

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ
Faruk ERİNCİ
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU
ELAZIĞ -2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Faruk ERİNCİ
(08121117)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Mayıs 2012
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 2012

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Mehmet IŞIK (F.Ü)

HAZİRAN-201

T.C

**FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ**

**Yüksek Lisans Tezi
Faruk ERİNCİ
08121117**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi**

Danışman: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 23 Mayıs 2012
ELAĞIĞ -2012**

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam sayın **Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU**'na teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Faruk ERİNCİ

ELAZIĞ - 2012

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	V
SİMGELER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
I. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
II. BÖLÜM	
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SPEKRAL TEORİ	14
2.1. Nodal Nokta ve Spektral Karakteristiklerin Özellikleri	14
2.2. Teklik Teoremi	19
2.3. Potansiyel Fonksiyonun Elde Edilmesi	21
Kaynaklar	26
Özgeçmiş	27

SİMGELER LİSTESİ

$L^2[0, 1]$	: $[0, 1]$ aralığında karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
λ	: Özdeğer
$\varphi(x, \lambda_n)$	: Özfonksiyon
C^{N+1}	: $(N + 1)$. mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$o(1)$	: Sonsuz küçük değerler
$O(1)$	: Sınırlı değerler
x_j^n	: Nodal nokta
$l_j^{(n)}$	: Nodal uzunluk
q	: Potansiyel fonksiyon
W_1^2	: Sobolev Uzayı
H	: Hilbert Uzayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon

ÖZET

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, klasik Sturm-Liouville operatör farklı olarak, integral terimi içeren bir operatör için nodal parametreler verildi. Ayrıca, bu parametreler yardımıyla ters problemin çözümü incelendi.

Anahtar Kelimeler: Ters nodal problem, integro-diferansiyel operatör, özdeğer, özfonksiyon.

ABSTRACT

This thesis consists of two chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems are given which will be used in following chapters.

In the second chapter, unlike the classical Sturm-Liouville problem, Solution of inverse nodal problem is given for Sturm-Liouville operator contains an integral term.

Keywords: Inverse nodal problem, integral-differential operators, eigenvalues, eigenfunctions.

I. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1. (Metrik Uzay): X boş olmayan bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

$$\mathbf{M1)} \quad d(x, y) \geq 0$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\mathbf{M4)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şeklindedir. (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

ÖRNEK 1.1. l_∞ dizi uzayı sınırlı sayı dizileri uzayıdır. Şunu ifade edelim l_∞ dizi uzayının her $x = (\xi_j)$ elemanı K_x , x 'e bağlı olabildiği halde j ye bağlı olmayan reel bir sayıyı göstermek üzere; her $j = 1, 2, \dots$ için

$$|\xi_j| \leq K_x$$

şeklindedir. Bu dizi uzayı $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j) \in l_\infty$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$$

şeklinde tanımlanan metriğe göre bir metrik uzaydır.

ÖRNEK 1.2. $C[a, b]$, $J = [a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay $x(t), y(t) \in C[a, b]$ olmak üzere

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

şeklinde tanımlanan metriğe göre bir metrik uzaydır.

NOT 1.1. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir.

Örneğin; $C[a, b]$ uzayı $x(t), y(t) \in C[a, b]$ olmak üzere hem

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

hem de

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

metriklerine göre bir metrik uzaydır.

ÖRNEK 1.3. Sınırlı ya da sınırsız kompleks terimli tüm dizilerin cümlesi olan s cümlesi $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in s$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{|\xi_j - \eta_j|}$$

şeklinde tanımlanan metriğe göre bir metrik uzaydır.

ÖRNEK 1.4. $L_2[a, b]$ uzayı

$$\int_a^b x^2(t) dt < \infty$$

özellikli sağlayan karesel integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan uzaydır. Bu uzayın elemanları $x(t), y(t), \dots$ şeklinde $[a, b]$ kapalı aralığında ölçülebilir, kompleks değerli, karesel integrallenebilen fonksiyonlardır.

Bu uzay, $\forall x(t), y(t) \in L_2[a, b]$ için

$$d(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan metriğe göre bir metrik uzaydır.

TANIM 1.2. (Yoğun Cümle): Bir X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde eğer $\bar{M} = X$ oluyor ise M ye X de yoğun cümle denir. Burada $\bar{M}$, M nin kapanışı olarak

adlandırılır. M nin kapanışı, M cümlesinin yığılma noktalarının eklenmesi ile elde edilir. Örneğin $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ 'de yoğundur.

TANIM 1.3. (Tam Uzay): Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ℓ_∞ , c , ℓ_p , $C[a, b]$ uzayları tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir.

ÖRNEK 1.5. X , $J = [0, 1]$ üzerinde, tüm sürekli reel değerli fonksiyonlardan oluşan cümle ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

olsun. Bu şekilde elde edilen (X, d) metrik uzayı tam değildir.

TANIM 1.4. (Normlu Uzay): Üzerinde bir norm tanımlanmış olan X vektör uzayına normlu uzay denir. Bir tam normlu Banach uzayı denir. Bir X vektör uzayındaki norm ise X üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve x ve y X de keyfi vektörler ve α bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir reel değerli fonksiyondur.

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ayrıca şunu ifade edelim X vektör uzayında tanımlanan her norm, X üzerinde

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından doğrulan metrik olarak adlandırılır. O halde her normlu uzay ve her Banach uzayı bir metrik uzayıdır.

ÖRNEK 1.6. $C[a, b]$ uzayı $x \in C[a, b]$ için

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$$

ile verilen norma göre bir Banach uzayıdır.

ÖRNEK 1.7. $L_2[0, 1]$ uzayı $f(x) \in L_2[0, 1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzayıdır.

TANIM 1.5. (Sınır Şartları): Sınırlı bir D bölgesinde, fiziksel bir olayın matematiksel davranışını kontrol etmek istiyorsak, D bölgesinin sınırında, genellikle bağımlı değişkene bağlı bazı şartlar yüklememiz gerekir. Verilen bu sınır değerlerine diferansiyel denklem için sınır şartları denir. Sınır şartları 3'e ayrılır.

1) Dirichlet Sınır Şartı: Bu durumda u fonksiyonu sınırlı D bölgesinin sınırı üzerinde tanımlıdır. L uzunluğu için $0 < x < L$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları; $u(0) = \alpha$, $u(L) = \beta$ şeklinde tanımlanır. Burada α, β sabittir. Bir dikdörtgensel bölgede $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları

$u(0, y), u(L_1, y), u(x, 0)$, ve $u(x, L_2)$ olarak verilir. Eğer bağımlı değişken olan u , sınırının herhangi bir noktasında sıfır ise bu sınır şartlarına homojen sınır şartları, aksi takdirde homojen olmayan sınır şartı denir.

2) Neumann Sınır Şartı: Bir L uzunluğu için, Neumann sınır şartları

$$u_x(0, t) = \alpha, u_x(L, t) = \beta$$

olarak tanımlanır.

3) Karışık (Robin) Sınır Şartı: Bu durumda u bağımlı değişkenin bir lineer kombinasyonu ve $\frac{du}{dn}$ normal formu sınır üzerinde tanımlıdır. Örneğin $u(0, y) + u_x(0, y)$ veya $u(L_1, y) + u_x(L_1, y)$ gibi şartlar varsa bu sınır şartları karışık (Robin) sınır şartlarıdır.

TANIM 1.6. (Başlangıç Şartları): Difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu zamana bağlıdır. Başlangıç zamanı olan $t = 0$ anında bağımlı değişkenin başlangıç değerleri verilmelidir. Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemde

başlangıç şartı $u(x, 0)$ ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemde ise $u(x, 0)$ veya $u_t(x, 0)$ şeklindedir.

TANIM 1.7. (Operatör): Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir. Diferansiyel denklem, diferansiyel operatör ve diferansiyel ifade sırası ile aşağıdaki gösterimlere sahiptir.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

$$A = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x)$$

$$Ay = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y$$

TANIM 1.8. (Lineer Operatör): E_x ve E_y iki reel (kompleks) lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y = A_x$ operatörünü göz önünde bulunduralım. A operatörü için

$$1) x_1, x_2 \in E_x \text{ olmak üzere } A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$2) \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ olmak üzere } \forall x \in E_x \text{ için } A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

şartlarını sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir.

Örneğin $K(t, s)$, $0 \leq t, s \leq 1$ sürekli ve $x(s) \in C[0, 1]$ olmak üzere

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s) x(s) ds$$

eşitliği ile tanımlı $y = Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

TANIM 1.9. (Hilbert Uzayı): Herhangi $x, y, z, \dots$ elemanlar cümlesini H ile gösterelim. H aşağıdaki koşulları sağlasın.

1) H lineer kompleks uzaydır.

2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen kompleks (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\mathbf{a)} \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\mathbf{b)} \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\mathbf{c)} \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\mathbf{d)} \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.

4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına Üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H Uzayına Soyut Hilbert Uzayı veya Hilbert Uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir.

X kümesi üzerinde tanımlanan bir iç çarpım X üzerinde;

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

ile verilen bir metrik tanımlar. Buna göre her iç çarpım uzayı bir normlu uzaydır.

ÖRNEK 1.8. $H = L_{2,\rho}[0, 1]$ bir Hilbert uzayıdır. Eğer $x(t) \in L_{2,\rho}[0, 1]$ ise

$$\int_0^1 \rho(t) |x(t)|^2 dt < \infty, \quad \rho(t) > 0$$

ölçülebilir olur. Burada iç çarpım $\forall x(t), y(t) \in L_{2,\rho}[0, 1]$ için

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 \rho(t) x(t) \overline{y(t)} dt$$

olacak şekilde tanımlanır.

ÖRNEK 1.9. $H = L_2[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

şeklindeki karesel integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan uzaydır. Bu uzayın elemanları $f(x), g(x), \dots$, şeklinde $[a, b]$ kapalı aralığında ölçülebilir, kompleks değerli, karesel integrallenebilen fonksiyonlardır. Bu uzayda iç çarpım ise $\forall f(x), g(x) \in L_2[a, b]$ için;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde. Strum-Liouville operatörünün spektral teorisi genellikle $L_2[0, 1]$, $L_2[0, \pi]$, $L_2[0, \infty)$ ve $L_2(-\infty, \infty)$ aralığında incelenmektedir.

LEMMA 1.1. (Schwarz Eşitsizliği ve Üçgen Eşitsizliği): Bir iç çarpım ve buna karşılık gelen norm için Schwarz eşitsizliği ve Üçgen eşitsizliği aşağıda verilen hallerde geçerlidir.

a) Eşitsizlik hali ancak ve ancak $\{x, y\}$ nin lineer bağımlı olması halinde geçerli olmak üzere, Schwarz eşitsizliği

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

şeklinde.

b) Söz konusu norm eşitlik hali ancak ve ancak $y=0$ ya da $x=cy$ ($c \geq 0, c \in \mathbb{R}$) halinde geçerli olmak üzere, Üçgen eşitsizliği

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şeklinde.

TANIM 1.10. (O, o ve $\sim$ Sembolleri): $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

a) $\frac{f(x)}{g(x)}$ kesri birim değerini alıyor ise $x \rightarrow \infty$ iken $f(x) \sim g(x)$ veya kısaca

$f \sim g$ ile gösterilir.

b) $x \rightarrow \infty$ iken $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ yazılır. Yani $f(x)$ fonksiyonu

$g(x)$ fonksiyonundan daha küçük derecelidir.

c) $x \rightarrow \infty$ iken $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ yazılır. Yani $f(x)$ fonksiyonu

$g(x)$ fonksiyonundan daha büyük veya eşit derecelidir.

ÖRNEK 1.10. $(1+x^2) = O(x^2)$ dır. Çünkü $x \rightarrow \infty$ iken $\left| \frac{x^2+1}{x^2} \right| = \left| 1 + \frac{1}{x^2} \right| \rightarrow 1$ olup sınırlıdır. Yani $(1+x^2) \sim (x^2)$ dır.

ÖRNEK 1.11. $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ dır. Çünkü $x \rightarrow \infty$ iken $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow 0$ olur.

ÖRNEK 1.12. $\sinh x = O(e^x)$ dır. Çünkü;

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

olduğundan her iki tarafı e^x ile bölünürse

$$\frac{\sinh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} + \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{\sinh x}{e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

olur. Yani $\left| \frac{\sinh x}{e^x} \right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\sinh x = O(e^x)$ olur.

TANIM 1.11.(Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve her $x \in A$ için, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Dikkat edilecek olursa burada sözü edilen n_0 sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Eğer A kümesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir.

TANIM 1.12. (Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

TANIM 1.13. (Düzgün Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

Şimdi süreklilik ile düzgün süreklilik arasındaki farkı ifade edelim. Bu tanım ilk bakışta f fonksiyonunun A üzerinde sürekli olması tanımına benzemektedir. Fakat bunlar birbirinden farklıdır. Çünkü; f fonksiyonu A üzerinde sürekli olduğunda bulunacak olan δ sayısı hem ε , hem de A da alınan x_0 noktasına bağlıdır. Hâlbuki düzgün sürekli olması için δ 'nın sadece ε sayısına bağlı olması gerekir. Dolayısıyla düzgün sürekli bir fonksiyon süreklidir; fakat bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

TANIM 1.14. (Taylor Serisi): f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından türetilen Taylor serisi denir. Özel olarak $a=0$ alınır

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k$$

serisi elde edilir ki bu seriye McLaurain serisi adı verilir.

TANIM 1.15. (Özdeğer, Özfonksiyon): L sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde L operatörünün tanım kümesinde

$$L_y = \lambda y$$

olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise λ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyon denir.

TANIM 1.16. (Sturm-Liouville Operatörleri): Matematik ve uygulamalarında kullanılan, Jacques Charles Francois Sturm (1803-1855) ve Joseph Liouville (1809-1882) nin ele aldığı ve Sturm-Liouville denklemi olarak bilinen

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda \omega(x)y,$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $\omega(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlardır. $\omega(x)$ fonksiyonuna ağırlık veya yoğunluk fonksiyonu denir. Sınır şartlarını sağlayan yukarıdaki denklemin aşikar olmayan çözümleri için λ değerlerini bulmak Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan problemin bir parçasıdır.

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda \omega(x)y,$$

denkleminde $\omega(x)=1$ alırsak

$$Lu = \lambda u$$

özdeğer problemini elde ederiz. Uygulamalarda sık sık kullanılan en temel operatörlerden biriside $q(x)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatör için $y(x)$ çözüm fonksiyonları cümlesi diferansiyellenebilir ve aralığının uç noktalarında verilmiş şartlarla belirlenir.

L operatörü için en önemli sınır şartları,

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

şeklindedir.

$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (1.2)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0 \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım.(1.2)-(1.3) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir. (1.3) sınır şartı sırasıyla $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ ile bölünürse

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) &= 0 \\ y(b) \cos \beta + y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $\cos \alpha = -h$ ve $\cos \beta = H$ denilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0 \\ y'(b) + Hy(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli fonksiyon; H ve h sayıları da sonlu ise (1.2)-(1.5) problemine regüler Sturm- Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir.

TANIM 1.17. (Rezolvent Cümlesi, Spektrum): T, H Hilbert uzayında yoğun olan bir cümlede tanımlı, kapalı lineer bir operatör olsun. T operatörünün rezolventi

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} \text{ şeklindeki } \lambda \text{ değerli bir operatör olarak tanımlanır.}$$

$X \neq \emptyset$ kompleks normlu uzayı ve $T: D(T) \rightarrow X$ lineer operatörü verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise λ ya T nin bir regüler değeri denir.

R1) $R_\lambda(T)$ mevcut

R2) $R_\lambda(T)$ sınırlı

R3) $R_\lambda(T)$ X de yoğun

T nin $\rho(T)$ rezolvent cümlesi tüm λ regüler değerlerinin cümlesidir. Bu cümlenin tümleyeni $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ şeklinde olup, T nin spektrumu adını alır. Eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ , T nin spektrumu olur.

TANIM1.18. (Özfonksiyonların Sıfırları): Basit bir sınır değer problemi olan

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

problemini göz önüne alalım. Bu problemin özfonksiyonları

$$\varphi_0(x) = \cos(0x), \varphi_1(x) = \cos(1x), \varphi_2(x) = \cos(2x), \dots, \varphi_n(x) = \cos(nx), \dots,$$

olup bu özfonksiyonlara karşılık gelen özdeğerler sırası ile

$$\lambda_0 = 0^2, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \lambda_3 = 3^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots,$$

şeklinde dir. Böylece sıfırdan saymaya başlayarak artan özdeğerlerin sırasına göre özfonksiyonları sıraya koymuş olduk.

Aşıkardır ki özfonksiyonların sıfırları aşağıdaki özellikleri sağlar

i) n . özfonksiyon $[0, \pi]$ aralığında tam olarak n tane sıfıra sahiptir.

ii) n . ve $(n+1)$. özfonksiyonların sıfırları çaprazlaşırlar.

TANIM 1.19. (Ters Nodal Problem): $q \in L^1(0, 1)$ ve $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$

$$y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0$$

şeklinde verilen Sturm- Liouville problemini göz önüne alalım.

$\lambda_n, n = \overline{1, \infty}$ n. özdeğer, $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ ve $x_i^{(n)}$, n . özfonksiyon olan y_n e karşılık gelen i . nodal nokta olsun. Başka bir ifade ile $y_n(x_i^{(n)}) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ olsun. Sturm- Liouville denklem sistemi sadece; $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ olmak üzere reel

özdeğerlere sahiptir. y_n özfonksiyonu $n \in N$ için $(0, 1)$ aralığında $(n-1)$ tane nodal noktaya sahiptir. Bu nodal noktalar; $0 < x_1^n < x_2^n < x_3^n < \dots < x_{(n-1)}^n < 1$ şeklindedir.

$I_i^n = |I_i^n| = x_{i+1}^n - x_i^n$ ise nodal uzunluk olarak tanımlanır.

LEMMA 1.2. (Riemann – Lebesgue lemması)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonu sınırlı olsun.

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

dir.

II. BÖLÜM

İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SPEKTRAL TEORİ

2.1. Nodal Nokta ve Spektral Karakteristiklerin Özellikleri

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t)dt = \lambda y, \quad x \in [0, \pi] \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ y'(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

problemini göz önüne alalım. Burada $q \in L_2(0, \pi)$ ve $M(x, t)$ reel değerli fonksiyonlar,

$$D_0 = \{(x, t) \notin \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq x \leq \pi\}$$

kümesi üzerinde integrallenebilir. Bu problem kısaca $L(q, M)$ ile gösterilecektir.

$\{\lambda_n\}$, (1.1)-(1.2) probleminin özdeğerleri ve $\varphi(x, \lambda)$, (2.1.1) denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = 0$ şartlarını sağlayan çözümü olsun. Böylece $\varphi(x, \lambda)$, $L(q, M)$ operatörünün λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarını gösterir. $\varphi(x, \lambda_n)$, $(0, \pi)$ aralığından $(n-1)$ temel sıfıra sahiptir. Bu sıfırlara (2.1.1)-(2.1.2) probleminin nodal noktaları denir. Bu noktalar kullanılarak Sturm-Liouville probleminde $q(x)$ potansiyel fonksiyonu bulunabilir.

Lemma 2.1:

$$\begin{aligned} \ell y - \lambda y &= 0 \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

problemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat: Klasik Sturm-Liouville probleminin çözümü göz önüne alınırsa, $\rho = \sqrt{\lambda}$ olmak üzere

$$y(x) = \int_0^x y(t) \left(\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) \right) dt + \int_t^x M(\xi, t) \left(\frac{\sin \rho(x-\xi)}{\rho} \right) d\xi dt$$

probleminin bir çözümü olur.

Bu çözüm Volterra integralinin çözümü olup tektir.

$\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ (2.1.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = 0$$

$$\psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = 0$$

şartlarını sağlayan çözümü olur.

Lemma 2.2: $\tau = \text{Im } \rho$ olsun. $|\rho| \rightarrow \infty$ için aşağıdaki asimptotik formlar sağlanır.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|\rho|}\right) = O\left(e^{|\tau|x}\right) \\ \varphi'(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho x + O\left(e^{|\tau|x}\right) = O\left(|\rho| e^{|\tau|x}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \cos \rho(\pi - x) + O\left(\frac{e^{|\tau|(\pi - x)}}{|\rho|}\right) = O\left(e^{|\tau|(\pi - x)}\right) \\ \psi'(x, \lambda) &= \rho \sin \rho(\pi - x) + O\left(e^{|\tau|(\pi - x)}\right) = O\left(|\rho| e^{|\tau|(\pi - x)}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

İspat: $\varphi(x, \lambda)$ özfonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos \rho x + \\ &+ \int_0^x \varphi(t, \lambda) \left(\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) + \int_t^x M(\xi, t) \frac{\sin \rho(x-\xi)}{\rho} d\xi \right) dt \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Volterra denkleminin tek çözümüdür.

Bu sebeple (2.1.5) denkleminin x 'e göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho x + \\ &+ \int_0^x \varphi(t, \lambda) \cos \rho(x-t) q(t) dt + \int_t^x M(\xi, t) \cos \rho(x-\xi) d\xi dt \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

olur.

$$\delta(\lambda) = \max_{x \in [0, \pi]} |\varphi(x, \lambda)| e^{-|\tau|x}$$

olsun.

$$|\sin \rho x| \leq e^{|\tau|x}, \quad |\cos \rho x| \leq e^{|\tau|x}$$

olduğundan (2.1.5)'den

$$\begin{aligned} |\varphi(x, \lambda)| &\leq 1 + \frac{1}{|\rho|} \int_0^x |\varphi(t, \lambda)| \left[|q(t)|^{e^{|\tau|t}} + \frac{1}{|\rho|} \int_t^x |M(\xi, t)| d\xi dt \right] \\ |\varphi(x, \lambda)| e^{-|\tau|x} &\leq 1 + \frac{1}{|\rho|} \delta(\lambda) \int_0^x |q(t)| dt \\ &\quad + \delta(\lambda) \max_x \int_0^x e^{|\tau|t} dt \int_0^t |M(t, \xi)| e^{-|\tau|\xi} d\xi, \quad |\rho| \geq 1, \quad (x \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

ve

$$\delta(\lambda) \leq 1 + \delta(\lambda) (\sqrt{\pi} \|q\|_{L_2} + \|M\|_{L_2})$$

elde edilir.

Böylece $\delta(\lambda) = O(1)$ ve $\varphi(x, \lambda) = O(e^{|\tau|x})$ olur.

Bu değerler (2.1.5) ve (2.1.6) de yerine yazılırsa, (2.1.5) elde edilir. (2.1.6) de benzer şekilde elde edilebilir.

$$\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) \tag{2.1.7}$$

olsun.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna L probleminin karakteristik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $\frac{1}{2}$.

dereceden bir tam fonksiyon olup sayılabilir çokluktaki sıfırların bir $\{\lambda_n\}$ cümlesine sahiptir.

Yani $\Delta(\lambda) = 0$ eşitliğini sağlayan λ değerleri (2.1.1), (2.1.2) probleminin özdeğerleri olur.

Lemma 2.3: $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları L probleminin özdeğerleridir.

$\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlar ve $\{C_n\}_0^\infty$ sabitlerin dizisi olmak üzere

$$\psi(x, \lambda_n) = C_n \varphi(x, \lambda_n) \quad C_n \neq 0 \tag{2.2.8}$$

dir. [Yurko, 6]

İspat: λ_0 , $\Delta(\lambda)$ 'nin bir sıfırı olsun. Böylece (2.1.2) şartlarından

$$y'(0) = 0$$

$$y'(\pi) = 0$$

ve

$$\psi(x, \lambda_0) = \beta_0 \cdot \varphi(x, \lambda_0)$$

olur.

$\varphi(x, \lambda_0)$ ve $\psi(x, \lambda_0)$ (2.1.2) şartlarını sağlar. Dolayısıyla λ_0 bir özdeğer ve $\varphi(x, \lambda_0)$ ve $\psi(x, \lambda_0)$ birer özfonksiyon olur. λ_0 , L 'nin bir özdeğeri ve y_0 bir özfonksiyon olsun. Öyleyse $y_0'(0) = 0$ ve $y_0'(\pi) = 0$ olur. $y_0(0) \neq 0$ 'dır. Çünkü $y_0(0) = 0 \Rightarrow y_0(0) = 0$ olup buradan $y_0 = 0$ aşikâr çözümü elde edilir. Genelliği bozmadan $y_0(0) = 1$ alalım. Öyleyse $y_0'(0) = 0$ ve $y_0(\lambda) = \varphi(x, \lambda_0)$ olur. Böylece $\Delta(\lambda_0) = \varphi'(x, \lambda_0) = 0$ olur ve her bir özdeğere bir özfonksiyon karşılık gelir.

Lemma 2.4:

$$\Delta(\lambda) = -\rho \sin \rho \pi + \omega \cos \rho \pi + r(\rho) \quad (2.2.9)$$

dir. Burada

$$\omega = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx \quad (2.2.10)$$

ve

$$\begin{aligned} r(\rho) = & \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \rho(\pi - 2t) q(t) dt + \\ & + \int_0^\pi \cos \rho t dt \int_t^\pi M(\xi, t) \cos \rho(\pi - \xi) d\xi + O\left(\frac{e^{|\tau|/\pi}}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

dir.

İspat: (2.1.1) ifadesi (2.1.5) ve (2.1.6)'de yerine yazılırsa,

$$\cos \rho t \sin \rho(x-t) = \frac{1}{2} \{ \sin \rho x + \sin \rho(x-2t) \}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) = & \cos \rho x + \frac{1}{2} \frac{\sin \rho x}{\rho} \int_0^x q(t) dt + \frac{1}{2\rho} \int_0^x \sin \rho(x-2t) q(t) dt + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_0^x \cos \rho t dt \int_t^x M(\xi, t) \sin \rho(x-\xi) d\xi + O\left(\frac{e^{|\tau|t}}{\rho^2}\right) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

olur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) = & -\rho \sin \rho(x) + \frac{1}{2} \cos \rho x \int_0^x q(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \cos \rho(x-2t) q(t) dt + \int_0^x \cos \rho t dt \int_t^x M(\xi, t) \cos \rho(x-\xi) d\xi + \\ & + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

olur. Bu ifadelerde $x = \pi$ alınıp $\Delta(\lambda)$ 'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(\pi, \lambda) = & -\rho \sin \rho \pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \rho(\pi-2t) q(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sin \rho \pi}{\rho} \int_0^\pi q(t) dt + \frac{1}{2\rho} \int_0^\pi \sin \rho(\pi-2t) q(t) dt + O\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho}\right) \\ \Delta(\lambda) = & -\rho \sin \rho \pi + O\left(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\rho}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.5. L sınır değer problemi, özdeğerlerin sayılabilir bir kümesi olsun. $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ özdeğerleri aşağıdaki bağıntıları sağlar.

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{K_n}{n} \quad (2.2.14)$$

ve $n \rightarrow \infty$ iken

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(nx) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2.15)$$

Burada $\{K_n\}_{n=0}^{\infty} \in l_2$ şeklindedir. [Yurko, 12]

2.2. Teklik Teoremi

Özfonksiyonların sıfırları olan x_n^j nodal noktaları $(0, \pi)$ aralığında yoğun bir altküme oluşturur ve

$$NS[0, \pi] = \left\{ x_n^j \mid j = \overline{1, \dots, n}, n > N_0 \right\}$$

olsun. Bu durumda problem (2.1.1)-(2.1.2) problemi için ters problem aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.3. Ters Problem

Bu bölümde ters problemin çözümü için teklik teoremini ispatlanacaktır.

Bunun için, $\tilde{L} = L(\tilde{q}, M)$ ve $L = L(q, M)$ problemleri ve $NS[0, \pi]$ 'nin yoğun iki alt kümesi olsun.

Teorem 2.1. $X = \tilde{X}$ olması durumunda

$$q(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt = \tilde{q}(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{q}(t) dt \quad t \in (0, \pi)$$

dır.

İspat: X , $(0, \pi)$ 'de yoğun bir alt küme olsun. Herhangi bir $\xi \in (0, \pi)$ için $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere ξ 'ye yaklaşan bir $\{x_k^{j_k}\}_{k \in K}$ alt dizisi vardır.

$$\varphi_k(x) = \varphi(x, \lambda_k),$$

$$\tilde{\varphi}_k(x) = \tilde{\varphi}(x, \lambda_k) \text{ olsun.}$$

$$-\varphi_k'' + q\varphi_k + \int_0^x M(x, t)\varphi_k(t)dt = \lambda_k\varphi_k,$$

$$-\tilde{\varphi}_k'' + \tilde{q}\tilde{\varphi}_k + \int_0^x \tilde{M}(x, t)\tilde{\varphi}_k(t)dt = \tilde{\lambda}_k\tilde{\varphi}_k,$$

burada ilk eşitlik $\tilde{\varphi}_k(x)$, ikinci eşitlik $\varphi_k(x)$ çarpılarak taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_k'' \tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_k'' \varphi_k + \int_0^x \tilde{M}(x, t)(\tilde{\varphi}_k(t)\varphi_k(x) - \varphi_k(t)\tilde{\varphi}_k(x))dt &= (q - \tilde{q} + \tilde{\lambda}_k - \lambda_k)\tilde{\varphi}_k\varphi_k + \\ &+ \int_0^x [M(x, t) - \tilde{M}(x, t)]\varphi_k(t)\tilde{\varphi}_k(x)dt \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

elde edilir.

$$\varphi_k(x_k^{j_k}) = 0, \quad \tilde{\varphi}_k(x_k^{j_k}) = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_k' \varphi_k - \varphi_k' \tilde{\varphi}_k)' &= \tilde{\varphi}_k'' \varphi_k + \tilde{\varphi}_k' \varphi_k' - \tilde{\varphi}_k' \varphi_k' - \tilde{\varphi}_k \varphi_k'' \\ &= \tilde{\varphi}_k'' \varphi_k - \tilde{\varphi}_k \varphi_k'' \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \int_0^{x_j^n} (\varphi_k' \tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_k' \varphi_k)' dx &= \varphi_k' \tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_k' \varphi_k \Big|_0^{x_j^n} \\ &= \varphi_k'(x_j^n) \tilde{\varphi}_k(x_j^n) - \tilde{\varphi}_k'(x_j^n) \varphi_k(x_j^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \int_0^{x_k^{j_k}} \int_0^x M(x, t)(\tilde{\varphi}_k(t)\varphi_k(x) - \varphi_k(t)\tilde{\varphi}_k(x))dt dx &= \int_0^{x_k^{j_k}} (q(x) - \tilde{q}(x) + \tilde{\lambda}_k - \lambda_k)\varphi_k(x)\tilde{\varphi}_k(x)dx \\ &+ \int_0^{x_k^{j_k}} \int_0^x [M(x, t) - \tilde{M}(x, t)]\varphi_k(t)\tilde{\varphi}_k(x)dt dx \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

son ifadeden;

$$\varphi_k(x)\tilde{\varphi}_k(x) = \frac{1 + \cos(2k.x)}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (2.3.3)$$

$$\tilde{\varphi}_k(t)\varphi_k(x) - \varphi_k(t)\tilde{\varphi}_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (2.3.4)$$

$$\int_0^{x_k} \int_0^x M(x, t) O\left(\frac{1}{k}\right) dt dx = \int_0^{x_k} (q(x) - \tilde{q}(x) + \tilde{\lambda}_k - \lambda_k) \left(\frac{1 - \cos(2k.x)}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) dx + o(1) \quad (2.3.5)$$

yeniden yazılabilir. $k \rightarrow \infty$ iken limit alınır, $x_k \rightarrow \xi$ elde edilir.

$$k \rightarrow \infty \text{ iken, } \tilde{\lambda}_k - \lambda_k \rightarrow \frac{2(\tilde{\omega} - \omega)}{\pi} \text{ 'dir.}$$

Riemann-Lebesgue lemması ve (2.3.5) eşitliğinden

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^\xi \left(q(x) - \tilde{q}(x) + \frac{2(\tilde{\omega} - \omega)}{\pi} \right) dx \quad (2.3.6)$$

elde edilir.

(2.3.6) 'da $\xi = 0$ alınırsa

$$\psi_k(x) = \psi(x, \lambda_k) \text{ ve } \tilde{\psi}_k(x) = \tilde{\psi}(x, \lambda_k)$$

$$\int_0^\xi \left(q(x) - \tilde{q}(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\tilde{q}(t) - q(t)) dt \right) dx = 0$$

olup hemen hemen her yerde $q(x) = \tilde{q}(x)$ ve $q(t) = \tilde{q}(t)$ eşitlikleri sağlanır.

ξ , $(0, \pi)$ aralığında olduğundan $(0, \pi)$ aralığında

$$q(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt = \tilde{q}(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{q}(t) dt$$

elde edilir.

2.4. Potansiyel Fonksiyonların Elde Edilme Formülü

Bu bölümde, nodal noktalar yardımıyla $q \in L_2(0, \pi)$ potansiyeli için bir formül verilecektir.

$j = \overline{1, \dots, n-1}$, ($n \gg 1$) olmak üzere x_n^j ile n . özfonksiyonlarının j . nodal noktası tanımlansın.

Lemma 4.1. Kabul edelim ki $M(x, t) \in W_1^2(D_v)$ olsun. Bu durumda

$$\omega = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt$$

olmak üzere

$$x_n^{j_n} = \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi}{\rho_n} + \frac{1}{2\rho_n^2} \int_0^{x_n^{j_n}} [1 + \cos(2\rho_n t)] q(t) dt + o\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right) \quad (2.4.1)$$

ve

$$\begin{aligned}
l_j^n &= x_n^{j+1} - x_n^j = \frac{\pi}{\rho_n} + \frac{1}{2\rho_n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} [1 + \cos(2\rho_n t)] q(t) dt + o\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right) \\
&= \frac{\pi}{n} + \frac{1}{2n^2} \int_{x_n^j}^{x_n^{j+1}} [1 + \cos(2\rho_n t)] q(t) dt + o\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

dır.

İspat: (2.4.1) deki $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonun asimtotik formu Sturm- Liouville operatör sınıfındaki fonksiyonlar ile aynı olduğundan, (2.4.1) ve (2.4.2)'yi kullanarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

(2.4.1) den, eğer $\varphi(x, \lambda)=0$ ise,

$$\cot(\rho x) \left(1 + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = -\left(\frac{1}{2\rho} \int_0^x q(t) [1 + \cos(2\rho t)] dt\right) + o\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \tag{2.4.3}$$

olur. $\lambda = \lambda_n$, $x = x_n^j$, olarak alınırsa, $\rho_n x_n^j = \left(j - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n^j$ ifadesi (2.4.3)'de yerine yazılırsa

ve tekrar Taylor açılımını kullanarak

$$\left(\varepsilon_n^j + O\left((\varepsilon_n^j)^3\right)\right) \left(1 + o\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\right) = \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{1}{2} \int_0^{x_n^j} q(t) [1 + \cos(2\rho_n t)] dt\right) + o\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\varepsilon_n^j = \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{1}{2} \int_0^{x_n^j} q(t) [1 + \cos(2\rho_n t)] dt\right) + o\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right) \tag{2.4.4}$$

dır.

Teorem 4.2. x , $[0, \pi]$ ' nin yoğun bir alt kümesi olsun. Herhangi $x \in [0, \pi]$ noktası için, $n \rightarrow \infty$ iken X ' e yakınsayan bir $\{x_n^{j_n}\} \subset X$ alt dizi bulabiliriz. Böylece

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n x_n^{j_n} - \left(j_n - \frac{1}{2} \right) \pi \right) n \tag{2.4.5}$$

limit mevcuttur ve $[0, \pi]$ aralığında

$$q(x) = 2\rho'(x) + \frac{2}{\pi} \left(g(0) - g(\pi) + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right) \tag{2.4.6}$$

dır.

İspat: λ_n ' e karşılık gelen bir özfonksiyonu $\varphi(x, \lambda_n)$ olduğunda (2.2.1) ' den

$$\rho_n x_n^j = \pi \left(j - \frac{1}{2} \right) + o(1), \quad \rho_n = \sqrt{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.4.7)$$

yazılır. (2.4.6) ve (2.2.1) ' den ve x yerine x_n^j , ρ yerine ρ_n yazılırsa

$$0 = \varphi(x_n^j, \lambda_n) \quad (2.4.8)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \rho_n x_n^j + \frac{\sin \rho_n x_n^j}{\rho_n} \left(\frac{1}{2} \int_0^{x_n^j} q(t) dt \right) \\ &+ \frac{1}{2\rho_n} \int_0^{x_n^j} \sin[\rho_n (x_n^j - 2t)] q(t) dt \\ &+ \frac{1}{\rho_n} \int_0^{x_n^j} \cos(\rho_n t) dt \int_j^{x_n^j} M(\xi, t) \sin[\rho_n (x_n^j - \xi)] d\xi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

elde edilir. (2.4.5) ifadesi, $\sin \rho_n x_n^j$, ($\sin \rho_n x_n^j \neq 0$) ile bölünürse

$$\begin{aligned} 0 &= \cot(\rho_n x_n^j) + \frac{1}{2\rho_n} \int_0^{x_n^j} q(t) dt + \frac{1}{2\rho_n} \int_0^{x_n^j} \frac{\sin[\rho_n (x_n^j - 2t)]}{\sin(\rho_n x_n^j)} q(t) dt \\ &+ \frac{1}{\rho_n \sin(\rho_n x_n^j)} \int_0^{x_n^j} \cos(\rho_n t) dt \int_t^{x_n^j} M(\xi, t) \sin[\rho_n (x_n^j - \xi)] d\xi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

elde edilir. Burada Taylor formülü uygulanıp ve (2.2.7) ile bu son eşitlik birleştirilirse

$$\rho_n x_n^j = \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{1}{2\rho_n} \int_0^{x_n^j} q(t) dt + \frac{1}{\rho_n} \tilde{\varepsilon}_n^j \quad (2.4.11)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan $n \rightarrow \infty$ iken $\tilde{\varepsilon}_n^j = o(1)$ dır. (2.2.7) ifadesinde, $\lambda = \lambda_n$ alınırsa

$$0 = -\rho_n \sin \rho_n \pi + \omega \cos \rho_n \pi + r(\rho_n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve Taylor açılımı tekrar uygulanırsa

$$0 = -\rho_n (\rho_n - n) \pi + \omega + (-1)^n r(\rho_n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ iken $r(\rho_n) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n - n) \rho_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right) \quad (2.4.12)$$

olur. (2.2.12) den

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{\rho_n}{n} \rightarrow 1$$

şeklindedir. Eğer x sabitlenir

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{j_n \pi}{n} \rightarrow x, \left(\frac{j_n \pi}{n} \neq x \right)$$

olacak şekilde bir dizi seçilirse

$$\frac{\rho_n}{n} x_n^{j_n} = \frac{j_n \pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir. Bu durumda, indekslerin seçilen bir alt kümesi için,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n^{j_n} \rightarrow x \quad (2.4.13)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için

$$\left(\left(\rho_n x_n^{j_n} - \left(j_n - \frac{1}{2} \right) \pi \right) + x_n^{j_n} (n - \rho_n) \right) \rho_n$$

dizisini ele alalım. (2.4.11), (2.4.12) ve (2.4.13)'ü kullanarak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\rho_n x_n^{j_n} - \left(j_n - \frac{1}{2} \right) \pi \right) + x_n^{j_n} (n - \rho_n) \right) \rho_n = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt - \frac{x}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right) \quad (2.4.14)$$

eşitliğini yazabiliriz. Öte yandan (2.4.10)'nun limiti alınır,

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n x_n^{j_n} - \left(j_n - \frac{1}{2} \right) \pi \right) n \quad (2.4.15)$$

dır. Böylece

$$g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt - \frac{x}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right) \quad (2.4.16)$$

ve $g(x) \in [0, \pi]$ dır. $g(0) = 0$, $g(\pi) = 0$ olduğu açıktır. Böylece (2.4.7) ispatlanmış olur.

(2.4.16)'nın diferansiyelinden

$$g'(x) = \frac{1}{2}q(x) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right) \quad (\forall x \in [0, \pi])$$

yazılır. Böylece (2.4.6) ispatlanmış olur.

Kaynaklar

- [1] C. K. Law, C. L. Shen and C. F. Yang, The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems* 15 (1999), No. 1, 253-263.
- [2] C. K. Law, C. L. Shen and C. F. Yang, Erratum: The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems* 17 (2000), No. 2, 361-363.
- [3] Y. V. Kuryshova, Inverse spectral problem for integro-differential operators, *Mathematical Notes* 81 (2007), No. 6, 767-777.
- [4] J. R. McLaughlin, Inverse theory Using Nodal Points as Data A Uniqueness Result, *Differential Equations* 73 (1988), No. 2, 354-362.
- [5] V. Yurko, Inverse problem for integro-differential operators, *Math. Notes* 50 (1991), No. 5, 1188-1197.
- [6] V. Yurko, Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, VSP, 2002. An inverse nodal problem for integro-differential operators Received March 11, 2009.
- E. Kreyzig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, 1998.
- [7] F.V Atkinson, *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Pres, New York (1964).
- [8] C.L. Shen, On the nodal sets of the eigen funcutions of the string equation, *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988), 1419-1424
- [9] E.S. Panakhov, H. Koyunbakan, Inverse Nodal Problems for Second order Differential Operators with a Regular Singularity, *Int. J. of Difference Equation*, Vol: 1 No: 2 (2006), pp. 241–247
- [10] Etibar S. Panakhov, Emrah Yilmaz and Hikmet Koyunbakan, Inverse Nodal Problem for Dirac Operator, *World Applied Sciences Journal*, Vol: 11 No: 8, 2010
- [11] Hikmet Koyunbakan Etibar S. Panakhov, Solution of Discontinuous Inverse nodal problem on a finite interval, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol 44(1-2),2006, 204-209

Özgeçmiş

Faruk ERİNCİ

Adres : Şık Şık mah. Şık Şık 1. Sok Hacıhalil apt. kat.2 no.8 Merkez/ MALATYA

Gsm : (506) 856 16 43

Ev : (422) 323 61 98

E-mail : farukerinci@hotmail.com

Kişisel bilgilerim

Uyruğum :T.C.

Doğum Yerim :Kahramanmaraş

Doğum Tarihim :15/01/1984

Askerlik Durumum :Yapılmadı

Medeni Durumum :Evli

Kariyer hedefim

İlkokul birinci sınıftan beri ilginç bir merak duygusu ile başlayan Matematik merakım üniversitede Matematik okumama vesile oldu. Amacım sadece bir iş sahibi olmak değil, aynı zamanda gelecek adına Matematik alanlarında insanoğlu için yararlı bir şeyler yapabilmeyi hedeflemek oldu.

Çünkü gelecekte daima Matematik; bilgi, bilişim ve teknoloji sektöründe olmaya devam edecek. İşte bu yüzden inandığım bir gerçektir ki; “başarı ve gelecek bilgi ile değil, bilgiye sahip olan beyni yönetebilmekle edinilir. “ Ben bu başarıya, azme ve güce sahip olduğuma inanıyorum. “

Eğitim Bilgileri

- **Yüksek lisans** **Fırat üniversitesi – Elazığ**
Analiz fonksiyonlar teorisi 09/2009 – ...
- **Üniversite** **İnönü Üniversitesi – Malatya**
Matematik 09/2003 – 06/2007
- **Lise** **Çağlayancerit Lisesi – Kahramanmaraş**
Matematik – Fen 09/1999 – 06/2002
- **Ortaokul** **Çağlayancerit Merkez –Kahramanmaraş**
09/1996 – 06/1999
- **İlkokul** **Aksu İlkokulu – Kahramanmaraş**
09/1991 – 06/1996

İş Deneyimim

- **2007/2009** **Osmaniye**
- **2009/2010** **Diyarbakır**
- **2010/2012** **Malatya**

Pozisyon : Dershane Matematik Öğretmeni

İlgi alanlarım

Matematik, Bilişim Teknolojilerini takip ederim,
Sağlıklı yaşam ile ilgili konuları takip ederim,
Kişisel Gelişim ile ilgili konuları severim,
Yabancı Müzik (Genel Alanlarda) dinlemeyi severim.