lambda_2(s) k(s)$			
$(r(s) - K_x(s))'$			
0	0	1	0
0	$-k(s)$	0	$\begin{pmatrix} r(s) \\ -K_x(s) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} -\lambda_2(s) k(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ + \lambda_2(s) k^3(s) K_x(s) \end{array} \right) V_{1_x}(s) \\ \left(\begin{array}{c} -4\lambda_2'(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ -5\lambda_2(s) k'(s) (r(s) - K_x(s))^2 \end{array} \right) V_{2_x}(s) \end{array} \right) \\
= \eta & \frac{\left(\begin{array}{c} \left(16\lambda_2'^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) \right. \\ \left. (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^4(s) K_x^2(s) \right) \\ \left. (k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2) \right)}{\frac{1}{2}} \quad (5.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. $K_{\bar{x}}(s^*)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
K_{\bar{x}}(s^*) &= \frac{\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)}{\|\bar{x}'(s^*)\|^4} \\
&= \frac{\lambda_2^3(s) k^3(s) \sqrt{(r(s) - K_x(s))^2 + k^2(s)}}{\lambda_2^4(s) k^4(s)} \\
&= \frac{\sqrt{(r(s) - K_x(s))^2 + k^2(s)}}{\lambda_2(s) k(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $k^*(s^*)$ bulunursa

$$\begin{aligned}
k^*(s^*) &= \frac{\|V_{1_{\bar{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\bar{x}}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\| \|\bar{x}'(s^*)\|}{\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\|} \\
&= \frac{\frac{\lambda_2(s) k^2(s)}{\sqrt{(r(s) - K_x(s))^2 + k^2(s)}} \left(\begin{array}{c} \left(16\lambda_2'^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) \right. \\ \left. (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^4(s) K_x^2(s) \right) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_2^3(s) k^3(s) \sqrt{(r(s) - K_x(s))^2 + k^2(s)}} \\
&= \frac{\left(\begin{array}{c} \left(16\lambda_2'^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) \right. \\ \left. (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^4(s) K_x^2(s) \right) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_2^2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^2 + k^2(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*)$ bulunursa

$$r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{h(\bar{x}''''(s^*), V_{4_{\bar{x}}}(s^*))}{\|V_{1_{\bar{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\bar{x}}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\| \|\bar{x}'(s^*)\|}$$

formülü kullanılarak $h(\overline{x}''''(s^*), V_{4\overline{x}}(s^*))$ ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
h(\overline{x}''''(s^*), V_{4\overline{x}}(s^*)) &= \frac{1}{\left(16\lambda_2'^2(s)k^2(s)(r(s)-K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s)k'^2(s)\right.} \\
&\quad \left.(r(s)-K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s)k^2(s)K_x^2(s)\left((r(s)-K_x(s))'\right)^2\right. \\
&\quad \left.+ \lambda_2^2(s)k^2(s)K_x^2(s)(r(s)-K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s)\right. \\
&\quad \left.k^4(s)K_x^2(s)\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \left[\begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &(4\lambda_2'(s)k(s)(r(s)-K_x(s)) + 5\lambda_2(s)k'(s)(r(s)-K_x(s)) \\ &+ \lambda_2(s)k(s)\left((r(s)-K_x(s))'\right) \end{aligned} \right] V_{1\overline{x}}(s) \\ &+ [-\lambda_2(s)k(s)K_x(s)(r(s)-K_x(s))] V_{2\overline{x}}(s) \\ &+ [-\lambda_2(s)k^2(s)K_x(s)] V_{4\overline{x}}(s) \end{aligned} \right] \\
&+ \left[\begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &3\lambda_2'(s)k^2(s)K_x(s) + 5\lambda_2(s)k(s)k'(s)K_x(s) \\ &+ \lambda_2(s)k^2(s)K_x'(s) \end{aligned} \right] V_{1\overline{x}}(s) \\ &\left[\begin{aligned} &\lambda_2(s)k^2(s)K_x^2(s) - 3\lambda_2''(s)k^2(s) \\ &- 9\lambda_2'(s)k'(s)k(s) \\ &- 4\lambda_2(s)k''(s)k(s) - 3\lambda_2(s)(k'(s))^2 \\ &+ \lambda_2(s)k^4(s) + \lambda_2(s)k^2(s)((r(s)-K_x(s))^2) \end{aligned} \right] V_{2\overline{x}}(s) \\ &\left[\begin{aligned} &- 3\lambda_2'(s)k^3(s) - 6\lambda_2(s)k'(s)k^2(s) \\ &+ \lambda_2'''(s)k(s) + 3\lambda_2''(s)k'(s) + 3\lambda_2'(s)k''(s) \\ &+ \lambda_2(s)k'''(s) \\ &- ((r(s)-K_x(s)))^2 \cdot [3\lambda_2'(s)k(s) + 3\lambda_2(s)k'(s)] \\ &- 3\lambda_2(s)k(s)(r(s)-K_x(s))((r(s)-K_x(s)))' \end{aligned} \right] V_{3\overline{x}}(s) \end{aligned} \right] \\
&+ \left[\begin{aligned} &\lambda_2(s)k^3(s)(r(s)-K_x(s)) + 3\lambda_2''(s)k(s)(r(s)-K_x(s)) \\ &+ 6\lambda_2'(s)k'(s)(r(s)-K_x(s)) \\ &+ 3\lambda_2(s)k''(s)(r(s)-K_x(s)) + 3\lambda_2'(s)k(s)(r(s)-K_x(s))' \\ &+ 3\lambda_2(s)k'(s)(r(s)-K_x(s))' \\ &+ \lambda_2(s)k(s)(r(s)-K_x(s))'' - \lambda_2(s)k(s)(r(s)-K_x(s))^3 \end{aligned} \right] V_{4\overline{x}}(s) \end{aligned}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\left\| V_{1_{\bar{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\bar{x}}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) \right\| \left\| \bar{x}'(s^*) \right\| = \frac{k^2(s) \lambda_2(s)}{\sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2}} \left(\begin{array}{c} 16\lambda_2'^2(s) k^2(s) \\ (r(s) - K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s) \\ k'^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) \\ k^2(s) \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 \\ + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) \\ (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) \\ k^4(s) K_x^2(s) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*) = - \frac{\sqrt{k^2(s) + (r(s) - K_x(s))^2}}{k^2(s) \lambda_2(s) \left(16\lambda_2'^2(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) \left((r(s) - K_x(s))' \right)^2 + \lambda_2^2(s) k^2(s) K_x^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 + \lambda_2^2(s) k^4(s) K_x^2(s) \right)}.$$

$$\begin{aligned} & \left(-\lambda_2^2(s) k^3(s) K_x^3(s) (r(s) - K_x(s)) + 3\lambda_2''(s) \lambda_2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) \right. \\ & + 9\lambda_2'(s) \lambda_2(s) k^2(s) k'(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) + 4\lambda_2^2(s) k''(s) k^2(s) K_x(s) \\ & (r(s) - K_x(s)) + 3\lambda_2^2(s) k(s) k'^2(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) - \lambda_2^2(s) k^5(s) K_x(s) \\ & (r(s) - K_x(s)) \lambda_2^2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))^3 - \lambda_2^2(s) k^3(s) K_x(s) \\ & (r(s) - K_x(s)) - 3\lambda_2''(s) \lambda_2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & - 6\lambda_2'(s) \lambda_2(s) k^2(s) k'(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) - 3\lambda_2^2(s) k^2(s) k''(s) \\ & K_x(s) (r(s) - K_x(s)) - 3\lambda_2'(s) \lambda_2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))' \\ & - 3\lambda_2^2(s) k^2(s) k'(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))' - \lambda_2^2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))'' \\ & + \lambda_2^2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))^3 + 12\lambda_2^2(s) k^3(s) \\ & K_x(s) (r(s) - K_x(s)) + 35\lambda_2'(s) \lambda_2(s) k^2(s) k'(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & + 3\lambda_2'(s) \lambda_2(s) k^3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))' + 5\lambda_2^2(s) k^2(s) k'(s) K_x(s) \\ & (r(s) - K_x(s))' + 25\lambda_2^2(s) k'^2(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s)) + 4\lambda_2'(s) \lambda_2(s) k^3(s) \\ & K_x'(s) (r(s) - K_x(s)) + 5\lambda_2^2(s) k^2(s) k'(s) K_x'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ & \left. + \lambda_2(s) k^3(s) K_x'(s) (r(s) - K_x(s))' \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece $\mathbb{Q}_4$ de 2. mertebeden involüt eğrinin bitorsiyonu hesaplanmıştır.

5.3. $\mathbb{Q}_4$ de 3. mertebeden İnvolutler

Teorem.5.3.1 $x, \mathbb{Q}_4$ de regüler birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun ve herhangi bir reel kuaternik eğri $\bar{x}$, x in 3. mertebeden involütü olsun. $\bar{x}$ kuaterniyonik eğrisinin Serret-Frenet denklemleri x in denklemleri tarafından oluşturulabilir.

İspat: $x = x(s)$ bir birim hızlı reel kuaterniyonik eğri olsun. Varsayalım ki $\bar{x} = \bar{x}(s)$, x in 3. mertebeden involütü olsun. Dolayısıyla

$$\bar{x}(s^*) = x(s) + \lambda_1(s) V_{1_x}(s) + \lambda_2(s) V_{2_x}(s) + \lambda_3(s) V_{3_x}(s) \quad (5.27)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= V_{1_x}(s) + \lambda_1'(s) V_{1_x}(s) + \lambda_1(s) K_x(s) V_{2_x}(s) \\ &\quad + \lambda_2'(s) V_{2_x}(s) + \lambda_2(s) [-K_x(s) V_{1_x}(s) + k(s) V_{3_x}(s)] \\ &\quad + \lambda_3'(s) V_{3_x}(s) + \lambda_3(s) \begin{bmatrix} -k(s) V_{2_x}(s) \\ + (r(s) - K_x(s)) V_{4_x}(s) \end{bmatrix} \\ &= \left[1 + \lambda_1'(s) - \lambda_2(s) K_x(s) \right] V_{1_x}(s) \\ &\quad + \left[\lambda_1(s) K_x(s) + \lambda_2'(s) - \lambda_3(s) k(s) \right] V_{2_x}(s) \\ &\quad + \left[\lambda_2(s) k(s) + \lambda_3'(s) \right] V_{3_x}(s) + [\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))] V_{4_x}(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\langle \bar{x}'(s^*), V_{1_x}(s) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \bar{x}'(s^*), V_{2_x}(s) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \bar{x}'(s^*), V_{3_x}(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan

$$\frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s)) V_{4_x}(s) \quad (5.28)$$

olur. Türev alma işlemine devam edilirse

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{ds^{*2}} \frac{ds^{*2}}{ds} &= -\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 V_{3_x}(s) \\ &+ \left(\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s)) + \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))' \right) V_{4_x}(s) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{x}}{ds^{*3}} \frac{ds^{*3}}{ds} &= [\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 k(s)] V_{2_x}(s) \\ &+ \left[\begin{aligned} &-2\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ &-3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s)) (r(s) - K_x(s))' \end{aligned} \right] V_{3_x}(s) \\ &+ \left[\begin{aligned} &\lambda_3''(s) (r(s) - K_x(s)) + 2\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))' \\ &+ \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))'' - \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^3 \end{aligned} \right] V_{4_x}(s) \end{aligned} \quad (5.30)$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{x}}{ds^{*4}} \frac{ds^{*4}}{ds} &= [-\lambda_3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))^2 k(s)] V_{1_x}(s) \\ &+ \left[\begin{aligned} &3\lambda_3'(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ &+ 5\lambda_3(s) k(s) (r(s) - K_x(s)) (r(s) - K_x(s))' \\ &+ \lambda_3(s) k'(s) (r(s) - K_x(s))^2 \end{aligned} \right] V_{2_x}(s) \\ &+ \left[\begin{aligned} &\lambda_3(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 - 3\lambda_3''(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ &- 9\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s)) (r(s) - K_x(s))' \\ &- 3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))'^2 \\ &- 4\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s)) (r(s) - K_x(s))'' \\ &+ \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^4 \end{aligned} \right] V_{3_x}(s) \\ &+ \left[\begin{aligned} &-3\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))^3 \\ &- 3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 (r(s) - K_x(s))' \\ &+ \lambda_3'''(s) (r(s) - K_x(s)) + 3\lambda_3''(s) (r(s) - K_x(s))' \\ &+ 3\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))'' \\ &- 3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 (r(s) - K_x(s))' \\ &+ \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))''' \end{aligned} \right] V_{4_x}(s) \end{aligned} \quad (5.31)$$

elde edilir. (5.31) eşitliğinin kuaterniyonik normu alınırsa

$$\left\| \frac{d\bar{x}}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} \right\| = |\lambda_3(s)| (r(s) - K_x(s)) \quad (5.32)$$

bulunur. (5.2), (5.28), (5.32) eşitlikleri kullanılarak

$$V_{1_{\bar{x}}}(s^*) = \frac{\frac{ds^*}{ds} \lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))}{\left| \frac{ds^*}{ds} \right| |\lambda_3(s)| (r(s) - K_x(s))} V_{4_x}(s)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$V_{1\bar{x}}(s^*) = \pm V_{4x}(s) \quad (5.33)$$

yazılabilir. $h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*}, \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}}\right)$ ifadesi (5.28) ve (5.29) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} h\left(\frac{d\bar{x}}{ds^*}, \frac{d^2\bar{x}}{ds^{*2}}\right) &= \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\lambda_3(s)(r(s) - K_x(s)) \begin{pmatrix} \lambda_3'(s)(r(s) - K_x(s)) \\ + \lambda_3(s)(r(s) - K_x(s))' \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_{4x}(s) \times V_{4x}(s) \\ + V_{4x}(s) \times V_{4x}(s) \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{ds^3}{ds^{*3}} \left[\begin{array}{c} \lambda_3(s) \lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ + \lambda_3^2(s) (r(s) - K_x(s)) (r(s) - K_x(s))' \end{array} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $V_{2\bar{x}}(s^*)$ (5.2), (5.28), (5.29), (5.32) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$V_{2\bar{x}}(s^*) = \frac{\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)}{\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\|}$$

formülü kullanılarak

$$\left\| \bar{x}'(s^*) \right\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) = -\lambda_3^3(s)(r(s) - K_x(s))^4 V_{3x}(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &\left\| \left\| \bar{x}'(s^*) \right\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\| \\ &= \lambda_3^3(s)(r(s) - K_x(s))^4 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} V_{2\bar{x}}(s^*) &= \frac{-\lambda_3^3(s)(r(s) - K_x(s))^4 V_{3x}(s)}{\lambda_3^3(s)(r(s) - K_x(s))^4} \\ &= -V_{3x}(s) \end{aligned} \quad (5.34)$$

olur. Diğer yandan

$$V_{4\bar{x}}(s^*) = \eta \frac{V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)}{\|V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\|}$$

formülü kullanılarak hesaplanabilir. (5.3), (5.33), (5.34) eşitlikleri kullanılırsa

$$V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) = \quad (5.35)$$

$$\begin{array}{c}
\left| \begin{array}{cccc}
V_{1_x}(s) & V_{2_x}(s) & V_{3_x}(s) & V_{4_x}(s) \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
& & & \lambda_3''(s) \\
& & -2\lambda_3'(s) & (r(s) - K_x(s)) \\
& & (r(s) - K_x(s))^2 & +2\lambda_3'(s) \\
0 & \lambda_3(s)k(s) & -3\lambda_3(s) & (r(s) - K_x(s))' \\
& (r(s) - K_x(s))^2 & (r(s) - K_x(s)) & +\lambda_3(s) \\
& & (r(s) - K_x(s))' & (r(s) - K_x(s))'' \\
& & & -\lambda_3(s) \\
& & & (r(s) - K_x(s))^3
\end{array} \right| \\
= [\lambda_3(s)k(s)(r(s) - K_x(s))^2] V_{1_x}(s)
\end{array}$$

şeklinde elde edilir. $V_{1_{\overline{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\overline{x}}}(s^*) \wedge \overline{x}'''(s^*)$ ifadesinin normu alınırsa

$$\left\| V_{1_{\overline{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\overline{x}}}(s^*) \wedge \overline{x}'''(s^*) \right\| = \lambda_3(s)k(s)(r(s) - K_x(s))^2 \quad (5.36)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
V_{4_{\overline{x}}}(s^*) &= \eta \frac{[\lambda_3(s)k(s)(r(s) - K_x(s))^2] V_{1_x}(s)}{\lambda_3(s)k(s)(r(s) - K_x(s))^2} \\
&= \eta V_{1_x}(s)
\end{aligned} \quad (5.37)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta = \pm 1$, $\det(V_{1_x}(s), V_{2_x}(s), V_{3_x}(s), V_{4_x}(s)) = \pm 1$ i sağlar.

$V_{3_{\overline{x}}}(s^*)$ (5.2), (5.33), (5.34), (5.37) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
V_{3_{\overline{x}}}(s^*) &= \eta (V_{4_{\overline{x}}}(s^*) \wedge V_{1_{\overline{x}}}(s^*) \wedge V_{2_{\overline{x}}}(s^*)) \\
&= \eta \left| \begin{array}{cccc}
V_{1_x}(s) & V_{2_x}(s) & V_{3_x}(s) & V_{4_x}(s) \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{array} \right| \\
&= \eta V_{2_x}(s)
\end{aligned} \quad (5.38)$$

elde edilir. $K_{\bar{x}}(s^*)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
K_{\bar{x}}(s^*) &= \frac{\|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*)}{\|\bar{x}'(s^*)\|^4} \\
&= \frac{\lambda_3^3(s)(r(s) - K_x(s))^4}{\left(\sqrt{\lambda_3^2(s)(r(s) - K_x(s))^2}\right)^4} \\
&= \frac{1}{\lambda_3(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $k^*(s^*)$ bulunursa

$$\begin{aligned}
k^*(s^*) &= \frac{\|V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\| \|\bar{x}'(s^*)\|}{\left\| \|\bar{x}'(s^*)\|^2 \bar{x}''(s^*) - h(\bar{x}'(s^*), \bar{x}''(s^*)) \bar{x}'(s^*) \right\|} \\
&= \frac{\lambda_3^2(s) k(s) (r(s) - K_x(s))^3}{\lambda_3^3(s) (r(s) - K_x(s))^4} \\
&= \frac{k(s)}{\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))}
\end{aligned}$$

elde edilir. $r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*)$ bulunursa

$$r^*(s^*) - K_{\bar{x}}(s^*) = \frac{h(\bar{x}''''(s^*), V_{4\bar{x}}(s^*))}{\|V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*)\| \|\bar{x}'(s^*)\|}$$

formülü kullanılarak $h(\bar{x}''''(s^*), V_{4\bar{x}}(s^*))$ ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
h(\bar{x}''''(s^*), V_{4\bar{x}}(s^*)) &= \left\langle \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -\lambda_3(s) K_x(s) \\ (r(s) - K_x(s))^2 k(s) \end{array} \right] V_{1x}(s) \\ + \left[\begin{array}{l} 3\lambda_3'(s) k(s) \\ (r(s) - K_x(s))^2 \\ +5\lambda_3(s) k(s) \\ r(s) - K_x(s) \\ (r(s) - K_x(s))' \\ +\lambda_3(s) k'(s) \\ (r(s) - K_x(s))^2 \end{array} \right] V_{2x}(s) \\ \left[\begin{array}{l} \lambda_3(s) k^2(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ -3\lambda_3''(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ -9\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s)) \\ (r(s) - K_x(s))' \\ -3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))' \\ -4\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s)) \\ (r(s) - K_x(s))'' \\ +\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^4 \\ -3\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))^3 \\ -3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ (r(s) - K_x(s))' \\ +\lambda_3'''(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +3\lambda_3''(s) (r(s) - K_x(s))' \\ +3\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))'' \\ -3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ (r(s) - K_x(s))' \\ +\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))''' \end{array} \right] V_{3x}(s) \\ \left[\begin{array}{l} -3\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))^3 \\ -3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ (r(s) - K_x(s))' \\ +\lambda_3'''(s) (r(s) - K_x(s)) \\ +3\lambda_3''(s) (r(s) - K_x(s))' \\ +3\lambda_3'(s) (r(s) - K_x(s))'' \\ -3\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))^2 \\ (r(s) - K_x(s))' \\ +\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))''' \end{array} \right] V_{4x}(s) \end{array} \right], V_{1x}(s) \right\rangle \\
&= -\lambda_3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))^2 k(s)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\left\| V_{1\bar{x}}(s^*) \wedge V_{2\bar{x}}(s^*) \wedge \bar{x}'''(s^*) \right\| \left\| \bar{x}'(s^*) \right\| = k(s) \lambda_3^2(s) (r(s) - K_x(s))^3$$

olduğundan

$$\begin{aligned} r^*(s^*) - K_x(s^*) &= \eta \frac{-\lambda_3(s) K_x(s) (r(s) - K_x(s))^2 k(s)}{k(s) \lambda_3^2(s) (r(s) - K_x(s))^3} \\ &= \frac{K_x(s)}{\lambda_3(s) (r(s) - K_x(s))} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $\mathbb{Q}_4$ de 3. mertebeden involüt eğrinin bitorsiyonu hesaplanmıştır.



6. SONUÇ

Bu çalışmada Öklidyen uzay ve Kuaterniyonik uzayda involütlerin incelenmiş, temel kavramlar verilerek yapılan çalışmaya yardımcı olacağı düşünülen teoremler, önermeler ve ispatlar açıklanmıştır.

4. ve 5. bölümler çalışmanın orjinal kısmı olup 4. bölümde 3- boyutlu kuaterniyonik uzayda 1. ve 2. mertebeden involütler ve Serret-Frenet denklemleri hesaplanmıştır.

5. bölümde ise 4-boyutlu kuaterniyonik uzayda 1. , 2. ve 3. mertebeden involütler ve Serret-Frenet denklemleri hesaplanmıştır.

Yapılan bu hesaplamalar sonucunda Öklidyen ve Kuaterniyonik uzaylarda yapılan hesaplamaların birbirine yakın sonuçlar doğurduğu saptanmıştır. Benzer hesaplamalar diğer uzaylar için de yapılabilir.

Bu araştırma 3 ve 4 boyutlu Öklidyen ve Kuaterniyonik uzaylarda tanımlanan eğrilerinin involüt eğrileri ile ilgili bilgi edinmek isteyen araştırmacılar için temel bilgi, hesaplama ve özellikler sunan bir çalışma niteliğindedir.

5. KAYNAKLAR

- [1] **Çiçek, V.**, 2015. Üç boyutlu Öklidyen ve Minkowski uzayında yüzeyler, Yüksek Lisans Tezi, N. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Niğde.
- [2] www.matematiksel.org/ Köprüde gelen ilham kuaterniyonlar. 16 Mart 2017.
- [3] **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1998. Diferensiyel Geometri I, Ankara Üniversitesi.
- [4] **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 2000. Diferensiyel Geometri II, Ankara Üniversitesi yayınları.
- [5] **Sabuncuoğlu, A.**, 2006. Diferansiyel Geometri Nobel yayınları, Ankara.
- [6] **Kimia, B., Frankel, I. and Popescu, A.**, 2003. Euler spiral for shape completion, Int.J.Comp.Vision, **54** (1) , 159 – 182.
- [7] **Kılıç, B., Arslan, K. and Öztürk, G.**, 2008. Tangentially cubic curves in Euclidean spaces, Differential Geometry-Dymanical Systems, **10**, 186 – 196.
- [8] **Monterde, J.**, 2009. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. Computer aided geometric design, **26**, 271 – 278.
- [9] **Öztürk, G., Arslan, K. ve Bulca, B.**, 2018. "A , characterization of involutes and evolutes of a given curve in $\mathbb{E}^n$, Kyungpook Math. J., **58**, 117 – 135.
- [10] **Klein, F. and Lie, S.**, 1871. Über diejenigen ebenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, Math. Ann., **4**, 50 – 84.
- [11] **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyon Teorisi, G.Ü., Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No(=2), Ankara.
- [12] **Bharathi, K. and Nagaraj, M.**, 1987. Regularity For Quaternion Functions Of Several Complex Variables, Ind. J. Pure App. Math., **18**(8) : 697 – 704.
- [13] **Bharathi, K. and Nagaraj, M.**, 1987. Quaternion Valued Function Of a Real Variable Serret-Frenet Formulae, Ind. J. P. App. Math., **18**(6) , 507 – 511.

- [14] **Beem, J. K. and Ehrlich, P.E.**, 1981. Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, Inc. New York.
- [15] **Soyfidan, T. ve Güngör, M.A.**, 2013. On the Quaternionic involute-evolute curves "arXiv: 1311. 0621 [math. GT].
- [16] **Keçilioğlu, O., İlarslan, K.**, 2013. Quaternionic Bertrand curves in Euclidean 4-Space, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 5, 3, 27 – 38.
- [17] **Blazenka, D. and Zeljka, MS.**, 1999. Involutes, and evolutes in n-dimensional simply isotropic space, Journal of information and organizational sciences, **2**(3), 71 – 79.
- [18] **Gluck, H.**, 1966. Higher curvatures of curves in Euclidean space, Am. Math. Monthly, **73**, 699 – 704.
- [19] **Monterde, J.**, 2007. Curves with constant curvature ratios, Bull Mexican Math.Soc.Ser.3A, **13**(1), 177 – 186.
- [20] **Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H.H.**, 2008. A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^m$, Proc.Estonian Acad Sci, **57**(4), 217 – 224.
- [21] **Turgut, M. and Ali, T.A.**, 2010. Some characterizations of special curves in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$, Acta Üniv Sapientiae, Mathematica, **2**(1), 111 – 122.
- [22] **Uribe-Vargas, R.**, 2004. On singularities, "perestroikas" and differential geometry of space curve, Ens.Math, **50**, 69 – 101.
- [23] **Bilici, M. and Çalışkan, M.**, 2002. Some characterizations for the pair of involute-evolute curves in Euclidean $\mathbb{E}^3$, Bulletin of Pure and Applied Sciences, **21E**(2), 289 – 294.
- [24] **Kılıçoğlu, Ş. and Şenyurt, S.**, 2017. On the second order involute curves in $\mathbb{E}^3$, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 66, 2, 332 – 339.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Elazığ' da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ' da tamamladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2014 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri alanında yüksek lisansa başladım ve ders aşamasını tamamladım. 2018 yılında tez aşamasında yüksek lisansına devam etmekteyim.

