

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLL DENKLEMİNİN SPEKTRAL TEORİSİNİN DÜZ VE TERS
PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Münevver AYDIN

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Etibar PENAHOV

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

HİLL DENKLEMİNİN SPEKTRAL TEORİSİNİN DÜZ VE TERS
PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Münevver AYDIN

Bu tez,..... tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

Üye: Prof.Dr.Necdet BİLDİK

Üye: Prof.Dr.Abdulkadir YILDIZ

Üye: Prof.Dr. Doğan KAYA

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun...../...../..... tarih ve..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÖR

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarırmda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr. Etibar PENAHOV'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren Arş. Gör. Dr. Erdal BAŞ 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Münevver AYDIN

İÇİNDEKİLER

Teşekkür	
İçindekiler	I
Simgeler Listesi	II
Özet	III
Abstract	IV
Giriş	1
1.TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
2 HİLL DENKLEMİNİN GENEL TEORİSİ	
2.1. Floquet Teorisi	12
2.2. t-Periyodik Sınır Değer Problemi	26
2.3. İntegral Operatörler Yöntemi, Green Fonksiyonu	31
2.4. Kararlılık, Kararsızlık Bölgeleri	44
3.HİLL DENKLEMİ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM	
3.1. Periyodik Problemler İçin Hochstadt Teoremi	57
4. HİLL OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN ESAS İNTEGRAL DENKLEMİNİN GENEL DEJENERELİĞİ	
4.1. $K(x,t)$ ve $F(x,t)$ nin Genel Dejenereliği	69
4.2. Tek Spektrum Durumunda Ters Problem	80
KAYNAKLAR	86

SİMGELER LİSTESİ

H	:	Hilbert Uzayı
$L_2[a, b]$	:	Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$o(1)$	:	Sonsuz küçük değerler
φ_n	:	Özfonksiyonu
λ	:	Özdeğeri
$K(x, \xi)$	:	Çekirdek fonksiyonu
$q(x)$	:	Potansiyel fonksiyonu
$\rho(\lambda)$	:	Spektral fonksiyonu
$G(x, \xi)$	:	Green fonksiyonu

ÖZET

Doktora Tezi

HİLL DENKLEMİNİN SPEKTRAL TEORİSİNİN DÜZ VE TERS PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Münevver AYDIN

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, sayfa:88

Bu tez çalışması önbilgiler giriş, kaynaklar ve ayrıca 4 ayrı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde sıkça kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde Hill Denklemi tanımlanarak, bu denklem için periyodik çözümlerin varlığı, bu çözümlerin sınırlılık durumu, kararlı, kararsız, koşullu kararlı olma kavramları ve bu kavramlarla $F(\lambda)$ diskriminantı arasındaki ilişki incelendi. Sonra t -periyodik sınır değer problemi ele alınarak özdeğer, özfonksiyon kavramları incelenip, Green fonksiyonu ve integral operatörler yöntemi verilerek periyodik ve anti-periyodik sınır değer problemlerinin sayılabilir sayıda özdeğerlerinin varlığı gösterildi, ardından $F(\lambda)$ fonksiyonunun gerekli özellikleri ispatlanarak bu fonksiyonun grafiği çizildi.

Üçüncü bölümde Hill denklemi için kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problemin çözümü yapıldı, periyodik problemler için Hochstadt teoremi ispatlandı.

Dördüncü bölümde Hill operatörü için ters problemin esas integral denkleminin genel dejenereliği gösterildi ve simetrik potansiyel durumunda tek spektruma göre ters problemin çözümü incelendi.

Anahtar Kelimeler: Sturm Liouville denklemi, özdeğer, özfonksiyon, kararlılık, kararsızlık, periyodik fonksiyon, Hill denklemi, çekirdek fonksiyonu, dönüşüm operatörü, genel dejenere, potansiyel, spektrum, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar.

ABSTRACT

PhD Thesis

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS ON SPECTRAL THEORY OF HILL EQUATION

Münevver AYDIN

Firat University

Institute of Applied Science

Department of Mathematics

2007, pages: 88

This thesis essentially consist of four parts.

In the first chapter, some basic definitions and theorems are presented which are commonly used in spectral theory of differential operations.

In the second chapter, the stability, instability, conditional stability concepts, existence of periodic solutions and bounded case of this solutions and $F(\lambda)$ with this concepts are examined for Hill equation. And, then the eigenvalue and eigenfunction concepts for the t -periodic boundary value problem are investigated. After these, by using the Green function and the integral operators method it is shown that the existence of countable many eigenvalues for the periodic and antiperiodic boundary value problems. Furthermore, by proving the necessary properties of the $F(\lambda)$ function and the graph of this function is drawn.

In the third chapter, the solution of inverse problem's is examined on two partially non coinciding spectra for Hill equation and Hochstadt Theorem is proved for periodic problems.

In the fourth chapter, the generalized degeneracy of the inverse problem of the fundamental integral equation is shown for Hill operator and in case of symmetric potential of single spectrum, the solution of inverse problem are solved.

Key Words: Sturm-Liouville equation, eigenvalue, eigenfunction, stability, instability, periodic function, Hill's equation, kernel function, translation operator, general degeneracy, potential, spectrum, spectral function, normalized numbers.

GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas problemleri aynı zamanda lineer cebir ve titreşim teorisinin de problemleridir. Lineer cebir problemleri ve titreşim problemleri arasındaki benzerliklerin tanımlanması çok eskilere dayanmaktadır. İntegral denklemler teorisiyle ilgili yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden yararlanan ilk bilim adamı Hilbert olmuştur.

Özellikle, l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır ve özellikle XIX.-XX. asırlarda bu konularda çalışan birçok matematikçi tarafından söz konusu teori oldukça geliştirilerek üst seviyelere ulaşmıştır. Bu çalışmalarda; özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırmacı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca, spektral teori için önemli yere sahip olan açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış, bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler diferensiyel operatörler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz noktaya sahip olan diferensiyel operatörlere singüler diferensiyel operatörler denir. İkinci mertebeden operatörler için spektral teori, günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G.D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde oldukça önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Riesz, J. von Neumann, K.O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi yapılandırılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E.C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bu-

lunmuştur. Bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B.M. Levitan tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiği ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M.S. Birman, M.Z. Salamyak, V.P. Maslov, M.V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Diferensiyel operatörler için ters problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

- 1) Hangi spektral verilere göre operatörü tanımlamak mümkündür,
- 2) Hangi spektral verilere göre operatör bire-bir olarak tanımlanmaktadır,
- 3) Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması yöntemlerinin verilmesidir.

Fizik ve tekniğin birçok problemleri periyodik katsayılı diferensiyel denklemlerin incelenmesini gerektiriyor. Böyle problemlerin bir kısmı hareketin kararlılığı, diğer kısmı da katı cisim fiziği örneğin; kristallerin kuantum mekaniği ile ilgilidir.

Periyodik katsayılı diferensiyel denklemler üzerine çok sayıda matematik ve fizik kaynakları vardır. İlk sonuçlar Floquet [1], Hill [2], Poincare [3], Liapounoff [4], Hamel [5], Haupt [6], Bloch [7], Kramers [8] ve başkaları tarafından elde edilmiştir.

1950 yıllarından başlayarak Krein [9] ve başkaları uygulamada çok karşılaşılan periyodik katsayılı adi diferensiyel denklemlerin Hamilton sistemini incelediler. Aynı zamanda Hill Denklemini için de Titchmarsh [10], Hochstadt [11], [12], Beketov [13] ve başkaları tarafından önemli sonuçlar elde edildi. Bu sonuçların büyük bir kısmı Magnus [14] ve Eastham [15] kitaplarında ifade edilmiştir.

1970 yıllarında Korteweg-de Vries tipli lineer olmayan kısmi türevli denklemler için başlangıç değeri periyodik fonksiyon olan Cauchy probleminin çözümlemesine uygulamak amacıyla periyodik katsayılı diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli gelişmeler oldu [16] – [22].

$$-y'' + q(x)y = \lambda p(x)y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

şeklindeki Sturm- Liouville denklemi, katsayıları periyodik olmak üzere aşağıdaki şartları sağlarsa bu denkleme Hill Denklemini adı verilir.

a) λ kompleks bir parametre, $p(x)$ ve $q(x)$, $-\infty < x < \infty$ ekseninde tanımlı, reel değerli, $w > 0$ periyotlu periyodik fonksiyonlardır. Yani,

$$p(x + w) = p(x), \quad q(x + w) = q(x)'dir.$$

b) $p(x) \geq p_o > 0$ ve $\int_0^w p(x)dx < \infty$, $\int_0^w |q(x)| dx < \infty$ dir.

(1) denkleminin yanısıra bu denklemle ilgili;

$$-y'' + q(x)y = \lambda p(x)y, \quad (0 \leq x \leq w) \quad (2)$$

$$y(0) = y(w), \quad y'(0) = y'(w)$$

periyodik ve

$$-y'' + q(x)y = \lambda p(x)y, \quad (0 \leq x \leq w) \quad (3)$$

$$y(0) = -y(w), \quad y'(0) = -y'(w)$$

anti-periyodik sınır değer problemini gözönüne alalım.

Eğer λ kompleks parametresinin ele alınan değerinde (2) veya (3) probleminin aşıkâr olmayan çözümünü varsa bu λ değerine (2) veya (3) probleminin özdeğeri denir.

Özdeğerlerin bulunması için, (1) denkleminin

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = 0$$

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1$$

başlangıç şartlarını sağlayan $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ çözümleri ele alınarak,

$$F(\lambda) = \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda)$$

fonksiyonu düzenlenebilir. Buradaki $F(\lambda)$ fonksiyonuna (1) Hill Denkleminin diskriminantı adı verilir.

(2) periyodik ve (3) anti periyodik sınır değer probleminin özdeğerleri sırasıyla

$$F(\lambda) = 2$$

ve

$$F(\lambda) = -2$$

denkleminin kökleri ile verilir. (2) ve (3) probleminin her biri sayılabilir sayıda özdeğerlere sahiptir ve bu özdeğerlerin yalnızca $+\infty$ noktasında yığılma noktası vardır.

$$\lambda_0 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \lambda_7 \leq \lambda_8 < \lambda_{11} \leq \lambda_{12} < \dots$$

ile (2) periyodik probleminin özdeğerlerini ve

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_5 \leq \lambda_6 < \lambda_9 \leq \lambda_{10} < \dots$$

ile (3) anti-periyodik probleminin özdeğerlerini gösterelim. Bu bağıntılarda eşitlik iki katlı özdeğerler için söz konusudur. Ayrıca,

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \lambda_5 \leq \lambda_6 < \dots$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Burada $(-\infty, \lambda_0)$, (λ_1, λ_2) , (λ_3, λ_4) , ... aralıklarına (1) denkleminin kararsızlık aralıkları denir. Bu aralıkların herhangi biri içinde bulunan bir λ değeri için (1) denkleminin bütün aşikar olmayan çözümleri sınırsızdır. $(-\infty, \lambda)$ aralığının dışında kararsızlık aralıklarının bir kısmı veya hepsi mevcut olmayabilir.

(λ_2, λ_3) , (λ_4, λ_5) , ... aralıklarına (1) denkleminin kararlılık aralıkları denir. Bu aralıkların herhangi biri içinde bulunan bir λ değeri için (1) denkleminin bütün çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlıdır.

Genel halde, yani; $p(x)$ keyfi fonksiyon ise λ_n özdeğerleri hakkında bunların varlığının dışında birşey söylemek mümkün değildir. Eğer $p(x)$ fonksiyonunun ikinci dereceden türevi varsa ve bu türev $(0, w)$ üzerinde integrallenebilirse o halde (1) denklemi Liouville dönüşümü altında

$$-u'' + Q(t)u = \lambda u$$

şeklindeki denkleme dönüştürülebilir ve bu denklemi kullanarak λ_n özdeğerleri için asimptotik formüller bulunabilir ve kararsızlık aralıklarının I_n uzunluklarının $n \rightarrow \infty$ olduğunda sıfıra gittiği elde edilir. Fakat $p(x)$ diferansiyellenebilir değilse Liouville dönüşümü uygulanmaz.

Böylece periyodik katsayılı diferensiyel operatörler için yapılan çalışmalara dayanarak bu çalışmada periyodik katsayılı problemler için kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem incelenmiş, ayrıca bu durumda ters problemin esas integral denklemi olan Gelfand-Levitan denkleminin genel dejenereliği gösterilmiştir.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1: K , $\mathbf{R}$ veya $\mathbf{C}$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun.

$\langle, \rangle: X \times X \longrightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse $\langle, \rangle$ 'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle, \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

$$\text{I. } \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\text{II. } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \alpha \in K$$

$$\text{III. } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$\text{IV. } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in X$$

Ayrıca,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

metriğine göre tam iç çarpım uzayına ise Hilbert uzayı denir [23].

Tanım 1.1.2: (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşüme operatör denir [23].

Tanım 1.1.3: (Lineer Operatör) E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olsun.

$A: E_x \rightarrow E_y$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa;

$$1) \ x_1, x_2 \in E_x, \ A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

$$2) \ A(\lambda x) = \lambda A(x), \ \lambda \in R,$$

A operatörüne lineerdir denir [23].

Tanım 1.1.4: (Operatörün Normu) X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L: D(L) \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer,

$$\|Lx\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [24].

Tanım 1.1.5: (Operatörün Mutlak Normu) H Hilbert uzayı ayrılabilir olsun. Bu uzayın her yerinde tanımlanan A operatörü için $\{f_k\}_1^\infty$ ve $\{e_i\}_1^\infty$ H hilbert uzayında iki keyfi ortonormalleştirilmiş bazlar olsun. A^* adjoint operatör olmak üzere $\{e_i\}$ bazında $\langle Af_k, e_i \rangle$ de Af_k vektörü Fourier katsayıları gibi gözönüne alınırsa;

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |(f_k, e_i)|^2 = \sum_{i,k=1}^{\infty} \|(A^*, e_i)\|^2, \quad (1.1.1)$$

$$\sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty} \|(A^*, e_i)\|^2} = N(A), \quad (1.1.2)$$

eşitliğini sağlayan $N(A)$ ya A operatörünün mutlak normu denir.

$$N(A^*) = N(A) \quad (1.1.3)$$

olduğundan (1.1.1) de f_1 yerine birim vektörünü alırsak ,

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_i)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2$$

elde ederiz. Böylece

$$\|Af_1\| \leq N(A)$$

olur. Bu durumda A nın normu $\|A\| \leq N(A)$ dır. Eğer C herhangi bir sınırlı operatör ise $N(CA) \leq \|C\| N(A)$ olur ve özel olarak üçgen eşitsizliğini de sağlar. Şimdi,

$$N(A + B) \leq N(A) + N(B)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için (1.1.2) den [25]

$$\begin{aligned} N(A + B) &= \sqrt{\|(Af_j, Bf_j)\|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (\|Af_j\| + \|Bf_j\|)^2} \end{aligned}$$

olur. Burada üçgen eşitsizliğini gözöntüne alırsak

$$\sqrt{\|(Af_j, Bf_j)\|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \|Af_j\|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \|Bf_j\|^2}$$

elde edilir. (1.1.2) den

$$N(A + B) \leq N(A) + N(B)$$

bulunur. Bu da istenendir.

$N(A)$ mutlak normu $\{f_k\}$ ve $\{e_i\}$ bazlarının seçiminden bağımsız olduğu için bu ifadeler denk alınabilir. Bu durumda $\{e_i\}$ bazında A operatörünü gösteren matris elemanları

$$(Ae_k, e_j) = a_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{j,k}| < \infty$$

şeklindeki sayılar olur. Bu nedenle sonlu mutlak normlu operatörler çok dar bir sınıf oluşturur. Bu operatörler

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{j,k}| < \infty$$

özelliğini sağlayan matris görüntüsü şeklinde olur [23].

Tanım 1.1.6: (Laplace, Schrödinger Operatörleri)

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

şeklinde tanımlanan operatöre Laplace operatörü,

$$L \equiv \Delta + V(r)$$

şeklinde tanımlanan operatöre Schrödinger operatörü,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v(x, y, z) u(x, y, z) = \lambda u(x, y, z)$$

denklemine de Schrödinger denklemi denir.

Tanım 1.1.7: (Özdeğer, Özfonksiyon) L operatörünün D tanım bölgesinde

$$Ly = \lambda y$$

olmak üzere $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut olacak biçimde λ 'ya L operatörünün özdeğeri denir ve $y(x)$ 'e ise λ özdeğerine karşılık gelen L operatörünün özfonksiyonu denir [23].

Tanım 1.1.8: ($L^2[a, b]$ uzayı) Aşağıdaki özelliği sağlayan elemanlardan oluşan uzaya $L^2[a, b]$ uzayı denir.

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty. \right\}$$

Bu uzay reel olarak gözüne alınırsa burada iç çarpım fonksiyonu

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x).g(x)dx$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(x)$ ve $g(x)$ reel fonksiyonlardır [23].

Tanım 1.1.9: (Hilbert-Schmitt Operatörü) $f \in L_2(-\infty, \infty)$ olmak üzere $K(t, s)$ çekirdek fonksiyonu için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(t, s)|^2 ds dt < \infty$$

olacak biçimde görüntüsü

$$g = kf = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) f(s) ds$$

şeklinde olan integral operatöre Hilbert-Schmitt operatörü denir [23].

Tanım 1.1.10: (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $T : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörü $\langle T_x, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ şartını sağlarsa T^* operatörüne T nin adjointi denir. Eğer $T = T^*$ ise T operatörüne self-adjoint operatör denir [23].

Tanım 1.1.11: (Sturm-Liouville Problemi) $p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

şeklinde tanımlı L operatörüne Sturm-Liouville operatörü,

$$Ly + \lambda s(x)y = 0$$

şeklinde tanımlı denkleme ise Sturm-Liouville diferensiyel denklemi denir. [25]

Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün, spektral özellikleri araştırılırken aşağıdaki üç sınır şartları göz önüne alınır.

I. Ayırık sınır şartları:

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0,$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0,$$

II. Periyodik ve antiperiyodik sınır şartları

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b),$$

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b),$$

III. Uçları sabitlenmis sınır şartları:

$$y(a) = y(b) = 0,$$

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Tanım 1.1.12: (Dönüşüm Operatörü) E lineer topolojik uzay, A ve B ise E den E ye tanımlanan iki lineer operatör olsun. Ayrıca

E_1 ve E_2 , E nin kapalı alt uzayları olsunlar.

$X : E_1 \rightarrow E_2$ operatörü,

1) X ve X^{-1} operatörleri E de sürekli,

2) $AX = XB$,

şartlarını sağlıyorsa böyle bir operatöre A ve B için dönüşüm operatörü denir [25].

Tanım 1.1.13: Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [26].

Tanım 1.1.14: Bir $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ye tam fonksiyon denir [26].

Teorem 1.1.1: $f(z)$ fonksiyonu G bölgesinde ve G nin sınırı olan Γ eğrisi üzerinde birebir ve analitik fonksiyon olduğunda

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

dır [26].

Tanım 1.1.15: (Kutup Noktası)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutbudur denir.

$\phi(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktası da dahil olmak üzere bu bölgenin her noktasında analitik ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \phi(z_0) \neq 0$$

ise $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında n . mertebeden bir kutba sahiptir denir [27].

Teorem 1.1.2: (Rezidü Teoremi) a_k ' lar bir C bölgesinde kutup yerleri olmak üzere

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Re } z f(z)$$

olur. Ayrıca

$$\text{Re } z f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} f(z) (z - a_i)^k \right]_{z=a_i}$$

dir [26].

Teorem 1.1.3: (Green Teoremi) B , xoy düzleminde bir bölge ve C de bu bölgeyi çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

dir [27].

Teorem 1.1.4: (Rouche Teoremi) Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ve G de $|g(z)| < f(z)$ ise bu takdirde $f(z) + g(z)$ ve $f(z)$ nin G içerisindeki sıfırlarının sayısı aynıdır [28].

Tanım 1.1.16: (Genel Dejenerelik) $s \leq x$ olacak şekilde

$$K(x, s) = \sum_{n=0}^N c_n f_n(x) g_n(s)$$

ise $K(x, s)$ fonksiyonu genel dejeneredir [25].

Teorem 1.1.5: (Hochstadt Teoremi)

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad 0 < x < 1$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad (1.1.5)$$

$$y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0, \quad (1.1.6)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (1.1.6) yerine

$$y(1) \cos \gamma + y'(1) \sin \gamma = 0 \quad (1.1.7)$$

alınmasıyla elde edilen yeni problemin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Diğer taraftan

$$\tilde{L} y = -u'' + \tilde{q}(x)y, \quad (1.1.8)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad (1.1.9)$$

$$y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0, \quad (1.1.10)$$

probleminin spektrumu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (1.1.8) denklemi, (1.1.9) ve (1.1.7) şartları ile oluşan probleminin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ olsun. Ayrıca; $\Lambda_0 \tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i$ şartını sağlayan sonlu i lerin cümlesi Λ ise $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ şartını sağlayan sonsuz i lerin cümlesi olsun. Bu durumda

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)'$$

dir. Ayrıca Λ_0 boş ise $q = \tilde{q}$ dir [29].

Teorem 1.1.6: (Levitan Teoremi) $\left\{\tilde{\lambda}_n\right\}_0^\infty$ ve $\left\{\lambda'_n\right\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\left\{\tilde{\lambda}_n\right\}_0^\infty$ ve $\left\{\tilde{\lambda}'_n\right\}_0^\infty$ spektrumları ile sonlu $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\tilde{\lambda}_n \neq \tilde{\lambda}'_n$ ve $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}'_n$ olsun. Bu takdirde ters problemin temel integral denklemi,

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^{\infty} K(x, s) F(s, t) ds = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

genel dejenere'dir [30].

Tanım 1.1.17: (Stieltjes Dönüşüm Formülü)

$\sigma(\lambda) = \sigma_1(\lambda) + i\sigma_2(\lambda)$ doğru eksenin tamamında sınırlı varyasyonlu kompleks fonksiyon olsun. Dolayısıyla $\sigma_1(\lambda)$ ve $\sigma_2(\lambda)$ reel fonksiyonları sınırlı varyasyonlara sahiptirler.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z - \lambda}$$

olmak üzere Stieltjes dönüşüm formülü $\sigma(\lambda)$ nın $\varphi(z)$ ile ifade edilmesi yöntemini gösterir.

$z = \sigma + i\tau$ olacak biçimde

$$\psi(\sigma, \tau) = \frac{\operatorname{sgn} \tau}{\pi} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z})}{2i} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau| d\sigma(\lambda)}{(\lambda - \sigma)^2 + \tau^2}$$

dir [31].

Teorem 1.1.7: a ve b noktaları $\sigma(\lambda)$ fonksiyonunun süreklilik noktaları ise

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_a^b -\psi(\sigma, \tau) d\sigma$$

dir [31].

Tanım 1.1.18: $x \rightarrow \infty$ iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ ifadesi sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak ifade edilir [25].

Tanım 1.1.19: (Tam Fonksiyonun Mertebesi) Bir $f(z)$ fonksiyonuna karşılık A ve a pozitif sayıları bulunabiliyorsa, öyle ki $r = |z| \rightarrow \infty$

$$|f(z)| < Ae^{r^a}$$

ise $f(z)$ fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur, a sayılarının en küçüğüne ρ dersek ρ ya tam fonksiyonun mertebesi denir [32].

2.HİLL DENKLEMİNİN GENEL TEORİSİ

2.1.Floquet Teorisi.

λ kompleks bir parametre, $p(x), q(x)$ $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli $w > 0$ için w periyotlu fonksiyonlar yani $p(x+w) = p(x)$, $q(x+w) = q(x)$, ayrıca p_0 sabit pozitif bir sayı olacak şekilde $p(x) \geq p_0 > 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$ için ve $\int_0^w p(x)dx < \infty$, $\int_0^w |q(x)| dx < \infty$ olsun.

$$-y'' + q(x)y = \lambda p(x)y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.1.1)$$

diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Bu şartlarla tanımlanan (2.1.1) denklemin Hill denklemini denir.

Teorem 2.1.1: (Varlık ve Teklik Teoremi) $x_0 \in (-\infty, \infty)$, c_0 ve c_1 sabit sayılar olmak üzere (2.1.1) denkleminin,

$$y(x_0, \lambda) = c_0, \quad y'(x_0, \lambda) = c_1 \quad (2.1.2)$$

şartlarını sağlayan tek bir çözümü vardır.

Tanım 2.1.1. $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$ fonksiyonlarının Wronskiyanı,

$$W[y(x, \lambda), z(x, \lambda)] = y(x, \lambda) z'(x, \lambda) - y'(x, \lambda) z(x, \lambda)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.1.1: (2.1.1) denkleminin herhangi iki çözümünün Wronskiyanı x 'e bağlı değildir.

İspat: $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$, (2.1.1) denkleminin herhangi iki çözümü olsun. Yani,

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda p(x) y \\ -z'' + q(x)z &= \lambda p(x) z \end{aligned}$$

olsun. Birinci denklemi z ile, ikinci denklemi y ile çarpıp farkını alırsak

$$z''y - y''z = 0$$

buluruz. Bu durumda $\{z'y - zy'\}' = 0$ olduğundan $W[y, z]$ sabittir.

Lemma 2.1.2: (2.1.1) denkleminin herhangi iki $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$ çözümlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart, onların Wronskiyanının sıfırdan farklı olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow W[y(x, \lambda), z(x, \lambda)] \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$ çözüm fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım, yani $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$ lineer bağımlı olsun. Dolayısıyla c ve d sabitler olmak üzere $y(x, \lambda) = c z(x, \lambda)$ veya $z(x, \lambda) = d y(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde

$$W[y(x, \lambda), z(x, \lambda)] = W[cz(x, \lambda), z(x, \lambda)] = cW[z(x, \lambda), z(x, \lambda)] = 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $z(x, \lambda) = d y(x, \lambda)$ alırsak yine çelişki elde edilir.

$\Leftarrow$: $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$, (2.1.1) denkleminin herhangi iki lineer bağımsız çözümü olsun. Onların Wronskiyanının sıfırdan farklı olduğunu gösterelim:

Tekrar aksini varsayalım, yani; $W[y(x, \lambda), z(x, \lambda)] = 0$ olsun. $x_0 \in (-\infty, \infty)$ noktasını ele alarak a_1 ve a_2 sayılarına göre aşağıdaki denklem sistemini gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} a_1 y(x_0, \lambda) + a_2 z(x_0, \lambda) &= 0 \\ a_1 y'(x_0, \lambda) + a_2 z'(x_0, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Varsayım üzerine,

$$\begin{vmatrix} y(x_0, \lambda) & z(x_0, \lambda) \\ y'(x_0, \lambda) & z'(x_0, \lambda) \end{vmatrix} = W[y(x_0, \lambda), z(x_0, \lambda)] = 0$$

olur. Determinant sıfır olduğundan sistemin sıfırdan farklı en az bir a_1, a_2 çözümü vardır. Sıfırdan farklı bu a_1, a_2 çözümünü ele aldığımızda

$$v(x, \lambda) = a_1 y(x, \lambda) + a_2 z(x, \lambda)$$

(2.1.1) denkleminin çözümü olur.

$$v(x_0, \lambda) = 0, \quad v'(x_0, \lambda) = 0$$

olduğundan varlık ve teklik teoremine göre

$$a_1 y(x, \lambda) + a_2 z(x, \lambda) = 0$$

bulunur. Burada a_1, a_2 lerden en az biri sıfırdan farklıdır. Böylece $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$ lineer bağımlı olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde Wronskian sıfır olamaz.

Lemma 2.1.3: (2.1.1) denkleminin iki tane lineer bağımsız çözümü her zaman vardır. Bu denklemin herhangi çözümü ise adı geçen çözümlerin lineer kombinasyonu şeklinde gösterilir.

İspat:

$$\begin{aligned} y(x_0, \lambda) &= 1, & y'(x_0, \lambda) &= 0 \\ z(x_0, \lambda) &= 0, & y'(x_0, \lambda) &= 1 \end{aligned}$$

başlangıç şartlarıyla verilen $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$ çözümleri (2.1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu takdirde $\varphi(x, \lambda)$, (2.1.1) denkleminin herhangi bir çözümü olacak biçimde, $\varphi(x, \lambda)$ nın $y(x, \lambda)$ ile $z(x, \lambda)$ nın lineer birleşimi olarak yazılabileceğini gösterelim. $x_0 \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere, c_1 ve c_2 ye göre

$$\begin{aligned} c_1 y(x_0, \lambda) + c_2 z(x_0, \lambda) &= \varphi(x, \lambda) \\ c_1 y'(x_0, \lambda) + c_2 z'(x_0, \lambda) &= \varphi'(x, \lambda) \end{aligned}$$

denklem sistemini ele alalım. Burada c_1 ve c_2 bulunması gereken çözümlerdir.

$$\begin{vmatrix} y(x_0, \lambda) & z(x_0, \lambda) \\ y'(x_0, \lambda) & z'(x_0, \lambda) \end{vmatrix} = W[y(x_0, \lambda), z(x_0, \lambda)] \neq 0$$

olduğundan sistemin bir c_1, c_2 çözümleri vardır. Bu çözümlerden faydalanarak,

$$y^*(x, \lambda) = c_1 y(x, \lambda) + c_2 z(x, \lambda)$$

fonksiyonunu oluşturalım. Bu fonksiyon (2.1.1) denkleminin bir çözümüdür.

$$y^*(x_0, \lambda) = \varphi(x_0, \lambda) \quad y'^*(x_0, \lambda) = \varphi'(x_0, \lambda)$$

olduğundan çözümün tekliği teoremi gereğince $y^*(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)$ olmalıdır. O halde

$$\varphi(x, \lambda) = c_1 y(x, \lambda) + c_2 z(x, \lambda)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.2: Eğer λ parametresinin bir sabit değerinde (2.1.1) denkleminin her çözümü $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlı ise (2.1.1) denklemi bu λ değeri için kararlıdır denir. λ noktasına da (2.1.1) denkleminin kararlılık noktası denir.

Tanım 2.1.3: Eğer λ parametresinin bir sabit değerinde (2.1.1) denkleminin sıfırdan farklı her çözümü $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırsız ise (2.1.1) denklemi bu λ değeri için kararsızdır denir. λ noktasına ise (2.1.1) denkleminin kararsızlık noktası denir.

Tanım 2.1.4: Eğer λ parametresinin bir sabit değerinde (2.1.1) denkleminin sıfırdan farklı en az bir çözümü $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlı ise (2.1.1) denklemi bu λ değeri için koşullu kararlıdır denir. λ noktasına ise (2.1.1) denkleminin koşullu kararlılık noktası denir.

Teorem 2.1.2: Her kompleks λ için

$$y(x+w, \lambda) = \beta y(x, \lambda), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.1.3)$$

olmak üzere $\exists \beta \in \mathbb{C}$ sayısı ve (2.1.1) denkleminin aşikar olmayan $y(x, \lambda)$ çözümü vardır.

İspat: Teoremi ispatlamak için (2.1.1) denkleminin bir temel çözümler sistemini alalım. Dolayısıyla böyle çözümler sırasıyla,

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1$$

koşullarını sağlayan $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonları olsunlar.

$$W[\theta(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] = \theta(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) - \theta'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda)$$

ve

$$W[\theta(0, \lambda), \varphi(0, \lambda)] = \theta(0, \lambda) \varphi'(0, \lambda) - \theta'(0, \lambda) \varphi(0, \lambda) = 1 \neq 0$$

olduğu için $\theta(x, \lambda)$, $\varphi(x, \lambda)$ nın (2.1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri oldukları açıktır. O halde c_1 ve c_2 ler sabitler olmak üzere (2.1.1) denkleminin herhangi $y(x, \lambda)$ çözümünün görüntüsü,

$$y(x, \lambda) = c_1 \theta(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda) \quad (2.1.4')$$

olur. c_1 ve c_2 sabitlerini $y(x, \lambda)$, (2.1.3) özelliğini sağlayacak şekilde seçersek,

$$c_1 \theta(x+w, \lambda) + c_2 \varphi(x+w, \lambda) = \beta [c_1 \theta(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda)] \quad (2.1.5)$$

olur. $\theta(x+w, \lambda)$ ve $\varphi(x+w, \lambda)$ (2.1.1) denkleminin çözümüdür. Bu sebeple $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ler sabitler olmak üzere,

$$\theta(x+w, \lambda) = a_{11} \theta(x, \lambda) + a_{12} \varphi(x, \lambda) \quad (2.1.6)$$

$$\varphi(x+w, \lambda) = a_{21} \theta(x, \lambda) + a_{22} \varphi(x, \lambda)$$

sistemini oluşturabiliriz. (2.1.6) formülünün katsayılarını (2.1.4) eşitliklerinden yararlanarak bulabiliriz.

$$a_{11} = \theta(w, \lambda), \quad a_{12} = \theta'(w, \lambda) \quad (2.1.7)$$

$$a_{21} = \varphi(w, \lambda), \quad a_{22} = \varphi'(w, \lambda)$$

(2.1.6) yı (2.1.5) in sol tarafında yerine yazarsak,

$$c_1 [a_{11} \theta(x, \lambda) + a_{12} \varphi(x, \lambda)] + c_2 [a_{21} \theta(x, \lambda) + a_{22} \varphi(x, \lambda)] = \beta [c_1 \theta(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda)]$$

bulunur. Buradan

$$(c_1 a_{11} + c_2 a_{21} - \beta c_1) \theta(x, \lambda) + (c_1 a_{12} + c_2 a_{22} - \beta c_2) \varphi(x, \lambda) = 0$$

elde edilir. $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ lineer bağımsız çözümler oldukları için

$$(a_{11} - \beta) c_1 + a_{21} c_2 = 0 \quad (2.1.8)$$

$$a_{12} c_1 + (a_{22} - \beta) c_2 = 0$$

yazılır. c_1 ve c_2 , (2.1.8) in çözümü ise o zaman (2.1.4') eşitliği ile tanımlanan $y(x, \lambda)$ fonksiyonu (2.1.1) denkleminin (2.1.3) özelliğini sağlayan bir çözümü olur. Bu özelliği sağlayan aşikar çözüm vardır. Biz c_1 ve c_2 nin en az birinin sıfırdan farklı olmasını istiyoruz. Sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için sistemin determinantı sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \beta & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \beta \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan

$$\beta^2 - (a_{11} + a_{22})\beta + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\beta^2 - (\theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda))\beta + \theta(w, \lambda)\varphi'(w, \lambda) - \theta'(w, \lambda)\varphi(w, \lambda) = 0$$

elde edilir.

$$F(\lambda) = \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) \quad (2.1.9)$$

olarak tanımlandığında

$$\beta^2 - F(\lambda)\beta + 1 = 0 \quad (2.1.10)$$

olup, buradan

$$\beta = \frac{F(\lambda) \pm \sqrt{F^2(\lambda) - 4}}{2} \quad (2.1.11)$$

elde edilir.

$(a_{11} - \beta)c_1 + a_{21}c_2 = 0$ denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır. $c_1 = 1$ olsun.

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\beta - a_{11}}{a_{21}} = \frac{\beta - \theta(w, \lambda)}{\varphi(w, \lambda)} = \frac{F(\lambda) - 2\theta(w, \lambda) \pm \sqrt{F^2(\lambda) - 4}}{2\varphi(w, \lambda)} \\ &= \frac{\varphi'(w, \lambda) + \theta(w, \lambda) \pm \sqrt{(\varphi'(w, \lambda) + \theta(w, \lambda))^2 - 4 - 2\theta(w, \lambda)}}{2\varphi(w, \lambda)}, \end{aligned}$$

$$m_1(\lambda) = \frac{\varphi'(w, \lambda) - \theta(w, \lambda)}{2\varphi(w, \lambda)} + \frac{\sqrt{(\varphi'(w, \lambda) + \theta(w, \lambda))^2 - 4}}{2\varphi(w, \lambda)},$$

$$m_2(\lambda) = \frac{\varphi'(w, \lambda) - \theta(w, \lambda)}{2\varphi(w, \lambda)} - \frac{\sqrt{(\varphi'(w, \lambda) + \theta(w, \lambda))^2 - 4}}{2\varphi(w, \lambda)}$$

olarak tanımlandığında (2.1.1) denkleminin (2.1.3) özelliğine sahip

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= \theta(x, \lambda) + m_1(\lambda)\varphi(w, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) &= \theta(x, \lambda) + m_2(\lambda)\varphi(w, \lambda) \end{aligned}$$

şeklinde çözümleri bulunur. Bununla ispat tamamlanmıştır.

Tanım 2.1.5: (2.1.9) formülü ile tanımlı $F(\lambda)$ fonksiyonuna (2.1.1) denkleminin Hill diskriminantı (veya Lyapunov fonksiyonu) denir.

Tanım 2.1.6: (2.1.10) denkleminin kökleri olan

$$\beta_1 = \beta_1(\lambda) = \frac{F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 4}}{2}, \quad \beta_2 = \beta_2(\lambda) = \frac{F(\lambda) - \sqrt{F^2(\lambda) - 4}}{2}$$

sayılarına (2.1.1) denkleminin çarpanları denir.

Lemma 2.1.1: $F^2(\lambda) \neq 4$ ise, birbirinden farklı β_1 ve β_2 çözümleri için

$$\begin{aligned} y_1(x + w, \lambda) &= \beta_1 y_1(x, \lambda) \\ y_2(x + w, \lambda) &= \beta_2 y_2(x, \lambda) \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır.

İspat: $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ çözümlerinin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim.

$$c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) = 0$$

eşitliğinde x yerine $x + w$ alırsak,

$$c_1 y_1(x + w, \lambda) + c_2 y_2(x + w, \lambda) = c_1 \beta_1 y_1(x, \lambda) + c_2 \beta_2 y_2(x, \lambda)$$

buluruz. Bu sebeple,

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) &= 0 \\ c_1 \beta_1 y_1(x, \lambda) + c_2 \beta_2 y_2(x, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Buradan $c_1 (\beta_1 - \beta_2) y_1(x, \lambda) = 0$ bulunur. Böylece $\beta_1 \neq \beta_2$ olduğu için $c_1 = 0$ dır. Benzer şekilde $c_2 = 0$ dır. O halde $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ nın lineer bağımsız olduğu görülür. (2.1.10) denkleminin her β kökünün sıfırdan farklı olduğu açıktır.

Tanım 2.1.7: $\beta_1 \neq 0$ ve $\beta_2 \neq 0$ olduğunda öyle $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ ve $\mu_2 = \mu_2(\lambda)$ olmak üzere $\beta_1 = e^{\mu_1(w)}$ ve $\beta_2 = e^{\mu_2(w)}$ olur. $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ ve $\mu_2 = \mu_2(\lambda)$ sayılarına (2.1.1) denkleminin karakteristik üsleri denir.

$\beta_1\beta_2 = 1$ olduğundan $\mu_2 = -\mu_1$ kabul edebiliriz. Böylece $\exists \mu = \mu(\lambda)$ için $\beta_1 = e^{\mu(w)}$ ve $\beta_2 = e^{-\mu(w)}$ (*) elde edilir.

$$\begin{aligned}\chi_1(x, \lambda) &= e^{-\mu(x)}y_1(x, \lambda) \\ \chi_2(x, \lambda) &= e^{\mu(x)}y_2(x, \lambda)\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 2.1.8: (Floquet Formülü) c_1 ve c_2 herhangi iki sabit sayı ve

$$y_1(x, \lambda) = e^{\mu(x)}\chi_1(x, \lambda), \quad y_2(x, \lambda) = e^{-\mu(x)}\chi_2(x, \lambda)$$

olmak üzere (2.1.1) denkleminin genel çözümünün görüntüsü

$$y(x, \lambda) = c_1 e^{\mu(x)}\chi_1(x, \lambda) + c_2 e^{-\mu(x)}\chi_2(x, \lambda)$$

olur. Bu formüle Floquet Formülü denir.

Teorem 2.1.3: $\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları x e göre w periyodiktir.

İspat: Gerçekten, (*) dan $\beta_1 = e^{\mu(w)}$ olduğunu kullanırsak,

$$\begin{aligned}\chi_1(x + w, \lambda) &= e^{-\mu(x+w)}y_1(x + w, \lambda) = e^{-\mu x} e^{-\mu w}\beta_1 y_1(x, \lambda) \\ &= e^{-\mu x} e^{-\mu w} e^{\mu w} y_1(x, \lambda) = \chi_1(x, \lambda)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\beta_2 = e^{-\mu(w)}$ olduğunu kullanırsak,

$$\begin{aligned}\chi_2(x + w, \lambda) &= e^{\mu(x+w)}y_2(x + w, \lambda) = e^{\mu x} e^{\mu w}\beta_2 y_2(x, \lambda) \\ &= e^{\mu x} e^{\mu w} e^{-\mu w} y_2(x, \lambda) = \chi_2(x, \lambda)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3: (Floquet Teoremi)

a) $\lambda \in (-\infty, \infty)$ olsun.

i) $|F(\lambda)| > 2$ ise, (2.1.1) diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bütün çözümleri $(-\infty, \infty)$ da sınırsız ve (2.1.1) denklemi λ değeri için kararsızdır.

ii) $|F(\lambda)| < 2$ ise, (2.1.1) diferensiyel denkleminin bütün çözümleri $(-\infty, \infty)$ da sınırlı ve (2.1.1) denklemi bu λ değeri için kararlıdır.

iii) $|F(\lambda)| = 2$ ise, (2.1.1) diferensiyel denklemi,

$\theta'(w, \lambda) = \varphi(w, \lambda) = 0$ olacak şekilde kararlı, $\theta'(w, \lambda)$ ve $\varphi(w, \lambda)$ lardan en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde koşullu kararlı olur.

b) $\text{Im } \lambda \neq 0$ ise, bu λ değeri için (2.1.1) diferensiyel denklemi kararsızdır.

İspat: λ parametresinin reel değerlerini ele aldığımızda böyle λ değerleri için $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ reel değerli fonksiyon olur. Bu sebeple $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi'(x, \lambda)$ da reel değerli fonksiyon olur. Böylece $F(\lambda)$, λ parametresinin reel değerleri için reel değerli fonksiyon olur.

i) $F(\lambda) > 2$ ise $\beta_1 \neq \beta_2$ ve β_1, β_2 reeldir. Ayrıca $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ olur. $\mu \neq 0$ ve sadece reel olacak şekilde $\beta_1 = e^{\mu w}$, $\beta_2 = e^{-\mu w}$ olur. $e^{\mu x}$ ve $e^{-\mu x}$ sınırsız fonksiyonlar olduğundan her $x \in (-\infty, \infty)$ için

$$y_1(x, \lambda) = e^{\mu x} \chi_1(x, \lambda) \quad \text{ve} \quad y_2(x, \lambda) = e^{-\mu x} \chi_2(x, \lambda)$$

sınırsız fonksiyonlardır. Açık olarak $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ nın aşikar olmayan herhangi bir lineer birleşimi $x \rightarrow \infty$ ya da $x \rightarrow -\infty$ iken (ya da her ikisi iken) sınırsızdır.

$F(\lambda) < -2$ ise $\beta_1 \neq \beta_2$ ve $\beta_1 < 0$, $\beta_2 < 0$ olur. $\mu_0 \in (-\infty, \infty)$, $\mu_0 \neq 0$ olacak şekilde,

$$\beta_1 = e^{(\mu_0 + i\frac{\pi}{w})w}, \quad \beta_2 = e^{-(\mu_0 + i\frac{\pi}{w})w}$$

olur.

$e^{(\mu_0 + i\frac{\pi}{w})w}$ ve $e^{-(\mu_0 + i\frac{\pi}{w})w}$ sınırsız fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= e^{(\mu_0 + i\frac{\pi}{w})w} \chi_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) &= e^{-(\mu_0 + i\frac{\pi}{w})w} \chi_2(x, \lambda) \end{aligned}$$

fonksiyonları sınırsızdır. O halde λ , (2.1.1) denkleminin kararsızlık noktasıdır. Böylece (i) kısmı ispatlanır.

ii) $|F(\lambda)| < 2$ ise β_1 ve β_2 kompleks sayılar olur. $\overline{\beta_1} = \beta_2$ dir. $\beta_1 \beta_2 = 1$ olduğundan $|\beta_1| = |\beta_2| = 1$ bulunur. $\alpha \in (-\infty, \infty)$ reel sayısı için

$$\beta_1 = e^{i\alpha w}, \quad \beta_2 = e^{-i\alpha w}$$

olur.

$e^{i\alpha x}$ ve $e^{-i\alpha x}$ sınırlı fonksiyonlar olduğundan

$$y_1(x, \lambda) = e^{i\alpha x} \chi_1(x, \lambda) \quad \text{ve} \quad y_2(x, \lambda) = e^{-i\alpha x} \chi_2(x, \lambda)$$

fonksiyonları sınırlıdır.

$|y_k(x, \lambda)| = |\chi_k(x, \lambda)|$ ($k = 1, 2$) dir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} |y_1(x, \lambda)| &= |e^{i\alpha w} \chi_1(x, \lambda)| = |e^{i\alpha w}| |\chi_1(x, \lambda)| = |\cos \alpha x + i \sin \alpha x| |\chi_1(x, \lambda)| \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha x + \sin^2 \alpha x} |\chi_1(x, \lambda)| = |\chi_1(x, \lambda)| \end{aligned}$$

$$|y_2(x, \lambda)| = |e^{-i\alpha w} \chi_2(x, \lambda)| = |e^{-i\alpha w}| |\chi_2(x, \lambda)| = |\chi_2(x, \lambda)| \text{ dir.}$$

$\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlı ve w periyotludur. Buradan $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ $(-\infty, \infty)$ da sınırlıdır ve bundan dolayı onların bütün lineer kombinasyonları da sınırlıdır. Buradan λ , (2.1.1) denkleminin kararlılık noktasıdır. Böylece (ii) kısmı ispatlanır.

iii) $|F(\lambda)| = 2$ ise,

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \begin{cases} 1, & F(\lambda) = 2 \text{ ise} \\ -1, & F(\lambda) = -2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. (2.1.1) denkleminin $y_1(x + w, \lambda) = \beta y_1(x, \lambda)$ olacak şekilde en az bir $y_1(x, \lambda)$ çözümü vardır. (2.1.1) denklemi iki tane lineer bağımsız çözüme sahiptir. İkinci çözümün bazı hallerde sınırlı, bazı hallerde sınırsız olduğunu göstereceğiz.

$y_1(x, \lambda)$ ile lineer bağımsız olacak şekilde $y^*(x, \lambda)$, (2.1.1) denkleminin çözümü olsun. $y^*(x + w, \lambda)$ fonksiyonu da (2.1.1) in çözümü olduğu için d_1 ve d_2 sabitler olmak üzere

$$y^*(x + w, \lambda) = d_1 y_1(x, \lambda) + d_2 y^*(x, \lambda) \quad (2.1.12)$$

olur.

$$\begin{aligned} W[y_1(x + w, \lambda), y^*(x + w, \lambda)] &= W[y_1(x + w, \lambda), d_1 y_1(x, \lambda) + d_2 y^*(x, \lambda)] \\ &= d_1 W[y_1(x + w, \lambda), y_1(x, \lambda)] \\ &\quad + d_2 W[y_1(x + w, \lambda), y^*(x, \lambda)] \\ &= d_1 \beta W[y_1(x, \lambda), y_1(x, \lambda)] \\ &\quad + d_2 \beta W[y_1(x, \lambda), y^*(x, \lambda)] \end{aligned}$$

olduğundan

$$W[y_1(x + w, \lambda), y^*(x + w, \lambda)] = d_2 \beta W[y_1(x, \lambda), y^*(x, \lambda)]$$

elde edilir. Wronskiyan noktadan bağımsız olduğundan $d_2 \beta = 1$ bulunur. Böylece $\beta = d_2$ olduğundan

$$y^*(x+w, \lambda) = d_1 y_1(x, \lambda) + \beta y^*(x, \lambda) \quad (2.1.13)$$

elde edilir.

a) $d_1 = 0$ ise $y^*(x+w, \lambda) = \beta y^*(x, \lambda)$ olduğundan

$$|y^*(x+w, \lambda)| = |y^*(x, \lambda)|$$

elde edilir. $|y^*(x, \lambda)|$ periyodik bir fonksiyon olduğundan sınırlıdır. O halde λ kararlı bir noktadır.

b) $d_1 \neq 0$ olsun. $\beta = e^{\mu w}$ olmak üzere $\chi_1(x, \lambda) = e^{-\mu x} y_1(x, \lambda)$ alalım.

$$\mu = \begin{cases} 0, & F(\lambda) = 2 \text{ ise} \\ \frac{i\pi}{w}, & F(\lambda) = -2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\chi_2(x, \lambda) = e^{-\mu x} y^*(x, \lambda) - \frac{d_1}{w\beta} x \chi_1(x, \lambda)$$

olarak tanımlansın. $\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu periyodiktir. $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonunun periyodik fonksiyon olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \chi_2(x+w, \lambda) &= e^{-\mu(x+w)} y^*(x+w, \lambda) - \frac{d_1}{w\beta} (x+w) \chi_1(x+w, \lambda) \\ &= e^{-\mu x} e^{-\mu w} [d_1 y_1(x, \lambda) + \beta y^*(x, \lambda)] - \frac{d_1}{w\beta} x \chi_1(x, \lambda) - \frac{d_1}{\beta} \chi_1(x, \lambda) \\ &= e^{-\mu x} e^{-\mu w} d_1 y_1(x, \lambda) + e^{-\mu x} e^{-\mu w} \beta y^*(x, \lambda) - \frac{d_1}{w\beta} x \chi_1(x, \lambda) - \frac{d_1}{\beta} \chi_1(x, \lambda) \\ &= e^{-\mu w} d_1 \chi_1(x, \lambda) + e^{-\mu x} y^*(x, \lambda) - \frac{d_1}{w\beta} x \chi_1(x, \lambda) - \frac{d_1}{\beta} \chi_1(x, \lambda) \\ &= \frac{1}{\beta} d_1 \chi_1(x, \lambda) + e^{-\mu x} y^*(x, \lambda) - \frac{d_1}{w\beta} x \chi_1(x, \lambda) - \frac{d_1}{\beta} \chi_1(x, \lambda) = \chi_2(x, \lambda) \end{aligned}$$

(2.1.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü aşağıdadır;

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= e^{\mu x} \chi_1(x, \lambda) \\ y^*(x, \lambda) &= e^{\mu x} \left\{ \frac{d_1}{w\beta} x \chi_1(x, \lambda) + \chi_2(x, \lambda) \right\} \end{aligned}$$

Bu çözümlerden birincisi yani $y_1(x, \lambda)$ sınırlıdır., ikinci çözüm $y^*(x, \lambda)$ ise sınırsızdır. O halde λ , koşullu kararlı nokta olur.

Şimdi, $d_1 = 0 \iff \theta'(w, \lambda) = \varphi(w, \lambda) = 0$ olduğunu ispatlayalım:

$d_1 = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y^*(x+w, \lambda) &= \beta y^*(x, \lambda) \quad \text{ve} \\ y_1(x+w, \lambda) &= \beta y_1(x, \lambda) \end{aligned}$$

eşitliklerine sahibiz. O halde (2.1.1) denkleminin her çözümü bu özelliğe sahiptir. Özel olarak $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonları da bu özelliğe sahiptir. Böylece

$$\theta(x+w, \lambda) = \beta \theta(x, \lambda), \quad \varphi(x+w, \lambda) = \beta \varphi(x, \lambda), \quad \theta'(x+w, \lambda) = \beta \theta'(x, \lambda)$$

olur. $x = 0$ ise $\theta'(w, \lambda) = 0$, $\varphi(w, \lambda) = 0$ bulunur. Yani bu koşullar gerekli koşullardır.

Şimdi bu koşulların yeterli olduğunu gösterelim:

$\theta'(w, \lambda) = \varphi(w, \lambda) = 0$ olsun. Wronskiyanın değişkene bağlı olmamasından

$$\theta(w, \lambda) \varphi'(w, \lambda) - \theta'(w, \lambda) \varphi(w, \lambda) = 1$$

bulunur. Böylece $\theta(w, \lambda) \varphi'(w, \lambda) = 1$ elde edilir. $F(\lambda) = 2\beta$ ise,

$$\begin{aligned} \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) &= 2\beta \\ \theta(w, \lambda) [2\beta - \theta(w, \lambda)] &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$[\theta(w, \lambda) - \beta]^2 = 0$$

olacak biçimde

$$\theta(w, \lambda) = \beta \quad \text{ve} \quad \varphi'(w, \lambda) = \beta$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \theta(w, \lambda) &= \beta \theta(0, \lambda), \quad \varphi(w, \lambda) = \beta \varphi(0, \lambda) \\ \theta'(w, \lambda) &= \beta \theta'(0, \lambda), \quad \varphi'(w, \lambda) = \beta \varphi'(0, \lambda) \end{aligned}$$

olduğundan çözümün tekliği teoreminden

$$\theta(x+w, \lambda) = \beta \theta(x, \lambda), \quad \varphi(x+w, \lambda) = \beta \varphi(x, \lambda)$$

eşitlikleri elde edilir. $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(w, \lambda)$ lineer bağımsız çözümler olduğundan (2.1.1) denkleminin herhangi bir $y(x, \lambda)$ çözümü,

$$y(x + w, \lambda) = \beta y(x, \lambda)$$

özellikliğini sağlar. Özel olarak $y^*(x, \lambda)$ çözümü de

$$y^*(x + w, \lambda) = \beta y^*(x, \lambda)$$

eşitliğini sağlar. Sonuncu eşitliği (2.1.13) ile karşılaştırsak $d_1 = 0$ olur.

b) i) $F(\lambda)$ reel olsun. Bu halde λ nın kararsız olduğu daha sonra gösterilecektir.

ii) $F(\lambda)$ reel olmasın. Bu halde $F^2(\lambda) - 4 \neq 0$ ve $\beta_1 \neq \beta_2$ olur. Bu köklerin modülleri 1 den farklı olur. Çünkü $\beta_1 \beta_2 = 1$ eşitliğinden yararlanarak $\alpha \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $\beta_1 = e^{i\alpha}$ ve $\beta_2 = e^{-i\alpha}$ aldığımızda $F(\lambda) = \beta_1 + \beta_2 = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$ nın reel olduğu anlaşılır. Bu ise çelişkidir. Bu nedenle $\beta_1 = e^{\mu w}$, $\beta_2 = e^{-\mu w}$, $\text{Re } \mu \neq 0$ gösterimleri doğrudur. O halde (2.1.1) diferensiyel denkleminin

$$y_1(x, \lambda) = e^{\mu x} \chi_1(x, \lambda), \quad y_2(x, \lambda) = e^{-\mu x} \chi_2(x, \lambda)$$

şeklinde iki tane lineer bağımsız çözümü olur. $\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$, x e göre periyodik olduklarından $\text{Re } \mu \neq 0$ olduğunda her iki çözüm de sınırsızdır. O halde bu durumda diferensiyel denklem kararsızdır.

$q(x)$ fonksiyonunun çift olma durumu:

Eğer (2.1.1) de $q(x)$ fonksiyonu çift ise, yani;

$$q(x) = q(-x)$$

ise $x = \frac{\pi}{2}$ de ve $x = \pi$ de $\theta, \varphi, \theta', \varphi'$ değerleri arasında bağıntılar kurmak mümkündür. Bu bağıntılar periyodik çözümlerin daha ayrıntılı incelenmesini sağlar.

Teorem 2.1.4: $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$, (2.1.1) in çözümleri olsun ve $q(x) = q(-x)$ sağlansın. Bu takdirde

$$\theta(\pi, \lambda) = 2\theta\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) - 1 = 1 + 2\theta'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$$

$$\varphi(\pi, \lambda) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$$

$$\theta'(\pi, \lambda) = 2\theta'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \theta'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$$

$$\varphi'(\pi, \lambda) = \theta(\pi, \lambda)$$

bağıntıları sağlanır. Bütün hallerde $\theta(x) = \theta(-x)$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ dir.

İspat: Eğer $q(x)$ çift ise ve $y(x)$ (2.1.1) in bir çözümü ise bu takdirde $y(-x)$ de bir çözümdür. $\theta(-x)$ ve $\theta(x)$ aynı zamanda $\varphi(x)$ ve $-\varphi(-x)$ aynı başlangıç şartlara sahip olduğundan $\theta(x)$ in çift $\varphi(x)$ in tek olduğu görülür. Bundan dolayı $x = -\frac{\pi}{2}$ için

$$\theta(x + \pi) = \theta(\pi) \theta(x) + \theta'(\pi) \varphi(x) \quad (2.1.14)$$

$$\varphi(x + \pi) = \varphi(\pi) \theta(x) + \varphi'(\pi) \varphi(x) \quad (2.1.15)$$

den

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \theta(\pi) \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta'(\pi) \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.1.16)$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi(\pi) \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi'(\pi) \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.1.17)$$

bulunur. Açık olarak $\theta'(x)$ çift ve $\varphi'(x)$ tektir. (2.1.14) ve (2.1.15) eşitliklerinin her iki tarafı x 'e göre diferansiyellenip ve $x = -\frac{\pi}{2}$ alınrsa

$$\theta'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\theta(\pi) \theta'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta'(\pi) \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.1.18)$$

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\varphi(\pi) \theta'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi'(\pi) \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.1.19)$$

bulunur. (2.1.16) dan (2.1.19) a kadar olan eşitliklerden faydalanarak

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) - \theta'\left(\frac{\pi}{2}\right) \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

bulunur ki bu da bize teoremin ispatını vermiş olur.

Teorem 2.1.5: Eğer Teorem 2.1.4 ün şartları sağlanırsa bu takdirde (2.1.1) in aşıkâr olmayan periyodik bir çözümü mevcuttur.

- i) çift ve π periyotlu olması için gerek ve yeter şart $\theta'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ olmasıdır.
- ii) tek ve π periyotlu olması için gerek ve yeter şart $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ olmasıdır.
- iii) çift ve 2π periyotlu olması için gerek ve yeter şart $\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ olmasıdır.
- iv) tek ve 2π periyotlu olması için gerek ve yeter şart $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ olmasıdır.

Teorem 2.1.6: $q(x)$, π periyotlu sınırlı, integrallenebilir ve

$$\int_0^\pi q(x) dx = 0$$

şartını sağlayan bir fonksiyon, λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) değerleri $F(\lambda) = 2$ nin kökleri ve λ'_m ($m = 1, 2, \dots$) değerleri ise $F(\lambda) = -2$ nin kökleri olmak üzere,

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots$$

şeklinde sıralansın.

$$\sqrt{n}\varepsilon_n, \quad \sqrt{m}\varepsilon'_m$$

dizileri sınırlı olacak şekilde ε_n ve ε'_m negatif olmayan sayıların dizisi mevcuttur.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\lambda_{2n-1}} - 2n \right| &< \varepsilon_n, & \left| \sqrt{\lambda_{2n}} - 2n \right| &< \varepsilon_n \\ \left| \sqrt{\lambda'_{2m-1}} - (2m-1) \right| &< \varepsilon'_m, & \left| \sqrt{\lambda'_{2m}} - (2m-1) \right| &< \varepsilon'_m \end{aligned}$$

dir.

2.2. t- Periyodik Sınır Değer Problemi:

$p(x)$, $q(x)$, $[0, w]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar, t sabit bir reel sayı ve p_0 , $p(x) \geq p_0 \geq 0$, $\int_0^w p(x)dx < \infty$, $|q(x)| \leq c < \infty$ koşulları sağlanacak biçimde sabit bir sayı olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda p(x)y, \quad (0 \leq x \leq w) \quad (2.2.1)$$

$$y(w) = e^{it}y(0), \quad y'(w) = e^{it}y'(0) \quad (2.2.2)$$

problemini gözönüne alalım.

Tanım 2.2.1:

a) $t = 0$ olduğunda (2.2.1) - (2.2.2) problemine periyodik sınır değer problemi, (2.2.2) sınır koşullarına periyodik sınır koşulları denir.

b) $t = \pi$ olduğunda (2.2.1) - (2.2.2) problemine anti-periyodik sınır değer problemi, (2.2.2) sınır koşullarına anti-periyodik sınır koşulları denir.

c) Genel halde (2.2.1) - (2.2.2) problemine t -periyodik sınır değer problemi, (2.2.2) sınır koşullarına t -periyodik sınır koşulları denir.

Tanım 2.2.2: Eğer λ kompleks parametresinin bir sabit değerinde (2.2.1) -(2.2.2) probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa bu λ değerine (2.2.1) -(2.2.2) probleminin özdeğeri ve $y(x)$ fonksiyonuna da bu özdeğere karşı gelen özfonksiyonu denir.

Bu şekildeki probleme spektral problem, bu şekildeki λ ların kümesine ise spektrum denir.

Lemma 2.2.1: (2.2.1) - (2.2.2) probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: λ kompleks sayısı (2.2.1) - (2.2.2) probleminin bir özdeğeri, $y(x)$ fonksiyonu da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu takdirde (2.2.1.) in her ik tarafını $\bar{y}$ ile çarpıp, 0 dan w ya kadar integrallersek,

$$-\int_0^w y''(x) \overline{y(x)} dx + \int_0^w q(x) |y(x)|^2 dx = \lambda \int_0^w p(x) |y(x)|^2 dx$$

elde ederiz. Daha sonra birinci integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} -\int_0^w y''(x) \overline{y(x)} dx &= -y'(x) \overline{y(x)} \Big|_0^w + \int_0^w |y'(x)|^2 dx \\ &= -y'(w) \overline{y(w)} + y'(0) \overline{y(0)} + \int_0^w |y'(x)|^2 dx \\ &= -e^{it} y'(0) e^{-it} \overline{y(0)} + y'(0) \overline{y(0)} + \int_0^w |y'(x)|^2 dx = \int_0^w |y'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^w \left\{ |y'(x)|^2 + q(x) |y(x)|^2 \right\} dx = \lambda \int_0^w p(x) |y(x)|^2 dx$$

olur. Buradan

$$\lambda = \frac{\int_0^w \left\{ |y'(x)|^2 + q(x) |y(x)|^2 \right\} dx}{\int_0^w p(x) |y(x)|^2 dx}$$

elde edilir. Bu kesrin tanımlı olması için $\int_0^w p(x) |y(x)|^2 dx \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde, yani

$$\int_0^w p(x) |y(x)|^2 dx = 0$$

ise

$$p(x) |y(x)|^2 = 0$$

dolayısıyla

$$y(x) = 0$$

olur. Bu ise çelişkidir. O halde kesir tanımlıdır. Pay ve paydadaki ifadeler reel olduğundan λ reel olur.

Lemma 2.2.2: (2.2.1) - (2.2.2) probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz-fonksiyonlar $p(x)$ fonksiyonuna göre ortogonaldır. Bir başka ifadeyle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerler, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ de bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\int_0^w p(x) y_1(x) \overline{y_2(x)} dx = 0$$

olur.

İspat: Birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ olsun. O halde

$$-y_1'' + q(x)y_1 = \lambda_1 p(x)y_1, \quad (0 \leq x \leq w) \quad (2.2.3)$$

$$y_1(w) = e^{it}y_1(0), \quad y_1'(w) = e^{it}y_1'(0) \quad (2.2.3')$$

$$-y_2'' + q(x)y_2 = \lambda_2 p(x)y_2, \quad (0 \leq x \leq w) \quad (2.2.4)$$

$$y_2(w) = e^{it}y_2(0), \quad y_2'(w) = e^{it}y_2'(0) \quad (2.2.4')$$

denklemleri sağlanır. (2.2.3) denklemini $\overline{y_2}$ ile, (2.2.4) ün kompleks eşleniği ise y_1 ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve 0 dan w ya kadar integralenirse

$$\int_0^w \left[-y_1''(x) \overline{y_2(x)} + \overline{y_2''(x)} y_1(x) \right] dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^w p(x) y_1(x) \overline{y_2(x)} dx$$

elde edilir. Buradan ve (2.2.3') - (2.2.4') sınır koşullarından

$$\begin{aligned} \int_0^w \left[-y_1''(x) \overline{y_2(x)} + \overline{y_2''(x)} y_1(x) \right] dx &= \int_0^w \left[-y_1'(x) \overline{y_2'(x)} + \overline{y_2'(x)} y_1'(x) \right]' dx \\ &= -y_1'(w) \overline{y_2'(w)} + y_1'(0) \overline{y_2'(0)} + \overline{y_2'(w)} y_1(w) - \overline{y_2'(0)} y_1(0) \end{aligned}$$

$$= -e^{it}y_1'(0) e^{-it}\overline{y_2'(0)} + y_1'(0) \overline{y_2'(0)} + e^{-it}\overline{y_2'(0)} e^{it}y_1(w) - \overline{y_2'(0)} y_1(0) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^w p(x) y_1(x) \overline{y_2(x)} dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\int_0^w p(x) y_1(x) \overline{y_2(x)} dx = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.2.3: (2.2.1) ve (2.2.2) probleminin özdeğerleri;

$$F(\lambda) = 2 \cos t \quad (2.2.5)$$

denkleminin λ kökleriyle çakışır.

İspat: λ değerin ne zaman (2.2.1) ve (2.2.2) probleminin bir özdeğeri olacağını inceleyelim. λ nın (2.2.1) - (2.2.2) probleminin özdeğeri olması için bu λ ya karşılık gelen (2.2.1) ve (2.2.2) probleminin sıfırdan farklı $y(x)$ çözümü olmalıdır ve bu çözüm

$$y(x, \lambda) = c_1 \theta(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c_1 ve c_2 katsayıları aynı zamanda sıfır olmamalıdır. (2.2.2) sınır koşuluna göre

$$\begin{aligned} c_1 \theta(w, \lambda) + c_2 \varphi(w, \lambda) &= e^{it} [c_1 \theta(0, \lambda) + c_2 \varphi(0, \lambda)], \\ c_1 \theta'(w, \lambda) + c_2 \varphi'(w, \lambda) &= e^{it} [c_1 \theta'(0, \lambda) + c_2 \varphi'(0, \lambda)], \end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Buradan $\theta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = 1$ ve $\theta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned} [\theta(w, \lambda) - e^{it}] c_1 + \varphi(w, \lambda) c_2 &= 0, \\ \theta'(w, \lambda) c_1 + [\varphi'(w, \lambda) - e^{it}] c_2 &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix} \theta(w, \lambda) - e^{it} & \varphi(w, \lambda) \\ \theta'(w, \lambda) & \varphi'(w, \lambda) - e^{it} \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $F(\lambda) = 2 \cos t$ elde edilir.

Lemma 2.2.4: $\text{Im } \lambda \neq 0$, $F(\lambda)$ reel ise $|F(\lambda)| > 2$ dir.

İspat: $|F(\lambda)| \leq 2$ olsun. Bu durumda $F(\lambda) = 2 \cos t$ olacak şekilde bir t reel sayısı bulabiliriz. O halde λ değeri t -periyodik problemin bir özdeğeri olur. Fakat $\text{Im } \lambda \neq 0$ olduğundan λ reel değildir. Bu ise Lemma 2.2.1 ile çelişir. O halde $|F(\lambda)| > 2$ olmalıdır.

Tanım 2.2.3: Bir λ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların maksimal sayısına bu özdeğerin katı denir. Eğer özdeğerin katı bire eşit ise ona basit özdeğer denir.

Lemma 2.2.5: $t \neq m\pi$ ($m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$) için t -periyodik problemin özdeğerleri bir katlıdır, yani; basittirler.

İspat: λ sayısı t -periyodik problemin özdeğeri olsun. $t \neq m\pi$ ($m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$) olmak üzere bir λ değeri için (2.2.1)-(2.2.2) probleminin iki tane lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümünün olduğunu varsayalım. (2.2.1) in $y(x)$ genel çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin lineer birleşimi şeklinde gösterildiğinden (2.2.2) sınır koşullarını sağlar.

Yani özel olarak $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ için de

$$\begin{aligned}\theta(w, \lambda) &= e^{it} \theta(0, \lambda), & \varphi(w, \lambda) &= e^{it} \varphi(0, \lambda) \\ \theta'(w, \lambda) &= e^{it} \theta'(0, \lambda), & \varphi'(w, \lambda) &= e^{it} \varphi'(0, \lambda)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buna göre

$$F(\lambda) = \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) = 2e^{it}$$

olur. Diğer yandan $F(\lambda) = 2 \cos t$ idi. O halde $2 \cos t = 2e^{it} \implies \cos t = e^{it} = \cos t + i \sin t, \sin t = 0 \implies t = m\pi$ ($m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$) bulunur. Bu ise çelişkidir.

Lemma 2.2.6: Periyodik ve anti-periyodik sınır değer probleminin λ_0 özdeğerinin iki katlı olması için gerek ve yeter şart

$$\theta'(w, \lambda_0) = \varphi(w, \lambda_0) = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat: İspatı periyodik problem için vereceğiz. Anti-periyodik problem için de ispat benzerdir.

$$-y'' + q(x)y = \lambda_0 p(x)y, \quad (0 \leq x \leq w) \quad (2.2.6)$$

$$y(w) = y(0), \quad y'(w) = y'(0) \quad (2.2.7)$$

problemin iki tane lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin olduğunu kabul edelim. O halde (2.2.6) denkleminin keyfi $y(x)$ çözümü, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin lineer birleşimi şeklinde gösterilebildiği için (2.2.7) koşullarını sağlar. Özel olarak $\theta(x, \lambda_0)$ ve $\varphi(x, \lambda_0)$ çözümleri de (2.2.7) koşullarını sağlar. Yani,

$$\begin{aligned}\theta(w, \lambda_0) &= \theta(0, \lambda_0) = 1, & \varphi(w, \lambda_0) &= \varphi(0, \lambda_0) = 0 \\ \theta'(w, \lambda_0) &= \theta'(0, \lambda_0) = 0, & \varphi'(w, \lambda_0) &= \varphi'(0, \lambda_0) = 1\end{aligned}$$

koşulları sağlanır. Böylece $\theta'(w, \lambda_0) = \varphi(w, \lambda_0) = 0$ olur. Dolayısıyla önermedeki koşulların gerekli olduğunu gösterdik. Şimdi ise bu koşulların yeterli olduğunu gösterelim.

λ_0 özdeğeri için $\theta'(w, \lambda_0) = \varphi(w, \lambda_0) = 0$ olsun. λ_0 m iki katlı özdeğer olduğunu gösterelim. λ_0 , (2.2.6)-(2.2.7) probleminin özdeğeri olduğu için

$$\theta(w, \lambda_0) + \varphi'(w, \lambda_0) = 2 \quad (2.2.8)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $W[\theta, \varphi] = 1$ olduğu için $\theta(w, \lambda_0) \varphi'(w, \lambda_0) = 1$ olur. Buna göre

$$[\theta(w, \lambda_0) + \varphi'(w, \lambda_0)]^2 = 4 \theta(w, \lambda_0) \varphi'(w, \lambda_0)$$

olur. Buradan

$$[\theta(w, \lambda_0) - \varphi'(w, \lambda_0)]^2 = 0$$

bulunur, dolayısıyla $\theta(w, \lambda_0) = \varphi'(w, \lambda_0)$ dir. Bu sonuncu eşitliği (2.2.8) ile karşılaştırsak

$$\theta(w, \lambda_0) = 1 \quad \text{ve} \quad \varphi'(w, \lambda_0) = 1$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \theta(w, \lambda_0) &= \theta(0, \lambda_0), & \varphi(w, \lambda_0) &= \varphi(0, \lambda_0) \\ \theta'(w, \lambda_0) &= \theta'(0, \lambda_0), & \varphi'(w, \lambda_0) &= \varphi'(0, \lambda_0) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\theta(x, \lambda_0)$ ve $\varphi(x, \lambda_0)$ fonksiyonlarının (2.2.6)-(2.2.7) probleminin öz-fonksiyonları olduğunu gösterir. Bundan başka bu çözümlerin lineer bağımsız olduğunu biliyoruz. Bu ise λ_0 özdeğerinin iki katlı olması demektir.

2.3.İntegral Operatörler Yöntemi, Green Fonksiyonu:

Teorem 2.3.1: $q(x)$ sınırlı fonksiyon olmak üzere $q(x) + C p(x) > 0$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı için (2.2.1)-(2.2.2) probleminin çözümü

$$y(x) = (\lambda + C) \int_0^w G(x, \xi) p(\xi) y(\xi) d\xi \quad (2.3.1)$$

denklemini sağlar.

İspat: $(\lambda + C)p(x) y = f(x)$ olmak üzere

$$-y'' + (q(x) + Cp(x))y = f(x), \quad (0 \leq x \leq w) \quad (2.3.2)$$

$$y(w) = e^{it} y(0), \quad y'(w) = e^{it} y'(0) \quad (2.3.3)$$

sınır değer problemini gözönüne alalım.

$$-y'' + (q(x) + Cp(x))y = 0 \quad (2.3.4)$$

denkleminin

$$\theta_0(0) = 1, \quad \theta'_0(0) = 0$$

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi'_0(0) = 1$$

şartlarını sağlayan $\theta_0(x)$ ve $\varphi_0(x)$ çözümleri var ve tektir. O halde (2.3.4) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = c_1(x) \theta_0(x) + c_2(x) \varphi_0(x)$$

olarak belirsiz katsayılar yöntemini kullanalım.

$$y = c_1 \theta_0 + c_2 \varphi_0$$

ise

$$y' = c_1' \theta_0 + c_2' \varphi_0 + c_1 \theta_0' + c_2 \varphi_0'$$

olur.

$$c_1' \theta_0 + c_2' \varphi_0 = 0 \quad (2.3.5)$$

kabul edelim. O halde

$$y' = c_1 \theta_0' + c_2 \varphi_0'$$

bulunur. Buradan

$$y'' = c_1' \theta_0' + c_2' \varphi_0' + c_1 \theta_0'' + c_2 \varphi_0''$$

elde edilir. y ve y'' ifadelerini (2.3.2) de yazıp, θ_0 ve φ_0 ın (2.3.4) denklemini sağladığı kullanılırsa

$$\begin{aligned} - (c_1' \theta_0' + c_2' \varphi_0' + c_1 \theta_0'' + c_2 \varphi_0'') + (q(x) + Cp(x)) (c_1 \theta_0 + c_2 \varphi_0) &= f(x), \\ c_1' \theta_0' + c_2' \varphi_0' &= -f(x) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

elde edilir. Şimdi de (2.3.5) ve (2.3.6) eşitliklerini c_1' ve c_2' ya göre bir denklem sistemi olarak gözönüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} c_1' \theta_0 + c_2' \varphi_0 &= 0 \\ c_1' \theta_0' + c_2' \varphi_0' &= -f(x) \end{aligned}$$

denklem sisteminden Cramer kuralına göre

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \varphi_0(x) f(x) \\ c_2'(x) &= -\theta_0(x) f(x) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

bulunur. (2.3.7) denklemleri 0 dan x e kadar integralenirse,

$$\int_0^x c_1'(\xi) d\xi = \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$\int_0^x c_2'(\xi) d\xi = - \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} c_1(x) &= c_1(0) + \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \\ c_2(x) &= c_2(0) - \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

olur. Ayrıca $y(x)$ çözümü sınır koşullarını sağladığından

$$\begin{aligned} y(w) &= c_1(w) \theta_0(w) + c_2(w) \varphi_0(w) = e^{it} [c_1(0) \theta_0(0) + c_2(0) \varphi_0(0)] \\ y'(w) &= c_1(w) \theta_0'(w) + c_2(w) \varphi_0'(w) = e^{it} [c_1(0) \theta_0'(0) + c_2(0) \varphi_0'(0)] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} c_1(w) \theta_0(w) + c_2(w) \varphi_0(w) &= e^{it} c_1(0) \\ c_1(w) \theta_0'(w) + c_2(w) \varphi_0'(w) &= e^{it} c_2(0) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

olur. (2.3.7) denklemleri x den w ya kadar integralenirse,

$$\begin{aligned} \int_x^w c_1'(\xi) d\xi &= \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \\ \int_x^w c_2'(\xi) d\xi &= - \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} c_1(x) &= c_1(w) - \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \\ c_2(x) &= c_2(w) + \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

bulunur. (2.3.10) eşitliklerinde birinci denklem $\theta_0(w)$ ile, ikincisi $\varphi_0(w)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} c_1(x) \theta_0(w) + c_2(x) \varphi_0(w) &= c_1(w) \theta_0(w) + c_2(w) \varphi_0(w) - \\ &\quad \theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.8) in birinci eşitliği e^{it} ile çarpılırsa

$$c_1(x)e^{it} = c_1(0)e^{it} + e^{it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi$$

bulunur. Bu son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılır ve (2.3.9) un birinci eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\theta_0(w) - e^{it}) c_1(x) + \varphi_0(w) c_2(x) &= -\theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \\ &\quad \varphi_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

yazılır. (2.3.10) eşitliklerinde birinci denklem $\theta'_0(w)$ ile, ikincisi $\varphi'_0(w)$ ile çarpılır, taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} c_1(x) \theta'_0(w) + c_2(x) \varphi'_0(w) &= c_1(w) \theta'_0(w) + c_2(w) \varphi'_0(w) - \\ &\quad \theta'_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (2.3.8) in ikinci eşitliğini e^{it} ile çarpar, taraf tarafa çıkarır ve (2.3.9) un ikinci eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} c_1(x) \theta'_0(w) + (\varphi'_0(w) - e^{it}) c_2(x) &= -\theta'_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \\ &\quad \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

bulunur. Şimdi (2.3.11) ve (2.3.12) bağıntıları $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ e göre denklem sistemi olarak gözönüne alınırsa ve Cramer yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} A &= -\theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \\ B &= -\theta'_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \theta_0(w) - e^{it} & \varphi_0(w) \\ \theta'_0(w) & \varphi'_0(w) - e^{it} \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{\Delta}(A(\varphi'_0(w) - e^{it}) - B\varphi_0(w)) \\ c_2(x) &= \frac{1}{\Delta}(B(\theta_0(w) - e^{it}) - A\theta'_0(w)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada şimdi $\Delta \neq 0$ olduğunu gösterelim. $\theta_0(x)$ ve $\varphi_0(x)$ fonksiyonları (2.3.4) denkleminin çözümleri olduğu için

$$\begin{aligned} -\theta''_0(x) + [q(x) + Cp(x)] \theta_0(x) &= 0, \\ -\varphi''_0(x) + [q(x) + Cp(x)] \varphi_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu denklemler 0 dan x e kadar integrallenirse

$$\int_0^x \theta''_0(\xi) d\xi = \int_0^x [q(\xi) + Cp(\xi)] \theta_0(\xi) d\xi$$

ve

$$\int_0^x \varphi''_0(\xi) d\xi = \int_0^x [q(\xi) + Cp(\xi)] \varphi_0(\xi) d\xi$$

elde edilir. $\theta'_0(0) = 0$ ve $\varphi'_0(0) = 1$ olduğu için son bağıntılardan

$$\theta'_0(x) = \int_0^x [q(\xi) + Cp(\xi)] \theta_0(\xi) d\xi \quad (2.3.13)$$

$$\varphi'_0(x) = 1 + \int_0^x p(\xi) \varphi_0(\xi) d\xi \quad (2.3.14)$$

bulunur. $\theta_0(0) = 1 > 0$ ve $\theta_0(\xi)$ sürekli fonksiyon olduğundan dolayı 0 in $\varepsilon > 0$ komşuluğunun sağ kısmında $\theta_0(\xi) > 0$ olur. O halde $\forall \xi$ için $q(\xi) + Cp(\xi) > 0$ olduğundan ve $\forall x \in [0, \varepsilon]$ için (2.3.13) den $\theta'_0(x) > 0$ dir. Dolayısıyla $\theta_0(x)$, $[0, \varepsilon]$ üzerinde artandır. Bu durumda $\theta_0(x)$ in bütün $[0, \varepsilon]$ üzerinde artan olduğunu gösterelim. Gerçekten, eğer ε in bir sağ komşuluğunda $\theta_0(x)$ artmasaydı bu komşulukta $\theta'_0(x) \leq 0$ olması gerekirdi. Bunun için söz konusu komşulukta (2.3.13) den dolayı $\theta_0(\xi) < 0$ olması gerekir. Bu ise olamaz, çünkü ε nin sol komşuluğunda $\theta_0(x) > 0$ ve artandır. Böylece $\theta_0(w) > \theta_0(0) = 1$ elde edilir. $\varphi'_0(0) = 1 > 0$ olduğundan x , 0 in yeterince küçük $[0, \varepsilon]$ sağ komşuluğunda olduğunda da $\varphi'_0(x) > 0$ olur. O halde $[0, \varepsilon]$ üzerinde $\varphi_0(x)$ artandır ve $\varphi_0(0) = 0$ olduğundan $\varphi_0(x) > 0$, ($x \in [0, \varepsilon]$) dir. Bütün $x \in [0, w]$ için $\varphi'_0(x) > 0$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten ε in bir sağ komşuluğunda $\varphi'_0(x) \leq 0$ olsaydı bu komşulukta (2.3.14) den dolayı $\varphi_0(\xi) < 0$ olması gerekirdi. Bu ise olamaz, çünkü $\varphi_0(0) = 0$ ve $[0, \varepsilon]$ üzerinde $\varphi_0(x)$ artandır. Böylece $\varphi'_0(x) > 0, \forall x \in [0, w]$ ve $\varphi_0(x), [0, w]$ üzerinde artandır. O halde (2.3.14) den $\varphi'_0(w) > 1$ bulunur. Böylece,

$$\theta_0(w) + \varphi'_0(w) > 2$$

olur. $e^{2it} - e^{it}(\theta_0(w) + \varphi'_0(w)) + 1 = 0$ olduğunu kabul eder ve eşitliğin her iki yanını e^{-it} ile çarpılırsa

$$\theta_0(w) + \varphi'_0(w) = e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$$

elde edilir. Böylece

$$|\theta_0(w) + \varphi'_0(w)| \leq 2$$

bulunur. Bu ise $\theta_0(w) + \varphi'_0(w) > 2$ olması ile çelişir. O halde $\Delta \neq 0$ dır. Böylece

$$c_1(x) = \frac{1}{\Delta} [A(\varphi'_0(w) - e^{it}) - B\varphi_0(w)]$$

bağıntısında A ve B yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{\Delta} \left[-\theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - e^{it} (\varphi'_0(w) - 1) \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi (\varphi'_0(w) - e^{it}) \right. \\ &\quad \left. - (-\theta'_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi) \varphi_0(w) \right] \\ c_1(x) &= \frac{1}{\Delta} \left[-(\theta_0(w)\varphi'_0(w) - \theta'_0(w)\varphi_0(w)) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - e^{it} \varphi'_0(w) \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \left[e^{it} \theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. e^{2it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi_0(w) \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left[-\int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi'_0(w) \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ \left. e^{it} \theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - \right. \\ \left. e^{it} \varphi_0(w) \int_0^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{2it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

bulunur. Benzer şekilde

$$c_2(x) = \frac{1}{\Delta} [B(\theta_0(w) - e^{it}) - A\theta'_0(w)]$$

$$c_2(x) = \frac{1}{\Delta} \left[(-\theta'_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ \left. e^{it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi (\theta_0(w) - e^{it}) - (-\theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ \left. \varphi_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi) \theta'_0(w) \right] \\ = \frac{1}{\Delta} \left[(\theta_0(w) \varphi'_0(w) - \theta'_0(w) \varphi_0(w)) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ \left. e^{it} \theta'_0(w) \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] \\ + \frac{1}{\Delta} \left[e^{it} \theta_0(w) \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{2it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] \\ = \frac{1}{\Delta} \left[\int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{it} \theta'_0(w) \int_0^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{it} \theta_0(w) \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - \right. \\ \left. e^{it} \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{2it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

olur. Buradan

$$y(x) = c_1(x) \theta_0(x) + c_2(x) \varphi_0(x)$$

$$= \theta_0(x) \frac{1}{\Delta} \left[-\int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi'_0(w) \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ \left. e^{it} \theta_0(w) \int_x^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi_0(w) \int_0^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{2it} \int_0^x \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi \right] \\ + \varphi_0(x) \frac{1}{\Delta} \left[\int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi + e^{it} \theta'_0(w) \int_0^w \varphi_0(\xi) f(\xi) d\xi + \right. \\ \left. e^{it} \theta_0(w) \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{it} \varphi'_0(w) \int_x^w \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi - e^{2it} \int_0^x \theta_0(\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

olduğundan

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} [-e^{it}\theta_0(x)\varphi_0(w)\theta_0(\xi) + e^{it}\varphi_0(x)\theta_0'(w)\varphi_0(\xi)]$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \begin{cases} -e^{it}\theta_0(x)\varphi_0'(w)\varphi_0(\xi) + e^{2it}\theta_0(x)\varphi_0(\xi) \\ + e^{it}\varphi_0(x)\theta_0(w)\theta_0(\xi) - e^{2it}\varphi_0(x)\theta_0(\xi) & , \quad 0 \leq \xi \leq x \leq w \text{ ise,} \\ \theta_0(x)\varphi_0(\xi) + e^{it}\theta_0(x)\theta_0(w)\varphi_0(\xi) + \\ \varphi_0(x)\theta_0(\xi) - e^{it}\varphi_0(x)\varphi_0'(w)\theta_0(\xi) & , \quad 0 \leq \xi \leq x \leq w \text{ ise,} \end{cases} \quad (2.3.15)$$

olmak üzere

$$y(x) = (\lambda + C) \int_0^w G(x, \xi) p(\xi) y(\xi) d\xi$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Tanım 2.3.2: (2.3.1) denklemindeki (2.3.5) formülü ile tanımlı $G(x, \xi)$ fonksiyonuna Green fonksiyonu denir.

Eğer bir λ değeri için (2.3.1) denkleminin sıfırdan farklı $y(x)$ çözümü varsa $(\lambda + C)$ değerine (2.3.1) denkleminin karakteristik değeri $y(x)$ çözümüne de (2.3.1) denkleminin karakteristik fonksiyonu denir.

$K(x, \xi)$, $a \leq x, \xi \leq b$ karesinde tanımlı iki değişkenli, ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (2.3.16)$$

integral denklemini alalım. Burada $K(x, \xi)$ fonksiyonuna integral denklemin çekirdeği denir.

Tanım 2.3.3:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)|^2 dx d\xi < \infty \quad (2.3.17)$$

koşulunu sağladığında $K(x, \xi)$ çekirdeğine Hilbert-Schmit çekirdeği denir.

Tanım 2.3.4: $K(x, \xi)$ kompleks değerli fonksiyon olduğunda

$$K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)} \quad (2.3.18)$$

koşulu sağlandığında $K(x, \xi)$ ye Hermityen çekirdeği denir. $K(x, \xi)$ reel değerli fonksiyon olduğunda

$$K(x, \xi) = K(\xi, x)$$

koşulu sağlar. Bu durumda $K(x, \xi)$ ye simetrik çekirdek denir.

Teorem 2.3.2: (2.3.16) integral denklemini gözönüne alalım. Eğer bu denklemin $K(x, \xi)$ çekirdeği için (2.3.17) ve (2.3.18) koşulları sağlanırsa,

1) (2.3.16) denkleminin en az bir tane λ karakteristik değeri vardır.

2) (2.3.16) denkleminin bütün karakteristik değerleri reeldir. Karakteristik değerler sonlu veya sonsuz sayıda olabilir. Eğer karakteristik değerler sonsuz sayıda ise onlar mutlak sayılabilir sayıdadır.

3) (2.3.16) denkleminin özfonksiyonları birbirine ikiye ikiye ortoganaldır, ayrıca; normları da bire eşittir.

4)

$$N = \left\{ f(x) \in L^2[a, b] : \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0 \right\} \subset L^2[a, b] \quad (2.3.19)$$

olsun. $\dim N < \infty$ ise (2.3.16) denkleminin mutlaka sonsuz ama sayılabilir sayıda karakteristik değerleri vardır.

Lemma 2.3.1: Periyodik ve antiperiyodik sınır değer probleminin karakteristik değerleri vardır ve sayılabilir sayıdadır.

İspat: (2.2.1) ve (2.2.2) t -periyodik sınır değer problemine denk olarak (2.3.1) integral denklemini gözönüne alalım. Burada $t = 0, t = \pi$ olduğunda yani, periyodik ve antiperiyodik problemleri ele aldığımızda (2.3.15) den $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ koşulunun sağlandığı görülür. (2.3.1) integral denkleminin her iki yanını $\sqrt{p(x)}$ ile çarpıldığında

$$\sqrt{p(x)} y(x) = (\lambda + C) \int_0^w G(x, \xi) \sqrt{p(x)} \sqrt{p(\xi)} \sqrt{p(\xi)} y(\xi) d\xi$$

olur. $z(x) = \sqrt{p(x)} y(x)$, $K(x, \xi) = G(x, \xi) \sqrt{p(x)} \sqrt{p(\xi)}$ olarak tanımlandığında

$$z(x) = (\lambda + C) \int_0^w K(x, \xi) z(\xi) d\xi$$

bulunur. Burada $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ dir.

$$\int_0^w \int_0^w |K(x, \xi)|^2 dx d\xi \leq M^2 \int_0^w p(x) dx \int_0^w p(\xi) d\xi < \infty$$

olur. Şimdi N kümesini inceleyelim:

$$\int_0^w K(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0$$

denkleminin yalnızca $f(\xi) = 0$ çözümü vardır. Bunu gösterelim:

$$y(x) = \int_0^w G(x, \xi) \sqrt{p(\xi)} f(\xi) d\xi$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon

$$-y'' + q(x)y = \sqrt{p(x)}f(x)$$

$$y(w) = e^{it} y(0) , \quad y'(w) = e^{it} y'(0)$$

probleminin bir çözümüdür. $y \equiv 0$ olduğu için $\sqrt{p(x)}f(x) = 0$ olur. Buradan $f(x) = 0$ olur. O halde Teorem 2.3.2 dan dolayı periyodik ve antiperiyodik sınır değer problemlerinin sayılabilir sayıda özdeğerleri vardır.

Teorem 2.3.3: Eğer $q(x)$,

$$\int_0^\pi q(x) dx = 0$$

şartını sağlarsa, $\sqrt{\lambda} [F(\lambda) - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda}]$ fonksiyonunun mutlak değeri $\lambda \rightarrow \infty$ iken sifıra gider.

Bu teorem, bütün sınırlı, karesi integrallenebilen $q(x)$ fonksiyonları için doğrudur. $\lambda > 0$ için, $\lambda \rightarrow \infty$ iken $F(\lambda)$ nın asimptotik yaklaşımına ait olan daha iyi sonuçlar elde etmek için $q(x)$ in

$$q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{2inx}$$

şeklinde Fourier serilerine genişletilebileceğini kabul edebiliriz. Burada $q(x)$ reel ve $\int_0^\pi q(x) dx = 0$ dir, bunun yanında g_n sabitleri ise her n için

$$g_{-n} = \overline{g_n}$$

olmak üzere $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^2 g_n = 0$ şartını sağlar.

Teorem 2.3.4: (Açılım Teoremi)

Eğer $f(x)$ sürekli, ikinci türeve sahip ise ve

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (2.3.20)$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0 \quad (2.3.21)$$

sınır şartlarını sağlarsa, bu takdirde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x) , \quad a_n = \int_0^\pi f(x) v_n(x) dx$$

olacak şekilde

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \quad (2.3.22)$$

denklemini (2.3.20) (2.3.21) sınır değeri probleminin öz fonksiyonlarına göre mutlak ve düzgün yakınsak Fourier serilerine açılabilir.

İspat: Periyodik sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\} y &= 0, \\ y(0) &= y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

probleminin öz fonksiyonlarına göre serilere genişletilebilir yani, (2.3.23) problemine integral denklemlerin metodu uygulanır. İlk önce,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\zeta)}{\lambda_n} \quad (2.3.24)$$

düzgün ve mutlak yakınsak seriler olacağını ispatlayacağız.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ probleminin özdeğeri ve $v_0(x), v_1(x), \dots$ bunlara karşılık gelen ortonormalleşmiş özfonksiyonlar olsunlar.

$$c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(\tau) d\tau \right), \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(\tau) d\tau$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S_n &= n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ S_n &= n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

asimptotik formüllerinden problemin λ_n özdeğerleri hakkında bilgi elde edebiliriz. $\frac{\lambda_n}{n^2} \rightarrow 1$ dir.

Bu nedenle (2.3.24) serilerinin düzgün ve mutlak yakınsaklığını ispatlamak için $v_n(x)$ öz fonksiyonlarının düzgün sınırlı olduğunu ispatlamak yeterlidir. İspatı kolaylaştırmak için iki değişkenli özdeğer halini hariç tutup $\lambda = s^2$ alalım. Bu takdirde

$$y'' + s^2 y = q(x)y$$

denklemini

$$y(x, \lambda) = c_1 \sin sx + c_2 \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x y(t, \lambda) q(t) \sin s(x-t) dt$$

şeklinde yazabiliriz. c_1 ve c_2 sabitleri

$$c_2 = c_1 \sin s\pi + c_2 \cos s\pi + \frac{1}{s} \int_0^\pi y(t, \lambda) q(t) \sin s(\pi - t) dt$$

bağıntısı ile tanımlanır.

$y(x, \lambda)$ fonksiyonlarının normalleştirilmiş yani $\int_0^\pi y^2(x, \lambda) dx = 1$ olduğunu kullanarak c_1 ve c_2 yi seçebiliriz. $s^2 = \lambda_n$ için $y(x, \lambda)$ bir normalleştirilmiş özfonksiyon olabilir. Gerçekten

$$y'' + \{\lambda_n - q(x)\} y = 0$$

denkleminin hiçbir çözümü aralığın uç noktalarında sağlanmaz ($y = 0$ aşıkaz çözümleri hariç). Buradan ve

$$y(0) = y(\pi)$$

den

$$v_n(0) - cy(0) = v_n(\pi) - cy(\pi) = 0$$

olacak şekilde c bulabiliriz. Böylece

$$v_n(x) - cy(x) = 0$$

olur. Sonuçta $s_n^2 = \lambda_n$ için $y(x, \lambda)$ normalized fonksiyonu bir normalleştirilmiş öz fonksiyona özdeştir. Şimdi, Hölder eşitsizliğinden

$$\left(\int_0^\pi y(t, \lambda) q(t) \sin s(\pi - t) dt \right)^2 \leq \int_0^\pi y^2(t, \lambda) dt \int_0^\pi q^2(t) dt \leq c$$

elde ederiz. Buradan,

$$y(x, \lambda) = c_1(s) \sin sx + c_2(s) \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. $O\left(\frac{1}{s}\right)$ yi sol yana geçirerek, karesini ve integralini alarak

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ y(x, \lambda) - O\left(\frac{1}{s}\right) \right\}^2 dx &= 1 - 2 \int_0^\pi y(x, \lambda) O\left(\frac{1}{s}\right) dx + \int_0^\pi O^2\left(\frac{1}{s}\right) dx \\ &= \int_0^\pi (c_1(s) \sin sx + c_2(s) \cos sx)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (c_1^2(s) \sin^2 sx + 2c_1(s) c_2(s) \sin sx \cos sx + c_2^2(s) \cos^2 sx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1^2(s) \int_0^\pi \sin^2 sx \, dx + 2c_1(s) c_2(s) \int_0^\pi (\sin sx \cos sx) \, dx + c_2^2(s) \int_0^\pi \cos^2 sx^2 \, dx \\
&= c_1^2(s) \int_0^\pi \left(\frac{-\cos 2sx + 1}{2} \right) dx + 2c_1(s) c_2(s) \frac{1}{s} \frac{\sin^2 sx}{s} \Big|_0^\pi + c_2^2(s) \int_0^\pi \left(\frac{\cos 2sx + 1}{2} \right) dx \\
&= \frac{c_1^2}{2} \left(\frac{1}{2s} \sin 2sx + x \right) \Big|_0^\pi + \frac{2c_1 c_2}{s} \left(\frac{\sin^2 s\pi}{s} \right) + \frac{c_2^2}{2} \left(\frac{1}{2s} \sin 2sx + x \right) \Big|_0^\pi \\
&= c_1^2 \left(\frac{1}{2s} \sin 2s\pi + \pi \right) + 2c_1 c_2 \left(\frac{\sin^2 s\pi}{s^2} \right) + \frac{c_2^2}{2} \left(\frac{1}{2s} \sin 2s\pi + \pi \right) \\
&= c_1^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4s} \sin 2s\pi \right) + 2c_1 c_2 \left(\frac{\sin^2 s\pi}{s^2} \right) + c_2^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4s} \sin 2s\pi \right) \\
&= c_1^2 \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) + 2c_1 c_2 O\left(\frac{1}{s}\right) + c_2^2 \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_0^\pi \left\{ y(x, \lambda) O\left(\frac{1}{s}\right) \right\}^2 dx \leq \int_0^\pi y^2(x, \lambda) \, dx \cdot \int_0^\pi O^2\left(\frac{1}{s}\right) dx = O\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad (2.3.25)$$

dir.

c_1 ve c_2 sayıları (2.3.25) çözümünde simetrik olarak alındığında, örneğin; $|c_1| \geq |c_2|$ kabul edebiliriz. Bu takdirde

$$\eta = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2, \quad \eta \leq 1$$

olarak gözönüne alırsa (2.3.25) ifadesini c_1^2 ye bölersek,

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) + 2\frac{c_2}{c_1} O\left(\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) \\
&= \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) + 2\frac{c_2}{c_1} O\left(\frac{1}{s}\right) + \eta \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) \\
&= O\left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{\pi}{2} + 2\frac{c_2}{c_1} + \eta \frac{\pi}{2} \right) \\
&= c_1^2 \left(\frac{\pi}{2} + \eta \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) \leq 1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu eşitsizlik c_1 ve c_2 nin sınırlı olduğunu gösterir. Bu da özfonksiyonların düzgün sınırlılığını ispatlar. Böylece (2.3.24) serilerin düzgün ve mutlak yakınsak olduğunu ispatlamış oluruz.

2.4.Kararlılık ve Kararsızlık Bölgeleri:

Lemma 2.4.1:

$$-y'' + q(x)y = \lambda p(x)y + f(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.4.1)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (2.4.2)$$

homojen olmayan problemin çözümü,

$$y(x, \lambda) = \int_0^x [\theta(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) - \varphi(x, \lambda) \theta(\xi, \lambda)] f(\xi) d\xi$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: Bu lemma belirsiz katsayılar metodu ile ispatlanır. Yani, homojen olmayan denklemin çözümü, homojen denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonları şeklinde aranılır. Fakat bu kombinasyonun katsayıları x in fonksiyonlarıdır.

$y = y(x, \lambda)$, $c_1 = c_1(x, \lambda)$, $c_2 = c_2(x, \lambda)$, $\theta = \theta(x, \lambda)$, $\varphi = \varphi(x, \lambda)$ olmak üzere

$$y = c_1 \theta + c_2 \varphi \quad (2.4.3)$$

$$y' = c_1' \theta + c_2' \varphi + c_1 \theta' + c_2 \varphi' \quad (2.4.4)$$

elde edilir.

$$c_1' \theta + c_2' \varphi = 0 \quad (2.4.5)$$

olsun. O halde (2.4.4) eşitliği x e göre diferansiyellenirse

$$y'' = c_1' \theta' + c_2' \varphi' + c_1 \theta'' + c_2 \varphi'' \quad (2.4.6)$$

bulunur. (2.4.3) ve (2.4.6) ifadelerini (2.4.1) denkleminde yerine yazılır, θ ve φ nin homojen denklemin çözümü olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} -c_1' \theta' - c_2' \varphi' - c_1 \theta'' - c_2 \varphi'' + q(x) (c_1 \theta + c_2 \varphi) &= \lambda p(x) [c_1 \theta + c_2 \varphi] + f \\ -c_1' \theta' - c_2' \varphi' + c_1 [-\theta'' + q(x)\theta - \lambda p(x)\theta] + c_2 [-\varphi'' + q(x)\varphi - \lambda p(x)\varphi] &= f \\ c_1' \theta' + c_2' \varphi' &= -f \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

bulunur. c_1 ve c_2 belirsiz fonksiyonlarını bulmak için (2.4.5) ve (2.4.7) koşulları kullanılırsa

$$c_1' = f\varphi = f(x) \varphi(x, \lambda) \quad (2.4.8)$$

ve

$$c_2' = -f\varphi = -f(x) \theta(x, \lambda)$$

elde edilir. (2.4.3) ifadesinde $y(0) = 0$ yazarak $c_1(0, \lambda) = 0$, (2.4.4) ifadesinde de $y'(0) = 0$ yazarak $c_2(0, \lambda) = 0$ bulunur. (2.4.8) denklemleri 0 dan x e kadar integrallenir ve $c_1(0, \lambda) = 0$, $c_2(0, \lambda) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$c_1(x, \lambda) = \int_0^x f(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi,$$

$$c_2(x, \lambda) = - \int_0^x f(\xi) \theta(\xi, \lambda) d\xi,$$

elde edilir. Bu eşitlikler (2.4.3) de yerine yazılırsa, bu takdirde Lemma 2.4.1 de istenilen formüle ulaşılmış olunur.

Teorem 2.4.1:

$$\begin{aligned} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= \int_0^w \{ \theta'(w, \lambda) \varphi^2(\xi, \lambda) + [\theta(w, \lambda) - \varphi'(w, \lambda)] \theta(\xi, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) \\ &\quad - \varphi(w, \lambda) \theta^2(\xi, \lambda) \} p(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

dir.

İspat:

$$-\varphi''(x, \lambda) + q(x) \varphi(x, \lambda) = \lambda p(x) \varphi(x, \lambda),$$

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1$$

problemi λ ya göre diferansiyellenirse

$$-\left(\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right)'' + q(x) \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \lambda p(x) \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} + p(x) \varphi(x, \lambda), \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial \varphi(0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'(0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.4.11)$$

bulunur. (2.4.10) ve (2.4.11) problemine Lemma 2.4.1 uygulanırsa,

$$\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_0^x \{ \theta(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) - \varphi(x, \lambda) \theta(\xi, \lambda) \} p(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi \quad (2.4.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$-\theta''(x, \lambda) + q(x) \theta(x, \lambda) = \lambda p(x) \theta(x, \lambda) \quad (2.4.13)$$

$$\theta(0, \lambda) = 0, \quad \theta'(0, \lambda) = 1 \quad (2.4.14)$$

problemi λ ya göre diferansiyellenirse,

$$-\left(\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right)'' + q(x)\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \lambda p(x)\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda} + p(x)\theta(x,\lambda) \quad (2.4.10')$$

$$\frac{\partial\theta(0,\lambda)}{\partial\lambda} = 0, \quad \frac{\partial\theta'(0,\lambda)}{\partial\lambda} = 0 \quad (2.4.11')$$

bulunur. (2.4.10') ve (2.4.11') problemine tekrar Lemma 2.4.1 uygulanırsa,

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \int_0^x \{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\} p(\xi)\theta(\xi,\lambda) d\xi \quad (2.4.15)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial\theta(w,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi'(w,\lambda)}{\partial\lambda} \quad (2.4.16)$$

olduğundan $\frac{\partial\varphi'(w,\lambda)}{\partial\lambda}$ nın hesaplanması gerekir. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi'(w,\lambda)}{\partial\lambda} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda} \right) = \frac{d}{dx} \int_0^x \{\theta(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\} p(\xi)\varphi(\xi,\lambda) d\xi \\ &= \frac{d}{dx} \theta(x,\lambda) \int_0^x \varphi(\xi,\lambda) p(\xi)\varphi(\xi) d\xi - \frac{d}{dx} \varphi(x,\lambda) \int_0^x \theta(\xi,\lambda) p(\xi)\varphi(\xi) d\xi \\ &= \theta'(x,\lambda) \int_0^x \varphi(\xi,\lambda) p(\xi)\varphi(\xi) d\xi + \theta(x,\lambda) \varphi(x,\lambda) p(x)\varphi(x) - \\ &\quad \varphi'(x,\lambda) \int_0^x \theta(\xi,\lambda) p(\xi)\varphi(\xi) d\xi - \varphi(x,\lambda) \theta(x,\lambda) p(x)\varphi(x) \\ &= \int_0^x \{\theta'(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\} p(\xi)\varphi(\xi,\lambda) d\xi \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

olur. (2.4.15) ve (2.4.17) eşitlikleri, (2.4.16) da yerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.4.2: (Ossilasyon Teoremi) (2.1.1) Hill denkleminin π periyotlu bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart bu denklemin $\lambda = \lambda'_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olacak şekilde

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (2.4.18)$$

ve

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots \quad (2.4.19)$$

reel sayılarının monoton artan sonsuz iki dizisini içermesidir. Burada λ_n ve λ'_n

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \dots \quad (2.4.20)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda'_n)^{-1} = 0 \quad (2.4.21)$$

bağıntılarını sağlar. Denklemin çözümleri ise

$$(\lambda_0, \lambda'_1), (\lambda'_2, \lambda_1), (\lambda_2, \lambda'_3), (\lambda'_4, \lambda_3), \dots \quad (2.4.22)$$

aralıklarında kararlıdır [14].

İspat: İlk önce λ nın kompleks değeri halinde denklemin kararlı çözümlerinin olup olmadığını inceleyelim. $\varphi = u + iv$ olmak üzere (2.1.1) in bir çözümünün $\lambda = \mu + i\nu$ (μ, ν reel) olduğunu kabul edelim. α reel ve $P(x)$ ise π periyotlu olmak üzere

$$\varphi(x) = e^{i\alpha x} P(x) = u + iv \quad (2.4.23)$$

dir. Floquet teoremine göre (2.1.1) denkleminin çözümleri kararlılığa sahiptirler, böyle bir $\varphi(x)$ çözümü mevcuttur. (2.1.1) den

$$u'' + [\mu + q(x)]u = vu, \quad (2.4.24)$$

$$v'' + [\mu + q(x)]v = -vu$$

bulunur. Bu denklem sisteminde birinci denklem v ile ikincisi ise u ile çarpılıp çıkarılırsa

$$u''v - v''u = v(u^2 + v^2)$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınır

$$u'v - v'u = v \int_0^x [u^2(t) + v^2(t)] dt + c \quad (2.4.25)$$

olduğu görülür. (2.4.23) deki $P(x)$, periyodik bir fonksiyon olduğundan $|u|$, $|v|$, $|u'|$ ve $|v'|$ fonksiyonları sınırlıdır. Bu yüzden $|uv' - vu'|$ için bir üst sınır mevcuttur. O halde

$$I(x) = \int_0^x [u^2(t) + v^2(t)] dt$$

de sınırlı olmalıdır. Ancak $u^2 + v^2 = |p|^2$ olduğundan $x \rightarrow \infty$ iken $I(x) \rightarrow \infty$ dir. Buradan

$$I(n\pi) = \int_0^{n\pi} [u^2(t) + v^2(t)] dt = n \int_0^\pi |P(t)|^2 dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olur. O halde λ kompleks ise kararlı bir çözüm yoktur.

Aynı zamanda herhangi bir $\lambda \leq \lambda^*$ için (2.1.1) çözümleri kararsız olacak şekilde reel bir λ^* sayısı mevcuttur. Eğer $\lambda \leq \lambda^*$ ise bu takdirde $x \rightarrow \infty$ iken $\varphi(x, \lambda) \rightarrow \infty$ dir. Buradan,

eğer λ kompleks ya da $\lambda \leq \lambda^*$ ise, α reel olmak üzere (2.4.23) tipinde (2.1.1) in çözümü mevcut değildir.

Böylece $F(\lambda) - 2 = 0$ ve $F(\lambda) + 2 = 0$ denkleminin tüm kökleri reel ve λ^* dan büyük olup (2.4.18) ve (2.4.19) dizilerinin varlığı ortaya çıkar. Şimdi (2.4.20) eşitsizliklerinin doğruluğunu ispatlayalım. Bunun için aşağıdaki lemmadan faydalanacağız.

Lemma 2.4.2: $F(\lambda)$ nın λ ya göre türevi $F'(\lambda)$ olmak üzere λ_0 , negatif ya da sıfır olacak şekilde $\lambda = \lambda_0$ için $F(\lambda) = 2$ denkleminin bir kökü olsun. Bu takdirde herhangi bir $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1^*$ açık aralığında $F'(\lambda) < 0$ olup, buradan $F(\lambda) > -2$ elde edilir. Benzer olarak λ'_0 , $F(\lambda) = -2$ nin bir kökü ve $F'(\lambda'_0) \geq 0$ olsun. Bu takdirde herhangi bir $\lambda'_0 < \lambda < \lambda'_1$ açık aralığında $F'(\lambda) \geq 0$ dir ve $F(\lambda) < 2$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta(x, \lambda) &= z_1(x, \lambda), & \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) &= z_2(x, \lambda) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta'(x, \lambda) &= z'_1(x, \lambda), & \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi'(x, \lambda) &= z'_2(x, \lambda)\end{aligned}$$

alalım. Burada $z'_1 = \frac{\partial}{\partial x} z_1$ ve $z'_2 = \frac{\partial}{\partial x} z_2$ dir. Aynı zamanda $\theta(\pi, \lambda)$, $\varphi(\pi, \lambda)$, $\theta'(\pi, \lambda)$, $\varphi'(\pi, \lambda)$ çözüm fonksiyonları olsunlar. $F'(\lambda)$, λ ya göre türev olmak üzere

$$F'(\lambda) = z_1(\pi, \lambda) + z'_2(\pi, \lambda)$$

dir. Teorem 2.4.1 den

$$F'(\lambda) = (\theta(\pi, \lambda) - \theta'(\pi, \lambda)) \int_0^\pi \theta(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) dx - \varphi(\pi, \lambda) \int_0^\pi \theta^2(x, \lambda) dx + \theta(\pi, \lambda) \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda) dx \quad (2.4.26)$$

eşitliği yazılabilir. Her x için Wronskiyan $\theta\varphi' - \varphi\theta' = 1$ olduğundan $x = \pi$ için

$$\theta(\pi, \lambda)\varphi'(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda)\theta'(\pi, \lambda) = 1$$

olarak bilindiğinden, böylece

$$\begin{aligned}F^2(\lambda) - 4 &= (\theta(\pi, \lambda) + \varphi'(\pi, \lambda))^2 - 4(\theta(\pi, \lambda) \varphi'(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda) \theta'(\pi, \lambda)) \\ &= (\theta(\pi, \lambda) - \theta'(\pi, \lambda))^2 + 4\theta'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda)\end{aligned}$$

olur. Eğer $\theta'(\pi, \lambda) \geq 0$ ise $\text{sgn}\theta'(\pi, \lambda) = 1$, $C < 0$ ise $\text{sgn}\theta'(\pi, \lambda) = -1$ ve $\theta'(\pi, \lambda) = 0$ ise $\text{sgn}\theta'(\pi, \lambda) = 0$ alarak ve $\theta'(\pi, \lambda) \neq 0$ kabul ederek (2.4.26) dan

$$F'(\lambda) = \text{sgn}\theta'(\pi, \lambda)$$

$$\int_0^\pi \left(\sqrt{|\theta'(\pi, \lambda)|} \varphi(\pi, \lambda) + \operatorname{sgn} \theta'(\pi, \lambda) \frac{\theta(\pi, \lambda) - \varphi'(\pi, \lambda)}{2\sqrt{|\theta'(\pi, \lambda)|}} \theta(\pi, \lambda) \right)^2 dx - \frac{F^2(\lambda) - 4}{4|\theta'(\pi, \lambda)|} \int_0^\pi \theta^2(x, \lambda) dx \quad (2.4.27)$$

yazılır. Bu denklem $F'(\lambda)$ nın herhangi bir aralıkta $\theta'(\pi, \lambda)$ ile aynı işarete sahip olduğunu ve $\theta'(\pi, \lambda) \neq 0$ ve $F^2(\lambda) \leq 4$ olduğunu gösterir. Şimdi $F(\lambda_0) = 2$ ve $F'(\lambda_0) \leq 0$ olacak şekilde bir λ_0 değerini gözönüne alalım. Yeterince küçük bir δ için $F(\lambda)$ nın $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ aralığında azalan olduğu gerçeğini kullanmak istiyoruz. Eğer $F'(\lambda_0) < 0$ ise bu açıktır. Şimdi $F(\lambda_0) = 2$ ve $F'(\lambda_0) = 0$ olsun. Bu halde (2.4.27) ye göre $\theta'(\pi, \lambda_0)$ elde etmeliyiz.

Aynı zamanda

$$F^2(\lambda) - 4 = (\theta(\pi, \lambda) - \varphi'(\pi, \lambda))^2 + 4\theta'(\pi, \lambda)\varphi(\pi, \lambda) = 0$$

olup,

$$\theta(\pi, \lambda_0) - \varphi'(\pi, \lambda_0) = 0 \quad (2.4.28)$$

ve $\theta(\pi, \lambda)\varphi'(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda)\theta'(\pi, \lambda) = 1$ olduğundan $\theta(\pi, \lambda_0) = \varphi'(\pi, \lambda_0) = 1$ elde edilir. Bu takdirde (2.4.26)

$$F'(\lambda_0) = -\varphi(\pi, \lambda) \int_0^\pi \theta^2(x, \lambda) dx$$

eşitliğini verir ve bundan dolayı $F'(\lambda_0) = 0$ ise $\varphi(\pi, \lambda_0) = 0$ dır. Bu lemma aşağıda verilen sonuçları da gerektirir.

Sonuç 2.4.1: $|F(\lambda_0)| = 2$ ise $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\theta'(\pi, \lambda_0) = \varphi(\pi, \lambda_0) = 0$$

olmasıdır.

Sonuç 2.4.2: $|F(\lambda)| < 2$ ise $\varphi(\pi, \lambda) \neq 0$, $\theta'(\pi, \lambda) \neq 0$ ve aynı zamanda $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$ dır.

İspat: $|F(\lambda)| < 2$ ise $|F(\lambda)|^2 < 4$ dir.

$$[\theta(\pi, \lambda) + \varphi'(\pi, \lambda)]^2 < 4 \quad \text{ise,}$$

$W\{\theta(\pi, \lambda) + \varphi(\pi, \lambda)\} = 1$ olduğu için

$$[\theta(\pi, \lambda) + \varphi'(\pi, \lambda)]^2 < 4 [\theta(\pi, \lambda) \varphi'(\pi, \lambda) - \theta'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda)]$$

yazılır. Bu takdirde

$$\theta^2(\pi, \lambda) + \varphi'^2(\pi, \lambda) + 2\theta(\pi, \lambda) \varphi'(\pi, \lambda) < 4 [\theta(\pi, \lambda) \varphi'(\pi, \lambda) - \theta'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda)]$$

olduğundan

$$[\theta(\pi, \lambda) - \varphi'(\pi, \lambda)]^2 < -4 \theta'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda)$$

elde edilir. Böylece,

$$\theta'(\pi, \lambda) \neq 0, \quad \varphi(\pi, \lambda) \neq 0$$

bulunur. İkinci kısmın ispatı ise,

$|F(\lambda)| < 2$ ise Lemma 2.4.1 gereği $\varphi(\pi, \lambda) \neq 0$ dır. Teorem 2.4.1 deki (2.4.22) formülü, $\varphi(\pi, \lambda) = \varphi$, $\varphi'(\pi, \lambda) = \varphi$, $\theta(\pi, \lambda) = \theta$ olmak üzere

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = -\varphi \int_0^\pi \left\{ \theta(\xi, \lambda) - \frac{\theta - \varphi'}{2\varphi} \varphi(\xi, \lambda) \right\}^2 p(\xi) d\xi - \frac{4 - F^2(\lambda)}{4\varphi} \int_0^w \varphi^2(\xi, \lambda) p(\xi) d\xi$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = 0$ olarak varsayılırsa, bu takdirde her iki integral de sıfıra eşit olur.

Böylece

$$\int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda) p(\xi) d\xi = 0 \implies \varphi(\xi, \lambda) = 0 \text{ olmalıdır. Bu ise çelişkidir. O halde, } \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$$

olmalıdır. Bu ise yine bir çelişkidir. O halde, $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$ olmalıdır.

Şimdi (2.4.20) eşitsizliklerin kararlılığını daha net ortaya çıkarmak için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.4.2: $\lambda = \lambda_0$ için

$$\theta'(\pi, \lambda_0) = \varphi(\pi, \lambda_0) = 0, \quad \theta(\pi, \lambda_0) = \varphi'(\pi, \lambda_0) = 1 \quad (2.4.29)$$

olmak üzere,

a) $F(\lambda_0) = 2$, $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise $\frac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} < 0$ dır.

b) $F(\lambda_0) = -2$, $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise $\frac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} > 0$ dır.

İspat: **a)** $F(\lambda_0) = 2$, $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise Sonuç 2.4.1 gereği $\theta'(\pi, \lambda_0) = \varphi(\pi, \lambda_0) = 0$ dır. Ayrıca (2.4.28) eşitliği ve $F(\lambda_0) = \theta(\pi, \lambda_0) + \varphi'(\pi, \lambda_0) = 2$ koşulu kullanılarak $\theta(\pi, \lambda_0) = 1$, $\varphi'(\pi, \lambda_0) = 1$ bulunur.

$$\theta = \theta(\pi, \lambda), \quad \varphi = \varphi(\pi, \lambda)$$

$$\theta' = \theta'(\pi, \lambda), \quad \varphi' = \varphi'(\pi, \lambda)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = & \int_0^\pi \{ \theta'(\pi, \lambda) \varphi^2(\xi, \lambda) + [\theta(\pi, \lambda) - \varphi'(\pi, \lambda)] \theta(\xi, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) \\ & - \varphi(\pi, \lambda) \theta^2(\xi, \lambda) \} p(\xi) d\xi \end{aligned}$$

formülünden

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(\lambda_0)}{d\lambda^2} &= \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial \theta'(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} \varphi^2(\xi, \lambda_0) + \left[\frac{\partial \theta(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi'(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right] \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \varphi(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} \theta^2(\xi, \lambda_0) \right\} p(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

bulunur. İkinci dereceden homojen olmayan lineer diferensiyel denklemlerin çözümü

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= \int_0^x \{ \theta(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) - \varphi(x, \lambda) \theta(\xi, \lambda) \} \theta(\xi, \lambda) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \theta'(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= \int_0^x \{ \theta'(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) - \varphi'(x, \lambda) \theta(\xi, \lambda) \} \theta(\xi, \lambda) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= \int_0^x \{ \theta(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) - \varphi(x, \lambda) \theta(\xi, \lambda) \} \varphi(\xi, \lambda) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \varphi'(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= \int_0^x \{ \theta'(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) - \varphi'(x, \lambda) \theta(\xi, \lambda) \} \varphi(\xi, \lambda) p(\xi) d\xi \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= \int_0^\pi \varphi(\xi, \lambda_0) \theta(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \theta'(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= - \int_0^\pi \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \varphi(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= \int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \varphi'(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= - \int_0^\pi \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (2.4.30) ın sağ tarafında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(\lambda_0)}{d\lambda^2} &= \int_0^\pi \left\{ - \int_0^\pi \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right\} \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^\pi \left\{ 2 \int_0^\pi \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right\} \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ &\quad - \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right\} \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ - \left[\int_0^\pi \theta^2 (\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right] \left[\int_0^\pi \varphi^2 (\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right] + \left[\int_0^\pi \theta (\xi, \lambda_0) \varphi (\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right]^2 \right\}$$

bulunur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğine ve $\theta (\xi, \lambda_0)$ ile $\varphi (\xi, \lambda_0)$ lineer bağımsız olduğuna göre,

$$\left[\int_0^\pi \theta (\xi, \lambda_0) \varphi (\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right]^2 < \left[\int_0^\pi \theta^2 (\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right] \left[\int_0^\pi \varphi^2 (\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right]$$

eşitsizliğinden

$$\frac{d^2 F(\lambda_0)}{d\lambda^2} < 0$$

bulunur.

b) $F(\lambda_0) = -2$, $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise Sonuç 2.4.1 gereği $\theta'(\pi, \lambda_0) = \varphi(\pi, \lambda_0) = 0$ dir. Ayrıca, (2.4.28) eşitliği ve $F(\lambda_0) = \theta(\pi, \lambda_0) + \varphi'(\pi, \lambda_0) = -2$ koşulu kullanılarak $\theta(\pi, \lambda_0) = -1$, $\varphi'(\pi, \lambda_0) = -1$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\pi, \lambda), \quad \varphi = \varphi(\pi, \lambda) \\ \theta' &= \theta'(\pi, \lambda), \quad \varphi' = \varphi'(\pi, \lambda) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= - \int_0^\pi \varphi(\xi, \lambda_0) \theta(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \theta'(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= \int_0^\pi \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \varphi(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= - \int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ \frac{\partial \varphi'(\pi, \lambda_0)}{\partial \lambda} &= \int_0^\pi \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (2.4.30) un sağ tarafında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(\lambda_0)}{d\lambda^2} &= \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right\} \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ &\quad - \int_0^\pi \left\{ 2 \int_0^\pi \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right\} \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right\} \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ \left[\int_0^\pi \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right] \left[\int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right] - \left[\int_0^\pi \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right]^2 \right\}$$

bulunur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden ve $\theta(\xi, \lambda_0)$ ile $\varphi(\xi, \lambda_0)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmaları dolayısıyla,

$$\left[\int_0^\pi \theta(\xi, \lambda_0) \varphi(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right]^2 < \left[\int_0^\pi \theta^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right] \left[\int_0^\pi \varphi^2(\xi, \lambda_0) p(\xi) d\xi \right]$$

eşitsizliğinden

$$\frac{d^2 F(\lambda_0)}{d\lambda^2} > 0$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.4.2: $F^2(\lambda) - 4 = 0$ denkleminin kökleri ya basittir ya da çift katlıdır. Eğer $\lambda = \lambda_0$ nin özel bir değeri için

$$F^2(\lambda_0) = 4, \quad F'(\lambda_0) = 0 \quad (2.4.31)$$

ve $F(\lambda_0) = 2$ ise bu takdirde $F''(\lambda_0) < 0$ ve $F(\lambda_0) = -2$ ise $F''(\lambda_0) > 0$ dir.

Lemma 2.4.3: $\lambda_0, F^2(\lambda) - 4 = 0$ denkleminin en küçük kökü olsun. Bu takdirde λ_0 basit bir köktür ve $F'(\lambda) < 0$ dir.

İspat: $\lambda < \lambda_0$ için $F(\lambda) > 2$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle eğer $F(\lambda_0) = 2$ ise $\lambda = \lambda_0$, $F(\lambda)$ nın bir maksimumu olamaz. Fakat Lemma 2.4.2, eğer $F'(\lambda_0) = 0$ ise $F(\lambda)$ nın $\lambda = \lambda_0$ da bir maksimuma sahip olacağını gösterir. Bu ise bir çelişkidir ve bu nedenle Lemma 2.4.3 doğrudur.

Buradan, (2.1.1) Hill denkleminin π ya da 2π periyotlu lineer bağımsız periyodik iki çözüme sahip olması için $F^2(\lambda) - 4 = 0$ denkleminin bir çift kat köke sahip olması gerektiği sonucuna ulaşılır, dolayısıyla Lemma 2.4.2 de kullanılarak (2.1.1) in çözümlerinin $\lambda = \lambda_{2n+1}$ ya da $\lambda = \lambda'_{2n+1}$ için kararlı olması için gerek ve yeter şartın λ_{2n+1} ya da λ'_{2n+1} in $F^2(\lambda) - 4$ in çift kat kökü olması gerektiği, yani $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ ya da $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$ olduğunu gösterir. Böylece (2.4.20) eşitsizliğinin doğru olduğu ve (2.4.22) aralıklarının kararlı aralıklar olduğu kesin olarak ortaya çıkar.

Teorem 2.4.5: $\forall \lambda \in (-\infty, A)$ için $F(\lambda) > 2$ olmak üzere negatif reel bir A sayısı vardır.

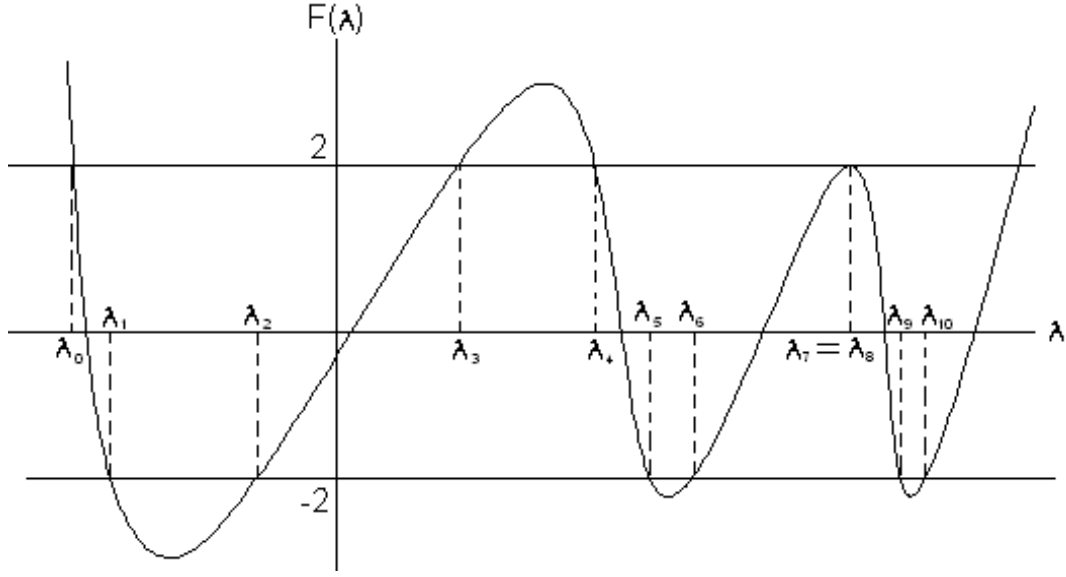
İspat: $q(x)$ sınırlı ve $p(x) \geq p_0 > 0$ olduğundan, $q(x) - \lambda p(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $\forall \lambda \in (-\infty, A)$ olacak şekilde bir negatif A sayısı seçilebilir. O halde $\lambda \in (-\infty, A)$ için

$$-y'' + [q(x) - \lambda p(x)] = 0$$

denklemin bilinen yöntem uygulanarak

$$F(\lambda) = \theta(w, \lambda_0) \quad \varphi'(w, \lambda_0) = 2$$

elde edilir. $F(\lambda)$ fonksiyonunun görüntüsü yukarıda ispatlanan özelliklerden dolayı yaklaşık olarak Şekil-1 deki gibidir.



Şekil-1

Teorem 2.4.6: Özel olarak (2.1.1) denkleminde $q(x) \equiv 0$ halinde $\lambda < 0$ ise $F(\lambda) > 2$ ve $F(0) = 2$ dir.

İspat:

$$-\theta''(x, \lambda) = \lambda p(x) \theta(x, \lambda) \quad (2.4.32)$$

$$-\varphi''(x, \lambda) = \lambda p(x) \varphi(x, \lambda)$$

denklemlerini 0 dan x e kadar integrallersek,

$$\int_0^x \theta''(\xi, \lambda) d\xi = -\lambda \int_0^x p(\xi) \theta(\xi, \lambda) d\xi, \quad (2.4.33)$$

$$\int_0^x \varphi''(\xi, \lambda) d\xi = -\lambda \int_0^x p(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi,$$

elde edilir. Buradan,

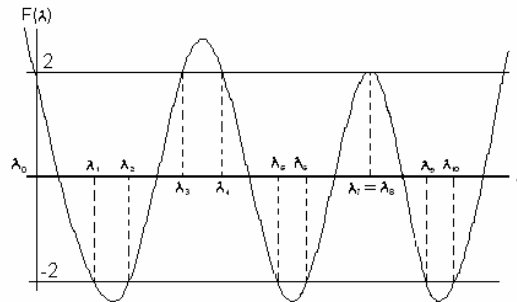
$$\theta'(x, \lambda) = -\lambda \int_0^x p(\xi) \theta(\xi, \lambda) d\xi, \quad (2.4.34)$$

$$\varphi'(x, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^x p(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (2.4.35)$$

bulunur. $\theta(0, \lambda) = 1 > 0$ olduğundan $\theta(\xi, \lambda)$ nin sürekli fonksiyon olmasından dolayı 0 ın yeteri kadar küçük $[0, \varepsilon]$ sağ komşuluğunda da $\theta(\xi, \lambda) > 0$ olur. O halde $\forall \xi$ için $p(\xi) \geq p_0 > 0$ olduğundan (2.4.34) den $\theta(x, \lambda) > 0$ ($x \in [0, \varepsilon]$) dir. Dolayısıyla $\theta(x, \lambda)$, $[0, \varepsilon]$ üzerinde artandır. Şimdi $\theta(x, \lambda)$ in bütün $[0, \varepsilon]$ üzerinde artan olduğunu gösterelim. Gerçekten, eğer ε in bir sağ komşuluğunda $\theta(x, \lambda)$ artmasaydı bu komşulukta $\theta(x, \lambda) \leq 0$ olması gerekirdi. Bunun için söz konusu komşulukta (2.4.34) den dolayı $\theta(\xi, \lambda) < 0$ olması gerekir. Bu ise olamaz, çünkü ε nin sol komşuluğunda $\theta(x, \lambda) > 0$ ve artandır. Böylece $\theta(w, \lambda) > \theta(0, \lambda) = 1$ elde edilir. $\theta(0, \lambda) = 1 > 0$ olduğundan $x, 0$ ın bir küçük $[0, \varepsilon]$ sağ komşuluğunda olduğunda da $\varphi(x, \lambda) > 0$ olur. O halde $[0, \varepsilon]$ üzerinde $\varphi(x, \lambda)$ artandır ve $\varphi(0, \lambda) = 0$ olduğundan $\varphi(x, \lambda) > 0$, ($x \in [0, \varepsilon]$) dir. Bütün $x \in [0, w]$ için $\varphi'(x, \lambda) > 0$ olduğunu gösterelim. Gerçekten ε in bir sağ komşuluğunda $\varphi'(x, \lambda) \leq 0$ olsaydı bu komşulukta (2.4.35) den dolayı $\varphi(\xi, \lambda) < 0$ olması gerekirdi. Bu ise olamaz, çünkü $\varphi(0, \lambda) = 0$ ve $[0, \varepsilon]$ üzerinde $\varphi(x, \lambda)$ artandır. Dolayısıyla $\varphi(x, \lambda) > 0$, $\forall x \in [0, w]$ ve $\varphi(x, \lambda)$, $[0, w]$ üzerinde artandır. O halde (2.4.35) den $\varphi'(w, \lambda) > 1$ bulunur. Böylece,

$$\theta(w, \lambda) + \varphi(w, \lambda) > 2$$

Gerçekten grafik, 2 noktasının sağ tarafında $+2$ doğrusunun üst kısmında kalmaz. Çünkü aksi halde 0 noktasında grafik 2 noktasında teğet olmak zorunda olur. Böylece, $F(0) = 2$, $\frac{dF(0)}{d\lambda} = 0$ durumu gerçekleştiği için Lemma 2.4.2 ye göre $\frac{d^2F(0)}{d\lambda^2} < 0$ olmalıdır. Yani $\lambda = 0$ noktası yerel maksimum noktası olmalıdır. Bu ise gerçekleşemeyeceği için grafik $\lambda = 0$ noktasının küçük sağ komşuluğunda $+2$ doğrusunun aşağısına inmelidir. Grafik $+2$ doğrusunun altına indikten sonra -2 doğrusuna ulaşana kadar sürekli aşağıya gitmelidir. Çünkü bu ara bölgede grafik yukarıya doğru yöneldiğinde grafiğin λ eksenine paralel teğeti çizilebilir. Bu ise Lemma 2.4.2 ye aykırıdır. Grafik -2 doğrusuna vardığında 2 hal mümkündür. Birincisi bu varış noktasında grafiğin -2 doğrusuna teğet olarak dönme hali ikincisi ise grafiğin -2 doğrusuna vardığında bu doğrunun altına geçme halidir. Antiperiyodik problemin özdeğerleri sayılabilir çoklukta olduğu için $F(\lambda)$ nın grafiği -2 doğrusunun altında her zaman kalmaz. Mutlaka yukarıya dönerek en az bir defa -2 doğrusunu kesmelidir. Bu kesme noktasında iki hal ortaya çıkabilir. Birinci halde grafik -2 doğrusunu keserek yukarıya doğru gidebilir. İkinci halde ise grafik -2 doğrusuna teğet olarak aşağıya doğru gidebilir. İkinci halin mümkün olmadığını gösterelim. Gerçekten ikinci hali kabul edelim. Lemma 2.4.2 den bu durumda $\frac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} > 0$ dır. Yani bu nokta grafik için minimum nokta olmalıdır. Öte yandan grafiğin ikinci halde söylediğimiz durumundan yerel maksimum olduğu açıktır. O halde çelişki elde edilir. Bu durumda ikinci hal olamaz.



Şekil-2

3. HILL DENKLEMİ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM

3.1.Periyodik Problemler İçin Hochstadt Teoremi.

$q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ potansiyelleri $[0, \pi]$ aralığında π periyodik, karesi integrallenebilir olmak üzere

$$Lu = -u'' + q(x)u,$$

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\tilde{L}u = -u'' + \tilde{q}(x)u,$$

$$u(0) \cos \tilde{\alpha} + u'(0) \sin \tilde{\alpha} = 0 \quad (3.1.2)$$

şeklinde $L_2[0, \infty]$ üzerinde iki singüler self adjoint operatörleri gözönüne alalım. Burada α ve $\tilde{\alpha}$ açıları da

$$0 < \left| \frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\alpha}} \right| < \infty \quad (3.1.3)$$

şartını sağlasın. $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ olduğu zaman bu oran bire eşittir. Ayrıca

$$u'' + (\lambda - q(x))u = 0, \quad (3.1.4)$$

$$u'' + (\lambda - \tilde{q}(x))u = 0, \quad (3.1.5)$$

Hill Denklemleri aynı $F(\lambda)$ diskriminantına sahip olsun. $F(\lambda)$ diskriminantı,

$$F(\lambda) = C(\pi, \lambda) + S'(\pi, \lambda) \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $C(x, \lambda)$ ve $S(x, \lambda)$,

$$C(0) = S'(0) = 1, \quad S(0) = C'(0) = 0 \quad (3.1.7)$$

koşullarını sağlayan (3.1.4) ün çözümleri, $F(\lambda)$ ise $\frac{1}{2}$.dereceden tam bir fonksiyondur [47]. $\{\lambda_n\}_0^\infty$, $F(\lambda) - 2$ nin sıfırları, $\{\lambda'_n\}_1^\infty$ ise $F(\lambda) + 2$ nin sıfırları olsun. Bunlar aşağıdaki gibi sıralıdırlar.

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \dots \quad (3.1.8)$$

$F(\lambda)$ nın basit spektrumu λ_0 dan ve $F(\lambda)$ nın çift katlı spektrumu geri kalan sıfırlardan oluşup bunlar, $n \geq 0$ için $\lambda_{2n+1} < \lambda_{2n+2}$ ve $\lambda'_{2n+1} < \lambda'_{2n+2}$ şartlarını sağlar.

Floquet teoremine göre eğer λ basit spektruma ait değilse (3.1.4) denklemi

$$\varphi(x + \pi) = \beta_1(\lambda)\varphi(x) \text{ ve } \psi(x + \pi) = \beta_2(\lambda)\psi(x) \quad (3.1.9)$$

eşitliklerini sağlayan çözümlere sahiptir. Burada $\beta_1(\lambda)$ ve $\beta_2(\lambda)$,

$$\beta^2 - F(\lambda)\beta + 1 = 0 \quad (3.1.10)$$

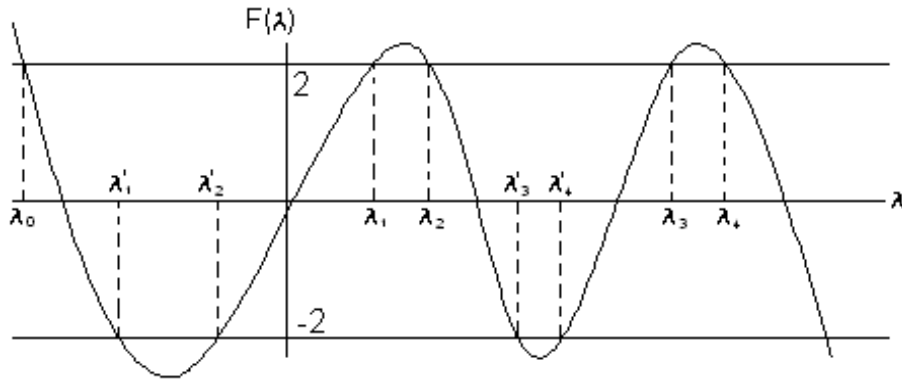
karakteristik denkleminin kökleridir. (3.1.4) ün spektrumu, sonsuz sayıda kararlı

$$(\lambda_0, \lambda'_1), (\lambda'_2, \lambda_1), (\lambda_2, \lambda'_3), (\lambda'_4, \lambda_3), \dots \quad (3.1.11)$$

aralıklarından oluşur. Bunların herhangi birindeki bir λ için $|F(\lambda)| < 2$ dir ve (3.1.10) mutlak değeri bire eşit kompleks çözüme sahiptir. (3.1.4) ün kararsız aralıkları,

$$(-\infty, \lambda_0), (\lambda'_1, \lambda'_2), (\lambda_1, \lambda_2), (\lambda'_3, \lambda'_4), \dots \quad (3.1.12)$$

şeklinededir. Bu aralıklardan ilki ya pozitif sonlu bir uzunluğa sahip olur ya da kaybolur. Eğer λ , kararsız aralığın dışında ise $|F(\lambda)| > 2$ dir ve (3.1.10), $|\beta_1(\lambda)| > 1$ ve $|\beta_2(\lambda)| < 1$ şartlarını sağlayan reel çözümlere sahiptir. Ayrıca (3.1.4) ün çözümü olan $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonu $L_2[0, \infty)$ a aittir. (3.1.11) ve (3.1.12) aralıklarının sıralanışı Şekil-3 de gösterilmiştir.



Şekil-3

Hochstadt [31] tarafından gösterildiği gibi (3.1.1) ile tanımlanan L operatörünün spektrumu, sürekli spektrumlardan ve $\{\mu_n\}$ noktasal özdeğerlerinden oluşur. Sürekli spektrum, kararlı aralıklardan faydalanarak verilir. Noktasal özdeğerler ise kaybolmayan (3.1.12) ile tanımlı kararsız aralıkların içinde olmalıdır. Ayrıca, bu aralıkların hiçbirisi birden fazla μ_n içeremez.

L ve $\tilde{L}$ spektrasında bazı şartlar altında,

$$H(0) = H(\pi) = 2 [\cot \tilde{\alpha} - \cot \alpha] \quad (3.1.13)$$

$$H'(x) = q(x) - q'(x) \quad (3.1.14)$$

şartlarını sağlayan bir $H(x)$ fonksiyonu tanımlamamız gerekir. Aynı zamanda biz, $F(\lambda)$ spektrumunun yok olmayan kararsız aralıklarının sonlu sayıda olması durumunda $H(x)$ i tam olarak tanımlayacağız ve $q(x)$ ya da $\tilde{q}(x)$ in minimal periyodunu bulacağız.

$L_2 [0, 1]$ uzayında verilen iki regüler operatörün karşılaştırılmasından, $H(x)$ e benzer fonksiyonun tanımlanması ilk olarak Hochstadt [29] tarafından gösterilmiştir.

Bu tezde $q(x + \pi) = q(x)$ ve $\tilde{q}(x + \pi) = \tilde{q}(x)$ ve $q(x), \tilde{q}(x) \in L_2 [0, \pi]$ olacak şekilde potansiyeller farkı için çalışma yapılmıştır.

Lemma 3.1.1: $\beta_1(\mu_n)$ ve $\beta_2(\mu_n)$, $|\beta_1(\mu_n)| > 1, |\beta_2(\mu_n)| < 1$ olacak şekilde (3.1.10) un reel çözümleri ve $\lambda = \mu_n$ için $\omega_n(x)$ ve $\tilde{y}_n(x)$ sırasıyla (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinin çözümleri olmak üzere

$$\tilde{y}_n(x + \pi) = \rho_+(\mu_n) \tilde{y}_n(x), \quad (3.1.15)$$

$$\omega_n(x + \pi) = \rho_-(\mu_n) \omega_n(x), \quad (3.1.16)$$

sağlar. $\omega_n(x)$ ve $\tilde{y}_n(x)$, $H(x)$ i

$$H(x) = \frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\alpha}} \sum_{n \in \Lambda_0} \omega_n(x) \tilde{y}_n(x) \quad (3.1.17)$$

şeklinde tanımlar.

İspat: $G(x, t)$ Green fonksiyonu, L nin,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) + [\lambda - q(x)] G(x, t) &= \delta(x - t) \\ \cos \alpha G(0, t) + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} G(x, 0)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\int_0^{\infty} |G(x, t)|^2 dx < \infty$$

şartlarını sağlar [44]. $\text{Im } \lambda \neq 0$ için $x_< = \min(x, t)$ ve $x_> = \max(x, t)$ olmak üzere

$$G(x, t) = \frac{\omega(x_<) \psi(x_>)}{W[\omega, \psi]} \quad (3.1.19)$$

dir. Burada, $\omega(x)$ ve $\psi(x)$;

$$\omega(x) = \sin \alpha C(x) - \cos \alpha S(x) \quad (3.1.20)$$

$$\psi(x) = S(\pi)C(x) + [\beta_2(\lambda) - C(\pi)] S(x) \quad (3.1.21)$$

şeklinde tanımlı olup, (3.1.4) denkleminin çözümleridir, $\psi(x)$ ve $\beta_2(\lambda)$, $|\beta_2(\lambda)| < 1$ ve

$$\psi(x + \pi) = \beta_2(\lambda) \psi(x), \quad \int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty \quad (3.1.22)$$

şartlarını sağlayacak şekilde seçildiğinde, $\omega(x)$ sıfırda (3.1.18) sınır şartını sağlar.

(3.1.19) daki $W[\omega, \psi]$; $\omega(x), \psi(x)$ in Wronskiyandır ve,

$$W[\omega, \psi] = \sin \alpha [\beta_2(\lambda) - C(\pi)] + \cos \alpha S(\pi) \quad (3.1.23)$$

dir. Şimdi $\varpi(\lambda)$ yı

$$\varpi(\lambda) = \omega(\pi) \cos \alpha + \omega'(\pi) \sin \alpha \quad (3.1.24)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$\sigma(\lambda) - \sigma(\mu) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\lambda} \text{Im } m(u + iv) du$$

olup,

$$m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\lambda - \mu} \quad (3.1.25)$$

biçimde tanımlandığında $\alpha \neq 0$ için, ($m(\lambda) = G(0, 0)$ dan)

$$m(\lambda) = \frac{\sin \alpha \{[\beta_2(\lambda) - C(\pi)] \sin \alpha - S(\pi) \cos \alpha\}}{\varpi(\lambda)} \quad (3.1.26)$$

ve $\alpha = 0$ için,

$$m(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} G(x, t) \big|_{x=t=0} = \frac{\beta_2(\lambda) - C(\pi)}{\varpi(\lambda)} \quad (3.1.27)$$

olur. Burada $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ için L nin monoton azalan spektral fonksiyonudur.

$\sigma(\lambda)$, Stieltjes dönüşüm formülü ile $m(\lambda)$ dan elde edilebilir. $\text{Im}(\lambda) > 0$ ve $\text{Im}(\lambda) < 0$ için $m(\lambda)$ analitiktir ve eğer kutupları mevcutsa, bunların basit olması gerekir ve reel doğru üzerinde bulunurlar. (3.1.26) ve (3.1.27) da $m(\lambda)$, $F(\lambda)$ nın basit spektrumuna ait olan tüm λ lar için dal noktalarına sahiptir. $\sigma(\lambda)$ nın sıçrama süreksizliğine karşılık gelen L nin $\{\mu_n\}$ özdeğerleri, $m(\lambda)$ nın kutuplarına özdeştir. Böylece μ_n nin $F(\lambda)$ nın bir kararsız aralığı içerisinde bulunması ve

$$\varpi(\mu_n) = 0 \quad (3.1.28)$$

şartını sağlaması gerekir[36]. Ayrıca bir kararsız aralık en çok bir özdeğer içerir. $\lambda = \mu_n$ için (3.1.20) deki $\omega(x)$ çözümü, $\omega_n(x)$ şeklinde bir özfonksiyon olarak gösterilebilir. Bu fonksiyon $L_2[0, \infty)$ a aittir. Bu nedenle, $|\beta_2(\mu_n)| < 1$ olmak üzere

$$\omega_n(x + \pi) = \beta_2(\mu_n)\omega_n(x) \quad (3.1.29)$$

şartını sağlar. Böylece (3.1.16) ispatlanmış olur.

(3.1.17) yı ispatlamak için, (3.1.5) in $\lambda = \mu_n$ için sırasıyla $\tilde{C}(0) = \tilde{S}'(0) = 1, \tilde{C}'(0) = \tilde{S}(0) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri $\tilde{C}(x)$ ve $\tilde{S}(x)$ olsun. Bu takdirde

$$\tilde{z}_n(x) = \sin \tilde{\alpha} \tilde{C}(x) - \cos \tilde{\alpha} \tilde{S}(x)$$

ve

$$\tilde{u}_n(x) = - \left[\tilde{S}'(\pi) \sin \tilde{\alpha} + \tilde{S}(\pi) \cos \tilde{\alpha} \right] \tilde{C}(x) + \left[\tilde{C}'(\pi) \sin \tilde{\alpha} + \tilde{C}(\pi) \cos \tilde{\alpha} \right] \tilde{S}(x)$$

şeklinde tanımlı $\tilde{u}_n(x)$ ve $\tilde{z}_n(x)$ değerleri

$$\tilde{y}_n(x) = \frac{2 [\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)]}{\tilde{\omega}(\lambda_n)}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{y}_n(x) = 2 \left\{ \frac{(-[\tilde{S}'(\pi) \sin \tilde{\alpha} + \tilde{S}(\pi) \cos \tilde{\alpha}] \tilde{C}(x) + [\tilde{C}'(\pi) \sin \tilde{\alpha} + \tilde{C}(\pi) \cos \tilde{\alpha}] \tilde{S}(x))}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} - \frac{k_n (\sin \tilde{\alpha} \tilde{C}(x) - \cos \tilde{\alpha} \tilde{S}(x))}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} \right\}$$

bulunur ve $k_n = -\beta_1(\mu_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(x) = 2 \left\{ \frac{[(\tilde{S}'(\pi) - \beta(\mu_n)) \sin \tilde{\alpha} + \tilde{S}(\pi) \cos \tilde{\alpha}] \tilde{C}(x)}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} \right. \\ \left. + \frac{[\tilde{C}'(\pi) \sin \tilde{\alpha} + (\tilde{C}(\pi) - \beta_1(\mu_n)) \cos \tilde{\alpha}] \tilde{S}(x)}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} \right\} \end{aligned} \quad (3.1.29')$$

elde edilir. Böylece(3.1.29') dan

$$\tilde{y}_n(\pi) = \beta_1(\mu_n)\tilde{y}_n(0), \quad \tilde{y}'_n(\pi) = \beta_1(\mu_n)\tilde{y}'_n(0)$$

olur. O halde,

$$\tilde{y}_n(x + \pi) = \beta_1(\mu_n)\tilde{y}_n(x)$$

olduğu ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.2: L operatörü (3.1.1) deki gibi tanımlansın. Ayrıca $F(\lambda)$ diskriminantı ve $F(\lambda)$ nın herbir sonlu kaybolmayan kararsız aralığı bir μ_n içerecek şekilde $\{\mu_n\}$ özdeğerleri verilsin. $\mu_0, 0 < \alpha < \pi$ için $(-\infty, \lambda_0)$ aralığında bulunsun. Bu takdirde $q(x)$ potansiyeli ve α açısı tek olarak tanımlıdır.

Teorem 3.1.1: $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ potansiyelleri π periyodik ve $L_2[0, \pi]$ den α $\tilde{\alpha}$ açıları (3.1.3) koşulunu sağlamak üzere, L ve $\tilde{L}$ operatörleri sırasıyla (3.1.1) ve (3.1.2) ile tanımlı olsun. (3.1.4)-(3.1.5) Hill denklemleri aynı $F(\lambda)$ diskriminantına sahip olsun. $F(\lambda)$ ve L nin $\{\mu_n\}$ ve $\tilde{L}$ nin $\{\tilde{\mu}_n\}$ ayırık noktalardan oluşan spektrumları (noktasal özdeğerleri) verilsin. Ayrıca $0 < \alpha < \pi$ için $(\mu_0, \tilde{\mu}_0)$ çiftinin $(-\infty, \lambda_0)$ aralığının içinde bulunduğunu kabul edelim. Bunlara ilaveten n nin sonlu sayıda değerleri hariç $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ olsun. Λ_0 ile $\mu_n \neq \tilde{\mu}_n$ bağıntısını sağlayan sonlu indeksler cümlesini gösterelim.

$\lambda = \mu_n$ için $\omega_n(x)$ ve $\tilde{y}_n(x)$ sırasıyla (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinin çözümleri olmak üzere,

$$H(x) = \frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\alpha}} \sum_{n \in \Lambda_0} \omega_n(x) \tilde{y}_n(x)$$

şeklinde tanımlı $H(x)$ fonksiyonu π periyodiktir ve (3.1.13)-(3.1.14) ü sağlar.

İspat: $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ halinde (3.1.15) deki $H(x)$ in $\frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\alpha}}$ katsayısı bire eşit ve (3.1.13) bağıntısı $H(0) = H(\pi) = 0$ dır.

$L_2[0, \infty)$ da singüler self-adjoint L operatörü ile $L_2[0, \pi]$ de bir regüler self-adjoint

$$Pu = -u'' + q(x)u$$

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0 \quad (3.1.30)$$

$$u(\pi) \cos \alpha + u'(\pi) \sin \alpha = 0$$

P operatörünü karşılaştıralım. P nin spektrumu $\{v_i\}$,

$$\varpi(v_i) = 0 \quad (3.1.31)$$

şartını sağlar. Bu nedenle (3.1.28) den herhangi i için

$$\mu_n = v_i \quad (3.1.32)$$

elde edilir. Ayrıca iki özdeğer aynı kaybolmayan kararsız aralığa ait olamaz. Aksi takdirde Oksilasyon Teoreminden dolayı, onlara karşılık gelen özfonksiyonlar $(0, \pi)$ aralığında aynı sayıda sıfırlara sahip olacaktır. Bu ise bir çelişkidir. Diğer yandan eğer varsa, $F(\lambda)$ dan iki katlı $\{\xi_j\}$ spektrumu elde edilebilir. $\lambda = \xi_j$ için (3.1.4) Hill denkleminin bütün çözümleri ya periyodiktir ya da yarı periyodiktir. Bu nedenle, ξ_j ,

$$\varpi(\xi_j) = 0 \quad (3.1.33)$$

denklemini sağlar ki, buda, herhangi bir i için,

$$\xi_j = v_i \quad (3.1.34)$$

olması demektir.

Kabulden, $F(\lambda)$ nın bütün kaybolmayan kararsız aralıkları L nin bir μ_n noktasal özdeğerini içerir. Bu nedenle,

$$\{v_i\} = \{\mu_n\} \cup \{\xi_j\} \quad (3.1.35)$$

dir. v_i özdeğeri ile özdeş olan k_i sabiti,

$$k_i = \begin{cases} \frac{-\sin \alpha}{\omega_i(\pi)}, & \alpha \neq 0 \text{ için} \\ \frac{1}{\omega'_i(\pi)}, & \alpha = 0 \text{ için} \end{cases} \quad (3.1.36)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\omega_i(x)$,

$$\omega_i(0) = \sin \alpha, \quad \omega'_i(0) = -\cos \alpha \quad (3.1.37)$$

başlangıç değerleri ile verilen P nin v_i ye karşılık gelen özfonksiyonudur. Bu şartlar (3.1.29) da yerine yazılırsa,

$$\omega_i(\pi) = \beta_2(v_i) \sin \alpha, \quad \omega'_i(\pi) = -\beta_2(v_i) \cos \alpha \quad (3.1.38)$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.10) dan

$$\beta_2(v_i) \beta_1(v_i) = 1 \quad (3.1.39)$$

yazılır. (3.1.36) da, (3.1.38) ve (3.1.39) kullanılırsa

$$k_i = -\frac{1}{\beta_2(v_i)} = -\beta_1(v_i) \quad (3.1.40)$$

elde edilir. Burada $\beta_1(v_i)$,

$$\beta_1(v_i) = \frac{F(v_i) + \operatorname{sgn} F(v_i) \left| \sqrt{F^2(v_i) - 4} \right|}{2} \quad (3.1.41)$$

şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde, $L_2[0, \infty)$ daki singüler $\tilde{L}$ operatörü ile $L_2[0, \pi]$ de verilen regüler

$$\tilde{P} u = -u'' + \tilde{q}(x)u,$$

$$u(0) \cos \tilde{\alpha} + u'(0) \sin \tilde{\alpha} = 0, \quad (3.1.42)$$

$$u(\pi) \cos \tilde{\alpha} + u'(\pi) \sin \tilde{\alpha} = 0,$$

$\tilde{P}$ operatörünü karşılaştıralım. Aynı şekilde $\{\tilde{u}_n\}$ ve $F(\lambda)$ dan $\tilde{P}$ operatörünün spektrumu $\{\tilde{v}_i\}$ ve $\{\tilde{k}_i\}$ sabitleri elde edilir. Bunlar da,

$$\{v_i\} = \{\tilde{\mu}_n\} \cup \{\xi_j\}, \quad \tilde{k}_i = -\beta_1(\tilde{v}_i) \quad (3.1.43)$$

eşitliklerini sağlar. Hipotezden dolayı, n nin sonlu sayıda değerleri hariç, $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ dir. $\mu_n \neq \tilde{\mu}_n$ için sonlu index kümesi Λ_0 ile gösterilir. Bu nedenle, P ve $\tilde{P}$ nin işaret sabitleri sırasıyla $\{k_n\}$ ve $\{\tilde{k}_n\}$ olmak üzere sonlu n değerleri dışında $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ve $k_n = \tilde{k}_n$ dir. Λ_0 nin tümleyenini göstermek üzere (3.1.17) de verilen $H(x)$ fonksiyonu elde edilir. $H(x)$ de kullanılan $\tilde{y}_n(x)$, $\lambda = \mu_n$ için (3.1.5) in bir çözümü iken ve

$$\tilde{y}_n(x) = \frac{2[\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)]}{\tilde{\omega}(\lambda_n)}$$

eşitliğini sağlarken $\omega_n(x)$, (3.1.38) başlangıç şartlarını sağlayan ve μ_n özdeğerine karşılık gelen L nin özfonksiyonudur. Böylece

$$H(0) = 2[\cot \tilde{\alpha} - \cot \alpha],$$

$$H(1) = 2[\cot \tilde{\beta} - \cot \beta],$$

$$H'(x) = q(x) - q'(x),$$

eşitliklerinden (3.1.13) ve (3.1.14) ü elde edilir. Bu sonuçlar ile birlikte $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ in periyodikliği de kullanılarak $H(x)$ in π periyodik olduğunu buluruz.

Uygulamalar:

Q , reel, integrallenebilir, π periyodik, $q(x)$ potansiyeli (3.1.4) Hill denklemi ile aynı $F(\lambda)$ diskriminantını paylaşanların ailesi olsun. Aynı zamanda, I_n

$$I_0 = (-\infty, \lambda_0), \quad I_1 = (\lambda_1', \lambda_2'), \quad I_2 = (\lambda_1, \lambda_2), \quad (3.1.44)$$

olacak şekilde $F(\lambda)$ 'nın n kararsız aralığını ve $C(x, \lambda)$ ve $S(x, \lambda)$ sırasıyla $C(0) = S'(0) = 1, C'(0) = S(0) = 0$ başlangıç şartlarıyla (3.1.4) ün çözümleri olsun. $\tilde{C}(x, \lambda)$ ve $\tilde{S}(x, \lambda)$ da (3.1.5) in çözümleridir. Son olarak $\varphi(x, \lambda)$, (3.1.4) ün

$$\varphi(x, \lambda) = [\beta_1(\lambda) - \beta_2(\lambda)] C(x, \lambda) + C'(\pi, \lambda) S(x, \lambda) \quad (3.1.45)$$

şeklinde çözümü olsun. Bu takdirde aşağıdaki sonuçları gösterebiliriz.

Lemma 3.1.3: Eğer Q potansiyeller ailesine karşılık gelen $F(\lambda)$ diskriminantı, kaybolmayan kararsız aralıklarının sonlu bir sayısına sahipse ve eğer $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ de Q nun herhangi iki elemanı ise, $0 \leq \tau \leq \pi$ şartını sağlayan bazı τ lar için

$$\tilde{q}(x) = q(x + \tau) \quad (3.1.46)$$

elde edilir.

İspat: Q nun bütün $q(x)$ potansiyellerinin,

$$q(x) = q_c(\pm x + \tau) \quad (3.1.47)$$

şeklinde verildiği bilinir. Burada $q_c(x)$, Q nun çift bir potansiyelidir ve τ da keyfi sabittir. Q da herhangi iki $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ potansiyeli için (3.1.47), (3.1.46) yı gerektirir. Çünkü, $q_c(x)$ çifttir ve Q nun bütün elemanları π periyodiktir.

Teorem 3.1.2 : Teorem 3.1.1 de eğer $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ ve $F(\lambda)$ diskriminantının kaybolmayan kararsız aralıklarının sayısı sonlu ise,

$$H(x) = \sum_{n \in \Lambda_0} \frac{2\beta_1(\mu_n) S(x, \mu_n) S(\tau, \mu_n) \varphi(x + \tau, \mu_n)}{\|S(x, \mu_n)\|^2} \quad (3.1.48)$$

şeklinde dir. Burada τ , $\tilde{q}(x) = q(x + \tau)$ bağıntısından elde edilir.

İspat: Teorem 3.1.1 den, $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ için

$$H(x) = \sum_{n \in \Lambda_0} \omega_n(x) \tilde{y}_n(x) \quad (3.1.49)$$

elde edilir. (3.1.20) ve (3.1.46) dan $\omega_n(x)$ ve $\tilde{y}_n(x)$,

$$\omega_n(x, \mu_n) = \sin \alpha C(x, \mu_n) - \cos \alpha S(x, \mu_n),$$

olup burada $\alpha = 0$ alınırsa

$$\omega_n(x, \mu_n) = \sin 0 C(x, \mu_n) - \cos 0 S(x, \mu_n),$$

yazılır. Böylece

$$\omega_n(x, \mu_n) = -S(x, \mu_n), \quad (3.1.50)$$

bulunur. Diğer yandan (3.1.29') de $\tilde{\alpha} = 0$ alınırsa $\tilde{y}_n(x)$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(x, \mu_n) &= \frac{-2([\tilde{S}'(\pi, \mu_n) - \beta_1(\mu_n)] \sin 0 + \tilde{S}(\pi, \mu_n) \cos 0)}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} \tilde{C}(x, \mu_n) + \\ &\quad \frac{[\tilde{C}'(\pi, \mu_n) \sin 0 + (\tilde{C}(\pi, \mu_n) - \beta_1(\mu_n)) \cos 0]}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} \tilde{S}(x, \mu_n) \\ \tilde{y}_n(x, \mu_n) &= \frac{-2 \left\{ \tilde{S}(\pi, \mu_n) \tilde{C}(x, \mu_n) + [\beta_1(\mu_n) - \tilde{C}(\pi, \mu_n)] \tilde{S}(x, \mu_n) \right\}}{\tilde{\omega}(\lambda_n)} \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

biçiminde elde edilir. (3.1.46) yı kullanarak, (3.1.5) den,

$$\tilde{C}(x, \lambda) = S'(\tau, \lambda)C(x + \tau, \lambda) - C'(\tau, \lambda)S(x + \tau, \lambda) \quad (3.1.52)$$

$$\tilde{S}(x, \lambda) = C(\tau, \lambda)S(x + \tau, \lambda) - S(\tau, \lambda)C(x + \tau, \lambda) \quad (3.1.53)$$

elde edilir. Aynı zamanda burada

$$C(\pi + \tau, \lambda) = C(\pi, \lambda)C(\tau, \lambda) - C'(\pi, \lambda)S(\tau, \lambda) \quad (3.1.54)$$

$$S(\pi + \tau, \lambda) = S(\pi, \lambda)C(\tau, \lambda) - S(\pi, \lambda)S(\tau, \lambda) \quad (3.1.55)$$

olduğunu not edelim. (3.1.29) da $x = \pi$ alınır ve (3.1.50) eşitliği birlikte kullanılırsa,

$$\omega_n(2\pi) = \beta_2(\mu_n)\omega_n(\pi) = -\beta_2(\mu_n)S(\pi, \mu_n)$$

$$0 = -\beta_2(\mu_n)S(\pi, \mu_n)$$

$$S(\pi, \mu_n) = 0$$

$$\omega'_n(2\pi) = -\beta_2(\mu_n)S'(\pi, \mu_n)$$

$$-1 = -\beta_2(\mu_n)S'(\pi, \mu_n), \quad \frac{1}{\beta_2(\mu_n)} = \beta_1(\mu_n)$$

olduğundan,

$$S'(\pi, \mu_n) = \beta_1(\mu_n) \quad (3.1.56)$$

bulunur. (3.1.10) dan, $F(\lambda) = \beta_1(\mu_n) + \beta_2(\mu_n)$ yazılır. Diğer yandan bu bağıntı $F(\lambda) = C(\pi) + S'(\pi)$ bağıntısı ile karşılaştırılırsa

$$C(\pi, \mu_n) = \beta_2(\mu_n) \quad (3.1.57)$$

elde edilir. Hochstadt [29] çalışmasında

$$\dot{\varpi}(\lambda_n) = \frac{d\varpi(\lambda)}{d\lambda} = k_n \int_0^1 |\omega_n|^2 dx = k_n \|\omega_n\|^2$$

eşitliğini göstermiştir. Bu formülde $\lambda = \mu$, $\lambda_n = \mu_n$ alınır

$$\dot{\varpi}(\mu_n) = \frac{d\varpi(\mu)}{d\mu} = k_n \int_0^1 |\omega_n|^2 dx = k_n \|\omega_n\|^2$$

bulunur. Daha sonra bu ifadede (3.1.40) ve (3.1.50) yerine yazılırsa,

$$\dot{\varpi}(\mu_n) = -\beta_1(\mu_n) \|S(x, \mu_n)\|^2 \quad (3.1.58)$$

elde edilir. (3.1.55) de ise $\tilde{S}(\pi, \mu_n)$, $\tilde{C}(x, \mu_n)$, $\tilde{S}(\pi, \mu_n)$, $\tilde{C}(x, \mu_n)$ ve $\dot{\varpi}(\mu_n)$ yerine yazılırsa,

$$\tilde{y}_n(x, \mu_n) = \frac{-2\beta_2(\mu_n)S(\tau, \mu_n)\varphi(x + \tau, \mu_n)}{\|S(x, \mu_n)\|^2} \quad (3.1.59)$$

bulunur. Sonuç olarak (3.1.59) ve (3.1.50) ifadeleri (3.1.49) da yerine konulursa,

$$H(x) = \sum_{n \in \Lambda_0} \frac{2\beta_2(\mu_n)S(x, \mu_n)S(\tau, \mu_n)\varphi(x + \tau, \mu_n)}{\|S(x, \mu_n)\|^2} \quad (3.1.60)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

.

Sonuç 3.1.1: Teorem 3.1.2 deki gibi eğer $F(\lambda)$ diskriminantının, yok olmayan kararsız aralıklarının sayısı sonlu ise, $n \geq 1$ için bu aralıklar I_n ile gösterilirse bu takdirde $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ minimal $\frac{\pi}{n}$ periyoduna sahip olup, $0 < \tilde{\tau} < \frac{\pi}{n}$ ve

$$\tilde{q}(x) = q(x + \tilde{\tau}) \quad (3.1.61)$$

olacak şekilde bir tek $\tilde{\tau}$ sabiti mevcuttur.

İspat: (3.1.60) de elde edilen $H(x)$ fonksiyonu

$$H(x) = \frac{2\beta_2(\mu_n)S(x, \mu_n)S(\tau, \mu_n)\varphi(x + \tau, \mu_n)}{\|S(x, \mu_n)\|^2} \quad (3.1.62)$$

şeklinde yazılabilir. Ossilasyon teoreminden, $S(\tau, \mu_n)$ nin $[0, \pi)$ aralığında n -tane sifra sahip olduğu bilindiğinden

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = \pi \quad (3.1.63)$$

kolayca yazılır. $\tau = \tau_1$ için $H(x) = 0$ olur. Bu nedenle Teorem 3.1.1 den $q(x) = \tilde{q}(x) = q(x + \tau_1)$ elde edilir. $q(x + 2\tau_1) = q(x + \tau_1) = q(x)$ den de $\tau = 2\tau_1$ bulunur. Benzer

şekilde, $\tau_n = n\tau_1 = \pi$ olduğunu göstermek de mümkündür. Bu nedenle $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ in minimal periyodu $\frac{\pi}{n}$ dir ve (3.1.61) ispatlanmış olur. Şimdi ise $\tilde{\tau}$ sabitinin tek olduğunu gösterelim. $0 < v \leq \frac{\pi}{n}$ ve

$$\tilde{q}(x) = q(x + \tilde{v}) \quad (3.1.64)$$

olacak şekilde en az bir $\tilde{v}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1.61) ve (3.1.64) den $\delta = |\tilde{v} - \tilde{\tau}|$ ve $0 < \delta \leq \frac{\pi}{n}$ olmak üzere

$$q(x) = q(x + \delta) \quad (3.1.65)$$

elde edilir. Böylece $q(x)$, $\frac{\pi}{n}$ den daha küçük bir periyoda sahiptir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\tilde{\tau}$ sabiti tektir.

4. HİLL OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN ESAS İNTEGRAL DENKLEMİNİN GENEL DEJENERELİĞİ

4.1. $K(x, t)$ ve $F(x, t)$ nin Genel Dejenereliği.

Teorem 4.1.1: Her $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ ve $n = 1, 2, \dots, N$ için $\tilde{\lambda}_n \neq \lambda_n$, $q(x+\pi) = q(x)$ ve $\tilde{q}(x+\pi) = \tilde{q}(x)$ olacak biçimde ters problemin

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^\pi K(x, s)F(t, s)ds = 0, \quad (0 \leq x \leq s \leq \pi)$$

esas integral denklemi genel dejeneredir. Dolayısıyla $K(x, t)$, $F(x, t)$ yi

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n f_n(x) \tilde{g}_n(t)$$

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n p_n(x) \tilde{\sigma}_n(t)$$

şeklinde göstermek mümkündür. Burada $f_n(x)$, $p_n(x)$ ve $\tilde{g}_n(t)$, $\tilde{\sigma}_n(t)$ ler sırasıyla periyodik Sturm Liouville denklemlerinin $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ potansiyellerine karşılık gelen çözümleridir.

İspat: $q(x)$ potansiyeli π periyotlu düzgün periyodik bir fonksiyon yani $q(x+\pi) = q(x)$ olsun. Diğer yandan

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (4.1.1)$$

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) \quad (4.1.2)$$

ve

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (4.1.1)$$

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi) \quad (4.1.3)$$

şeklinde iki Sturm-Liouville problemini gözönüne alalım. İlk probleme periyodik Sturm-Liouville problemi, ikincisine ise anti-periyodik Sturm-Liouville problemi denir. Şimdi,

$$\lambda_0 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \lambda_7 \leq \lambda_8 < \dots$$

ile ilk problemin spektrumunu,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_5 \leq \lambda_6 < \lambda_9 \leq \dots$$

ile de ikinci problemin spektrumunu gösterelim. Her iki spektrum,

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < ..$$

şeklinde tek bir eşitsizlik zinciri olarak sıralıdır. (4.1.1) - (4.1.2) ve (4.1.1) - (4.1.3) problemlerine ilaveten

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \\ y(0) &= y(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{4.1.2'}$$

problemini gözönüne alalım. Bu problemin spektrumunu da

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < ...$$

ile gösterelim. Ayrıca $\{\nu_n\}_0^\infty$ spektrumun,

$$\lambda_1 \leq \nu_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \nu_2 \leq \lambda_4 < ...$$

bağıntısını sağladığı iyice bilinmektedir [41]. Eğer

$$\lambda_{2N+1} = \lambda_{2N+2} \quad , \quad \lambda_{2N+3} = \lambda_{2N+4}, ...$$

ise $q(x)$ potansiyeline N-zonlu potansiyel denir. Bu takdirde N-zonlu potansiyel halinde $\forall n > N$ için

$$\lambda_{2n+1} = \nu_n = \lambda_{2n+2} \tag{4.1.4}$$

eşitliğini yazmak mümkündür.

Önce, $C(x, \lambda)$ ve $S(x, \lambda)$ ile; $C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = 1$ ve $C'(\pi, \lambda) = S(\pi, \lambda) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan (4.1.1) denkleminin çözümlerini gösterelim. Daha sonra,

$$F(\lambda) = S'(\pi, \lambda) + C(\pi, \lambda) \tag{4.1.5}$$

olacak şekilde $F(\lambda)$ Hill diskriminantını tanımlayalım. Periyodik problemin özdeğerleri $F(\lambda) = 2$ denkleminin kökleri, anti-periyodik problemlerin özdeğerleri $F(\lambda) = -2$ denkleminin kökleridir. Eğer (4.1.4) eşitliği sağlanırsa $\lambda_{2n+1}(= \lambda_{2n+2})$ nin bir katsayıya karşılık geldiği aşıkardır. ν_n sayıları $S(\pi, \lambda) = 0$ denkleminin kökleridir. Wronskiyan sabit olduğu için

$$W\{C, S\} = \begin{vmatrix} C & C' \\ S & S' \end{vmatrix} = C(\pi, \lambda) S'(\pi, \lambda) - C'(\pi, \lambda) S(\pi, \lambda) = 1 \tag{4.1.6}$$

elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.6) da $\lambda = \nu_n$ alınırsa

$$\begin{aligned} S'(\pi, \nu_n) + C(\pi, \nu_n) &= F(\nu_n) \\ C(\pi, \nu_n) S'(\pi, \nu_n) &= 1 \end{aligned}$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} S'(\pi, \nu_n) &= \frac{1}{C(\pi, \nu_n)} \\ \frac{1}{C(\pi, \nu_n)} + C(\pi, \nu_n) &= F(\nu_n) \\ C^2(\pi, \nu_n) - F(\nu_n)C(\pi, \nu_n) + 1 &= 0 \\ C(\pi, \nu_n) &= F(\nu_n) \mp \sqrt{F^2(\nu_n) - 1} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

olup, bu değerler $S'(\pi, \nu_n) = \frac{1}{C(\pi, \nu_n)}$ de yerine yazılırsa

$$S'(\pi, \nu_n) = F(\nu_n) \pm \sqrt{F^2(\nu_n) - 1} \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Eğer (4.1.4) sağlanırsa $F^2(\nu_n) = 1$ elde edilir. Bu nedenle (4.1.7) ve (4.1.8) den ve asimptotik formüllerden, $C(x, \lambda)$ ve $S'(x, \lambda)$ için

$$S'(\pi, \nu_n) = C(\pi, \nu_n) = (-1)^n \quad (4.1.9)$$

olduğu görülür.

Lemma (4.1.1): $S(x, \nu_n)$ çözüm fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} -S''(x, \lambda_n) + q(x)S(x, \lambda_n) &= \lambda_n S(x, \lambda_n), \\ -S''(x, \nu_n) + q(x)S(x, \nu_n) &= \nu_n S(x, \nu_n), \end{aligned}$$

dir.

Birinci denklem $S(x, \nu_n)$, ikinci denklem $S(x, \lambda_n)$ ile çarpılıp farkları alınır,

$$-S'''(x, \lambda_n)S(x, \nu_n) + S'''(x, \nu_n)S(x, \lambda_n) = (\lambda_n - \nu_n) S(x, \lambda_n)S(x, \nu_n)$$

bulunur. Son ifade 0 dan π ye integre edilirse,

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \nu_n) \int_0^\pi S(x, \lambda_n)S(x, \nu_n)dx &= \int_0^\pi (-S'''(x, \lambda_n)S(x, \nu_n) + S'''(x, \nu_n)S(x, \lambda_n)) dx, \\ \int_0^\pi S(x, \lambda_n)S(x, \nu_n)dx &= \frac{S'(x, \nu_n)S(x, \lambda_n) - S'(x, \lambda_n)S(x, \nu_n)}{(\lambda_n - \nu_n)} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$n \rightarrow \infty$ için $\lambda_n \rightarrow \nu_n$ olduğundan sağ taraf $\frac{0}{0}$ belirsizliğini verir. L'hospital kuralı gereği λ ya göre pay ve paydanın türevi alınır

$$\int_0^\pi S(x, \lambda_n) S(x, \nu_n) dx = S'(x, \nu_n) \dot{S}(x, \lambda_n) - S'(x, \lambda_n) S(x, \nu_n)$$

$\lambda_n = \nu_n$ alınır

$$\int_0^\pi S^2(x, \nu_n) dx = S'(x, \nu_n) \dot{S}(x, \nu_n) - S'(x, \nu_n) S(x, \nu_n)$$

$x = \pi$ alınır ve $S(\pi, \nu_n) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$c_n = \int_0^\pi S^2(x, \nu_n) dx = S'(\pi, \nu_n) \dot{S}(\pi, \nu_n) \quad (4.1.11)$$

normlaştırıcı sayıları bulunur. Aynı Hill diskriminantına sahip olan pekçok denklem mevcuttur. Potansiyel fonksiyonunu tek olarak hesaplamak için verilen bir Hill diskriminantına göre herbir kararsız aralığında bulunmak üzere bir ν_n seçmemiz ve (4.1.7) ve (4.1.8) den işaretini keyfi olarak (+) ya da (-) olacak şekilde oluşturmamız gerekir. Bu seçimin sonucu olarak (4.1.2') probleminin $\{\nu_n\}$ spektrumunu ve aynı zamanda (4.1.7)-(4.1.8) ve (4.1.11) eşitliklerinden normalize faktörleri tayin edebiliriz. Böylece spektral fonksiyonu ve aynı zamanda potansiyeli hesaplayabiliriz [37].

Şimdi $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ in aynı Hill diskriminantına sahip iki potansiyel olduğunu kabul edelim. $S(x, \lambda); S(0, \lambda) = 0, S'(0, \lambda) = 1$ başlangıç şartlarını sağlayan

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

denkleminin $S(0, \lambda) = 0, S'(0, \lambda) = 1$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $S(x, \lambda)$,

$$-y'' + \tilde{q}(x)y = \lambda y$$

denklemin $\tilde{S}(x, \lambda); \tilde{S}(0, \lambda) = 0, \tilde{S}'(0, \lambda) = 1$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\tilde{S}(x, \lambda)$ olsun. Sırasıyla $\{\nu_n\}, S(\pi, \lambda) = 0$ denkleminin kökünü, $\{\tilde{\nu}_n\}, \tilde{S}(\pi, \lambda) = 0$ denkleminin kökünü gösterebiliriz. Buna göre bu iki problem arasındaki dönüşüm operatörü

$$X[S(x, \lambda)] = \tilde{S}(x, \lambda) = S(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) S(t, \lambda) dt \quad (4.1.12)$$

olup burada $K(x, t)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \tilde{q}(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t)K$$

denklemini ve

$$K(x, 0) = 0$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x [\tilde{q}(z) - q(z)] dz$$

şartlarını sağlar. Bunu ispat etmek için

$$A = \frac{-d^2}{dx^2} + \tilde{q}(x)$$

$$B = \frac{-d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde iki operatörü gözönüne alalım. (4.1.12) nin her iki yanının x e göre diferansiyeli alınırsa,

$$(X\tilde{S})' = \tilde{S}'(x, \lambda) = S'(x, \lambda) + K(x, x)S(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} S(t, \lambda) dt \quad (4.1.13)$$

$$(X\tilde{S})'' = \tilde{S}''(x, \lambda) = S''(x, \lambda) + K'(x, x)S(x, \lambda) + K(x, x)S'(x, \lambda) \quad (4.1.14)$$

$$+ \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} S(t, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} S(t, \lambda) dt$$

$$A(XS) = A\tilde{S}(x, \lambda) = \tilde{S}''(x, \lambda) - \tilde{q}(x)\tilde{S}(x, \lambda) \quad (4.1.15)$$

olup aynı zamanda (4.1.14) eşitliği (4.1.15)'de yerine yazılırsa

$$AX(S) = S''(x, \lambda) + K'(x, x)S(x, \lambda) + K(x, x)S'(x, \lambda) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} S(x, \lambda) \quad (4.1.16)$$

$$+ \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} S(t, \lambda) dt - \tilde{q}(x)S(x, \lambda) - \tilde{q}(x) \int_0^x K(x, t) S(t, \lambda) dt$$

bulunur. Şimdi ise $X(BS)$ ' yi hesaplayalım.

$$BS = -S'' + q(x)S$$

olduğundan

$$X(BS) = XB(S) = -S''(x, \lambda) + q(x)S(x, \lambda) \quad (4.1.17)$$

$$- \int_0^x K(x, t) [S''(t, \lambda) - q(t)S(t, \lambda)] dt$$

olup, (4.1.17) ifadesinde $\int_0^x K(x, t) S''(t, \lambda) dt$ integraline iki kez kısmi integrasyon uygulanıp daha sonra bu (4.1.16) da yerine yazılırsa ve dönüşüm operatörünün $A(XS) = X(BS)$ özelliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
& S''(x, \lambda) - K'(x, x) S(x, \lambda) + K(x, x) S'(x, \lambda) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} S(x, \lambda) \\
& + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} S(t, \lambda) dt - \tilde{q}(x) S(x, \lambda) - \tilde{q}(x) \int_0^x K(x, t) S(x, \lambda) dt \\
& = S''(x, \lambda) - q(x) S(x, \lambda) + K(x, x) S'(x, \lambda) - \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} S(t, \lambda) - K(x, 0) S'(0, \lambda) \\
& + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} S(t, \lambda) dt - \int_0^x q(t) K(x, t) S(t, \lambda) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıda eşit olan terimlerin sadeleşmesi ve benzer terimlerin katsayılarının eşitliği prensibinden,

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \tilde{q}(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t)K$$

bulunur. Daha sonra S lerin katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& \left[K'(x, x) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} - \tilde{q}(x) \right] S(x, \lambda) \\
& = \left[-\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} - q(x) \right] S(x, \lambda) \\
& \Rightarrow K'(x, x) + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} \Big|_{\xi=x} \\
& = \tilde{q}(x) - q(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ potansiyelleri bir ve aynı N -zonlu Lyapunov fonksiyonuna sahipse, bu takdirde

$$\tilde{\nu}_n = \nu_n, \quad (n > N \text{ için}) \quad (4.1.18)$$

$$\tilde{S}'(\pi, \nu_n) = S'(\pi, \nu_n) = (-1)^n, \quad (n > N \text{ için}) \quad (4.1.19)$$

dir. Şimdi $K(x, t)$ fonksiyonunun yapısını bulmak için (4.1.18) ve (4.1.19) ü kullanalım. (4.1.11) de $x = \pi$ ve $\lambda = \nu_n$ yazılırsa

$$\tilde{S}(\pi, \nu_n) = S(\pi, \nu_n) + \int_0^\pi K(\pi, t) S(t, \nu_n) dt$$

bulunur. Burada $\tilde{S}(\pi, \nu_n) = S(\pi, \nu_n)$ olduğundan,

$$\int_0^\pi K(\pi, t) S(t, \nu_n) dt = 0 \quad (n > N \text{ için})$$

$$\int_0^{\pi} K(\pi, t) S(t, \nu_n) dt = \tilde{S}(\pi, \nu_n) \quad (n \leq N \text{ için})$$

($n \leq N$ için $\tilde{\nu}_n \neq \nu_n$ olup $\tilde{S}(\pi, \tilde{\nu}_n) \neq \tilde{S}(\pi, \nu_n)$ dir. Ayrıca $\tilde{S}(\pi, \tilde{\nu}_n) = 0$ olduğundan $\tilde{S}(\pi, \nu_n) \neq 0$ dir.) elde edilir. Bu nedenle;

$$K(\pi, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{S}(\pi, \nu_n)}{c_n} S(t, \nu_n) \quad (4.1.20)$$

dir. (4.1.11) in her iki yanının türevi alınır $x = \pi$ ve $\lambda = \nu_n$ yazılırsa

$$\tilde{S}'(\pi, \nu_n) = S'(\pi, \nu_n) + K(\pi, \pi) S(\pi, \nu_n) + \int_0^{\pi} \frac{\partial K}{\partial x} S(t, \nu_n) dt$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial K}{\partial x} S(t, \nu_n) dt = \tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n) \quad (n > N \text{ için})$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n)}{c_n} S(t, \nu_n) \quad (4.1.21)$$

olur. Böylece (4.1.20) ve (4.1.21) den ($0 \leq x \leq s \leq \pi$) için $\tilde{\theta}(x, \lambda)$ ve $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$; $\tilde{\theta}(\pi, \lambda) = \tilde{\varphi}'(\pi, \lambda) = 1$, $\tilde{\theta}'(\pi, \lambda) = \tilde{\varphi}(\pi, \lambda) = 0$ sınır şartlarını sağlayan

$$-y'' + \tilde{q}(x)y = \lambda y$$

denkleminin çözümleri olmak üzere

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^N \left\{ \tilde{S}(\pi, \nu_n) \tilde{\theta}(x, \nu_n) + \left[\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n) \right] \tilde{\varphi}(x, \nu_n) \right\} \frac{S(t, \nu_n)}{\|S(t, \nu_n)\|^2} \quad (4.1.22)$$

elde edilir. Böylece $K(x, t)$ fonksiyonunun genel dejenereliği gösterilmiş olunur.

Şimdi ise $F(x, t)$ nin genel dejenereliğini gösterelim.

Teorem 4.1.2: Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ spektrumlarının tamamı çakışsın. μ_n ve $\tilde{\mu}_n$ spektrumlarının ise sonlu n 'ler için farklı olacak şekilde yani $n > N$ için $\nu_n = \tilde{\nu}_n$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\nu_n \neq \tilde{\nu}_n$,

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \int_0^{\infty} S(x, \lambda) S(t, \lambda) d\{\tilde{\rho}(\lambda) - \rho(\lambda)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tilde{c}_n} S(x, \tilde{\lambda}_n) S(t, \tilde{\lambda}_n) - \frac{1}{c_n} S(x, \lambda_n) S(t, \lambda_n) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

olmak üzere

$$F(x, t) + K(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0 \quad (4.1.24)$$

ters problemin esas integral (Gelfand-Levitan-Marchenko) denklemi genel dejenere denklemdir.

İspat: (4.1.18) integral denkleminde $x = \pi$ alınırsa

$$F(\pi, t) = -K(\pi, t) - \int_0^\pi K(\pi, s) F(s, t) ds \quad (4.1.25)$$

olur. (4.1.25) denkleminde $K(\pi, t)$ yerine (4.1.20) eşitliğini, F yerine (4.1.23) açılımını, λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ yerine sırasıyla ν_n ve $\tilde{\nu}_n$ alınırsa, bu takdirde

$$\alpha_n = \frac{\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n)}{c_n}, \quad c_n = \|S(t, \nu_n)\|^2 \quad (4.1.26)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F(\pi, t) &= - \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n)}{\|S(t, \nu_n)\|^2} S(t, \nu_n) + \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n)}{\|S(s, \nu_n)\|^2} S(s, \nu_n) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{1}{c_n} S(s, \tilde{\nu}_n) S(t, \tilde{\nu}_n) - \frac{1}{c_n} S(s, \nu_n) S(t, \nu_n) \right\} \right] ds \right\} \\ &= - \left\{ \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) + \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(s, \nu_n) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\tilde{c}_n} S(s, \tilde{\nu}_n) S(t, \tilde{\nu}_n) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{c_n} S(s, \nu_n) S(t, \nu_n) ds \right\} \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

elde edilir. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\begin{aligned} &= - \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(s, \nu_n) \sum_{k=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_k} S(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \tilde{\nu}_k) ds \\ &\quad + \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} S(s, \nu_n) S(s, \nu_n) \right\} ds \\ &= - \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(s, \nu_n) \sum_{k=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_k} S(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \tilde{\nu}_k) ds \\ &\quad + \sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{1}{c_n} S(t, \nu_n) \int_0^\pi |S(s, \nu_n)|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |S(s, \nu_n)|^2 ds &= \|S(s, \nu_n)\|^2 = c_n \text{ olduğu gözönüne alınırsa} \\
&= - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(s, \nu_n) \sum_{k=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_k} S(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \tilde{\nu}_k) ds
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

bulunur.

Teorem 4.1.3: (4.1.1) denkleminin çözümleri $S(s, \nu_n)$ ve $S(s, \tilde{\nu}_n)$ olmak üzere $k \leq N$ için $\nu_n \neq \tilde{\nu}_n$ ise

$$\int_0^\pi S(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k) ds = \frac{S(\pi, \nu_n) S'(\pi, \tilde{\nu}_k) - S'(\pi, \nu_n) S(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k} \tag{4.1.29}$$

dir.

İspat: Farklı ν_n ve $\tilde{\nu}_k$ 'lara karşılık gelen $S(s, \nu_n)$ ve $S(s, \tilde{\nu}_k)$, (4.1.1) denkleminin çözümleri olmak üzere

$$\begin{aligned}
[-S''(s, \nu_n) + q(s)S(s, \nu_n) &= \nu_n S(s, \nu_n)] \\
[-S''(s, \tilde{\nu}_k) + q(s)S(s, \tilde{\nu}_k) &= \tilde{\nu}_k S(s, \tilde{\nu}_k)]
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Birinci denklem $S(s, \tilde{\nu}_k)$ ile ikinci denklemi ise $S(s, \nu_n)$ ile çarpılır, taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\nu_n - \tilde{\nu}_k) S(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k) = [S''(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \nu_n) - S''(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k)]$$

elde edilir. Diğer yandan

$$[S''(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \nu_n) - S''(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k)] = [S'(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \nu_n) - S'(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k)]'$$

olup, son eşitliğin her iki yanının 0'dan π 'ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
(\nu_n - \tilde{\nu}_k) \int_0^\pi S(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k) ds &= [S'(s, \tilde{\nu}_k) S(s, \nu_n) - S'(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k)] \Big|_0^\pi \\
\int_0^\pi S(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k) ds &= \frac{S'(\pi, \tilde{\nu}_k) S(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n) S(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k}
\end{aligned}$$

bulunur. $F(\pi, t)$ için

$$a_n = \frac{1}{\tilde{c}_n} \left\{ -S(\pi, \nu_n) \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{S'(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k} + S'(\pi, \nu_n) \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{S(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k} \right\} \tag{4.1.30}$$

olacak şekilde

$$F(\pi, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_n}{\tilde{c}_k} S(t, \tilde{\nu}_k) \left[- \int_0^\pi S(s, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k) ds \right]$$

yazılır. Diğer yandan (4.1.30) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_n}{\tilde{c}_k} S(t, \tilde{\nu}_k) \frac{S'(\pi, \tilde{\nu}_k) S(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n) S(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k} \\ &= \sum_{n=0}^N \left\{ -\frac{S(\pi, \nu_n)}{\tilde{c}_n} \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{S'(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k} + \frac{S'(\pi, \nu_n)}{\tilde{c}_n} \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{S(\pi, \tilde{\nu}_k)}{\nu_n - \tilde{\nu}_k} \right\} S(t, \tilde{\nu}_k) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.30) göz önüne alındığında

$$F(\pi, t) = \sum_{n=0}^N a_n S(t, \tilde{\nu}_n) \quad (4.1.31)$$

olur. (4.1.24) denkleminin her iki yanının x 'e göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} + K(x, x) F(x, t) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} F(s, t) ds = 0$$

veya

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial K}{\partial x} - K(x, x) F(x, t) - \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} F(s, t) ds$$

bulunur. Bu son eşitlikte $x = \pi$, $K(\pi, \pi)$ yerine sabit, $\frac{\partial K}{\partial x}$ yerine (4.1.21) ve F yerine ise (4.1.23) eşitliğindeki değerler yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n)}{\|S(t, \nu_n)\|^2} S(t, \nu_n) - \sum_{n=0}^N a_n S(t, \tilde{\nu}_n) \\ &\quad - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{S}'(\pi, \nu_n) - S'(\pi, \nu_n)}{\|S(t, \nu_n)\|^2} S(t, \nu_n) \\ &\quad \left\{ \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{\tilde{c}_k} S(s, \tilde{\nu}_k) S(t, \tilde{\nu}_k) - \frac{1}{c_k} S(s, \nu_k) S(t, \nu_k) \right) \right\} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) - \sum_{n=0}^N a_n S(t, \tilde{\nu}_n) \\ &\quad - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) \left\{ \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{\tilde{c}_k} S(s, \tilde{\nu}_k) S(t, \tilde{\nu}_k) - \frac{1}{c_k} S(s, \nu_k) S(t, \nu_k) \right) \right\} ds \\ &= \sum_{n=0}^N (\alpha_n - a_n) S(t, \tilde{\nu}_n) \\ &\quad - \int_0^\pi \left\{ \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) \frac{1}{\tilde{c}_k} \sum_{n=0}^\infty S(s, \tilde{\nu}_k) S(t, \tilde{\nu}_k) \right\} ds \\ &\quad + \int_0^\pi \left\{ \sum_{n=0}^N \alpha_n S(t, \nu_n) \frac{1}{c_k} \sum_{n=0}^\infty S(s, \nu_k) S(t, \nu_k) \right\} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Öz fonksiyonların ortogonallığı ve (4.1.21) eşitliği kullanılır, (4.1.20) için yapılan işlemlerin benzeri burada tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= \sum_{n=0}^N (\alpha_n - a_n) S(t, \tilde{\nu}_n) \\ &\quad - \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_n}{\tilde{c}_k} S(t, \tilde{\nu}_k) \int_0^\pi S(t, \nu_n) S(s, \tilde{\nu}_k) ds \\ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= \sum_{n=0}^N [\alpha_n - a_n - a_n] S(t, \tilde{\nu}_n)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan

$$b_n = \alpha_n - 2a_n$$

olmak üzere

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = \sum_{n=0}^N b_n S(t, \tilde{\nu}_n) \quad (4.1.32)$$

(4.1.23) ile tanımlı $F(x, t)$ 'nin

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} - \tilde{q}(x) F(x, t) = \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} - q(t) F(x, t) \quad (4.1.33)$$

denklemini sağladığını göstermek mümkündür. $\theta(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$, $\theta(\pi, \lambda) = \psi'(\pi, \lambda) = 1$, $\theta'(\pi, \lambda) = \psi(\pi, \lambda) = 0$ koşullarını sağlayan (4.1.1) denkleminin çözümleri ise,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^N [a_n \theta(x, \tilde{\nu}_n) + b_n \psi(x, \tilde{\nu}_n)] S(t, \nu_n) \quad (4.1.34)$$

olur. Ayrıca (4.1.23) açılımında $F(x, t)$ fonksiyonunun

$$F(x, t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.1.35)$$

başlangıç koşulunu sağladığı açıktır. Dolayısıyla $F(x, t)$ genel dejeneredir.

4.2. Tek Spektrum Durumunda Ters Problem:

$q(x)$ reel sürekli fonksiyon, $q(\pi - x) = q(x)$ ve h sonlu reel sayı olacak şekilde

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.2.1)$$

$$y'(0) - h y(0) = 0, \quad y'(\pi) + h y(\pi) = 0 \quad (4.2.2)$$

Sturm-Liouville problemlerinin oluşturduğu S -sınıfını gözönüne alalım. (4.2.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde iyi bilinen aşağıdaki lemma söz konusudur [30].

Lemma 4.2.1: Sturm-Liouville probleminin S -sınıfına ait olması için

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = (-1)^n \quad (4.2.3)$$

eşitliğinin sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat: a) Gereklik: $q(\pi - x) = q(x)$ olduğu için λ_n özdeğerine karşılık gelen

$$\psi_n(x) = \psi(\pi - x, \lambda_n)$$

de (4.2.1)-(4.2.2) probleminin öz fonksiyonudur. Bu sebeple α_n ler sabit sayılar olacak biçimde

$$\psi_n(x) = \varphi(\pi - x, \lambda_n) = \alpha_n \varphi(x, \lambda_n) \quad (4.2.4)$$

olur. $x = \frac{\pi}{2}$ için $\varphi(\frac{\pi}{2}, \lambda_n) = \alpha_n \varphi(\frac{\pi}{2}, \lambda_n)$ dir, dolayısıyla eğer $\varphi(\frac{\pi}{2}, \lambda_n) \neq 0$ ise $\alpha_n = 1$ bulunur.

Şimdi de $\varphi(\frac{\pi}{2}, \lambda_n) = 0$ olsun , yani $\varphi'(\frac{\pi}{2}, \lambda_n) \neq 0$ dir. (4.2.4) eşitliği x e göre diferansiyellenirse ve $x = \frac{\pi}{2}$ alınrsa

$$-\varphi'(\frac{\pi}{2}, \lambda_n) = \alpha_n \varphi'(\frac{\pi}{2}, \lambda_n)$$

elde edilir ve buradan $\alpha_n = -1$ bulunur.

Daha sonra (4.2.4) de $x = 0$ alınrsa

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = \pm 1$$

elde edilir. Şimdi Sturm'un Ossilasyon Teoremi kullanılırsa (4.2.3) eşitliği bulunur, dolayısıyla gereklilik ispatlanmış olur.

b) Yeterlik: $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$$

olsun. Ayrıca

$$\psi_n(x) = (-1)^n \varphi(\pi - x, \lambda_n)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Bu takdirde λ_n özdeğerine karşılık gelen $\psi_n(x)$ ler

$$-y'' + q(\pi - x)y = \lambda y, \quad (4.2.5)$$

$$y'(0) - H y(0) = 0, \quad y'(\pi) + h y(\pi) = 0 \quad (4.2.6)$$

probleminin öz fonksiyonları olur. Buna ilaveten

$$\int_0^\pi \psi_n^2(x) dx = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

yazılır. Böylece (4.2.1)-(4.2.2) ve (4.2.5)-(4.2.6) problemlerinin spektral fonksiyonları

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\int_0^\pi \psi_n^2(x) dx} \quad \text{ve} \quad \rho_1(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx}$$

olup birbirleri ile çıktıkları görülür. Marchenko'nun [17] teklik teoreminden $q(\pi - x) = q(x)$ ve $H = h$ elde edilir. Bununla yeterlik ispatlanmış olur. (4.2.1) denkleminde faydalanarak aşağıdaki lemma kolayca ispatlanır.

Lemma 4.2.2: λ ya göre türev nokta ile gösterilirse,

$$c_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx = \dot{\varphi}'(\pi, \lambda_n) \varphi(\pi, \lambda_n) - \varphi'(\pi, \lambda_n) \dot{\varphi}(\pi, \lambda_n) \quad (4.2.7)$$

dir. (4.2.1)-(4.2.2) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ olacak şekilde

$$\dot{\varphi}'(\pi, \lambda) + H \dot{\varphi}(\pi, \lambda) = \pi (\lambda_0 - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k - \lambda)}{k^2} = \dot{\Phi}(\lambda) \quad (4.2.8)$$

biçiminde yazılır. Son eşitlik λ ya göre diferansiyellenirse ve $\lambda = \lambda_n$ alınırsa

$$\varphi'(\pi, \lambda_n) + H \varphi(\pi, \lambda_n) = \Phi(\lambda_n)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\varphi'(\pi, \lambda_n) = -H \varphi(\pi, \lambda_n)$$

olduğu için (4.2.7) den

$$c_n = \varphi(\pi, \lambda_n) \{ \varphi'(\pi, \lambda_n) + H \varphi(\pi, \lambda_n) \} = \varphi(\pi, \lambda_n) \Phi(\lambda_n) \quad (4.2.9)$$

bulunur.

Eğer Sturm-Liouville problemi S sınıfına ait ise (4.2.9) dan ve Lemma 4.2.1 den

$$c_n = (-1)^n \Phi(\lambda_n) \quad (4.2.10)$$

buluruz. Tersine klasik asimptotik formül sağlanmak üzere $\{\lambda_n\}$ spektrumu verildiğinde (4.2.8)-(4.2.10) formüllerinden faydalanarak c_n normlaştırıcı sayıları bulunur. Spektrum ile birlikte c_n ler $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu tanımlar ve $\rho(\lambda)$ ya göre ise (4.2.1)-(4.2.2) şeklinde

Sturm Liouville problemini tanımlamak mümkündür. Şimdi bu problemin S sınıfına ait olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 4.2.1 den dolayı

$$\varphi(\pi, \lambda) = (-1)^n$$

bağıntısını göstermek yeterlidir. (4.2.9) dan

$$c_n = \varphi(\pi, \lambda_n) \Phi(\lambda_n)$$

elde edilir. Diğer taraftan $c_n = (-1)^n \Phi(\lambda_n)$ olur. c_n için son iki eşitlik karşılaştırılırsa

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$$

bulunur, dolayısıyla gereken ispatlanmıştır.

Böylece klasik asimptotiği sağlayan bir $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektrumuna ve $\varepsilon_n = (-1)^n$ dizisine göre S sınıfına ait (4.2.1)-(4.2.2) Sturm Liouville problemini tanımlamak mümkündür.

$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin ilk N terimini değiştirelim. Bu takdirde $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ olmak üzere yeni bir $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi elde edilir. Bu yeni oluşan $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine ve (4.2.10) formülü ile tanımlanan c_n sayılarına göre, tekrar S sınıfına ait olacak biçimde bir başka

$$-y'' + \tilde{q}(x)y = \lambda y, \quad \tilde{q}(\pi - x) = \tilde{q}(x)$$

$$y'(0) - \tilde{h} y(0) = 0, \quad y'(\pi) + \tilde{h} y(\pi) = 0, \quad h \neq \tilde{h} \quad (4.2.12)$$

Sturm Liouville problemini tanımlamak mümkündür. (4.2.1) denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ ve (4.2.11) denkleminin $\tilde{\varphi}(0, \lambda) = 1$, $\tilde{\varphi}'(0, \lambda) = \tilde{h}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, s) \varphi(s, \lambda) ds \quad (4.2.13)$$

formülü sağlanacak şekilde $K(x, s)$ fonksiyonu vardır [30]. Burada $K(x, t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \tilde{q}(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t)K, \quad (0 \leq t \leq x) \quad (4.2.14)$$

denklemini ve

$$K(x, x) = (h - \tilde{h}) + \frac{1}{2} \int_0^x [\tilde{q}(t) - q(t)] dt \quad (4.2.15)$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial s} - hK \right) \Big|_{s=0} = 0 \quad (4.2.16)$$

koşullarını sağlar.

Böylece aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 4.2.1: $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ ve $n = 1, 2, \dots, N$ için $\tilde{\lambda}_n \neq \lambda_n$ olsun. $\{\tilde{\lambda}_n\}$ ve $\{\lambda_n\}$ spektrumları klasik asimptotik formüllerini sağlarsa, ters problemin

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^\pi K(x, s)F(s, t) ds = 0, \quad (0 \leq t \leq x \leq \pi) \quad (4.2.17)$$

esas integral denklemi genel dejeneredir.

İspat: (4.2.13) eşitliğinin her iki yanının x 'e göre diferansiyeli alınırsa

$$\tilde{\varphi}'(x, \lambda) = \varphi'(x, \lambda) + K(x, x)\varphi(x, \lambda) + \int_0^\pi \frac{\partial K}{\partial x} \varphi(s, \lambda) ds$$

bulunur. Daha sonra bu eşitlikten ve (4.2.13) ten

$$\tilde{\varphi}'(x, \lambda) + h\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi'(x, \lambda) + h\varphi(x, \lambda) + K(x, x)\varphi(x, \lambda) + \int_0^\pi \left(\frac{\partial K}{\partial x} + hK \right) \varphi(s, \lambda) ds \quad (4.2.18)$$

yazılır. (4.2.17) de $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ alınırsa $n \leq N$ için

$$\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n = \int_0^\pi K(\pi, s) \varphi(s, \lambda_n) ds \quad (4.2.19)$$

ve $n > N$ için ise

$$\int_0^\pi K(\pi, s) \varphi(s, \lambda_n) ds = 0 \quad (4.2.20)$$

elde edilir. Böylece (4.2.19) ve (4.2.20) den

$$K(\pi, s) = \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n}{c_n} \varphi(s, \lambda_n) \quad (4.2.21)$$

bulunur.

Şimdi (4.2.18) de $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ alınırsa $n > N$ için

$$(-1)^n (h - \tilde{h}) = (-1)^n K(\pi, \pi) + \int_0^\pi \left(\frac{\partial K}{\partial x} + hK \right) \Big|_{x=\pi} \varphi(s, \lambda_n) ds = 0$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken son eşitlikte integral sifıra yakınsadığı için

$$K(\pi, \pi) = h - \tilde{h},$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial K}{\partial x} + hK \right) \Big|_{x=\pi} \varphi(s, \lambda_n) ds = 0, \quad (n > N) \quad (4.2.22)$$

elde edilir. Daha sonra (4.2.18) de $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ alınırsa $0 \leq n \leq N$ için

$$\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n (h - \tilde{h}) = \int_0^\pi \left(\frac{\partial K}{\partial x} + hK \right) \Big|_{x=\pi} \varphi(s, \lambda_n) ds \quad (4.2.23)$$

yazılır. (4.2.22) ve (4.2.23) eşitliklerinden

$$\left(\frac{\partial K}{\partial x} + hK \right) \Big|_{x=\pi} = \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n (\tilde{h} - h)}{c_n} \varphi(s, \lambda_n) \quad (4.2.24)$$

bulunur. Ayrıca (4.2.21) ve (4.2.24) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n \tilde{h}}{c_n} \varphi(s, \lambda_n) \quad (4.2.25)$$

olur. Böylece (4.2.21) ve (4.2.25) den ise

$$K(x, s) = \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n}{c_n} \tilde{C}(x, \lambda_n) + \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n \tilde{h}}{c_n} \tilde{S}(x, \lambda_n) \right\} \varphi(s, \lambda_n), \quad (0 \leq s \leq x \leq \pi) \quad (4.2.26)$$

elde edilir. Burada $\tilde{C}(x, \lambda)$ ve $\tilde{S}(x, \lambda)$ fonksiyonları (4.2.11) denkleminin $\tilde{C}(\pi, \lambda) = \tilde{S}'(\pi, \lambda) = 1$, $\tilde{C}'(\pi, \lambda) = \tilde{S}(\pi, \lambda) = 0$ sınır koşullarını sağlayan çözümleridir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.2: Her $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ ve $n = 1, 2, \dots, N$ için $\tilde{\lambda}_n \neq \lambda_n$, $q(x - \pi) = q(x)$, $\tilde{q}(x - \pi) = \tilde{q}(x)$ olacak biçimde

$$\tilde{q}(x) - q(x) = \sum_{k=1}^N k_n [\Psi(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n)]'$$

dir.

İspat: (4.2.14) eşitliğinden

$$\tilde{q}(x) - q(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx} \quad (4.2.27)$$

elde edilir. Daha sonra (4.2.26) da $s = x$ alınır ve eşitliğin her iki yanı x 'e göre diferansiyellenirse

$$= \sum_{n=0}^N \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n}{c_n} \tilde{C}(x, \lambda_n) + \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n \tilde{h}}{c_n} \tilde{S}(x, \lambda_n) \right] \varphi(x, \lambda_n) \right\} \quad (4.2.28)$$

bulunur. Bu değerler (4.2.27) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(x) - q(x) &= \sum_{n=0}^N 2 \left\{ \frac{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n}{c_n} \tilde{C}'(x, \lambda_n) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n \tilde{h}}{c_n} \tilde{S}'(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n) \right\} + \\
&\quad + \varphi'(x, \lambda_n) \left\{ \frac{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n}{c_n} \tilde{C}(x, \lambda_n) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n \tilde{h}}{c_n} \right\} \tilde{S}(x, \lambda_n) \\
\\
&= \frac{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - (-1)^n}{c_n} \tilde{C}(x, \lambda_n) + \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + h\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) + (-1)^n \tilde{h}}{c_n} \tilde{S}(x, \lambda_n) \\
&= \Psi(x, \lambda_n), \quad \varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.2.27) formülü (4.2.26) biçiminde yazıldığı görüldür. Böylece teorem de ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

- [1] Floquet G., "Sur les equations differentielles lineares a coefficients periodics" Ann de l'Ecole Normale, 2 Serie Vol.12 (1883) 47-88.
- [2] Hill G.W., "On the part of the motion of the lunar perigee which of the mean motions of the sun and moon", Acta Math., Vol.8 (1886) 1-36.
- [3] Poincare H., "Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamic" Acta Math., Vol.13 (1890) 5-270.
- [4] Liapounoff M.A., "Probleme general de stabilite du mouvement" Ann. Sci. Univ. Toulouse, Ser 2, Vol.9 (1907) 203-204.
- [5] Hamel G., "Uber die lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung periodischen Koeffizienten" Math. Ann. Bd.73 (1913) 371-412.
- [6] Haupt O., "Uber lineare homogene Differentialgleichungen 2.Ordnung periodischen Koeffizienten" Math. Ann. Bd.79 (1919) 278-285.
- [7] Bloch F., "Uber die Quantenmechanic der Elektronen in Kristallgitternlineare " Vol.52 (1928) 555-600.
- [8] Kramers H.A., "Das Eigenwertprobleme in eindimensionalen periodischen Kraftfeldern" Physica Vol.2 (1935) 483-490.
- [9] Krein M.G., "On certain problems on the maximum and minimum characteristic values and on the Lyapunov zones of stability" Amer. Math.Translations, Ser 2 Vol.1 (1955) 163-187.
- [10] Titchmarsh E.C., "Eigenfunction problems with periodic potentials" Proc. Roy. Soc.Vol.203 (1950) 501-514.
- [11] Hochstadt H., "Function theoretic properties of the discriminant of Hill's equation" Math. Z. Bd.82 (1963) 237-242.
- [12] Hochstadt H., "On the determination of a Hill's equation from its spectrum I,II." Arc. Rat Mech. Anal. Vol.19(1965) 353-362 , Vol.23 (1966) 237-238.
- [13] Rofe-Beketov F.S., "The spectrum of non-selfadjoint differential operators with periodic coefficients" Soviet Math. Vol.4 (1963) 1563-1566
- [14] Magnus W. and Winkler S., "Hill's equation" Newyork Interscience Wiley (1966).
- [15] Eastham M.S.P., "The spectral theory of periodics differential equations" Edinburgh and London :Scottish Academic Press (1973).
- [16] Novikov S.P., "The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation" Funct. Anal. Appl. Vol.8 No.3 (1975) 236-246.

- [17] Marchenko V.A. and Ostrovskii I.V., “A characterization of the spectrum of Hill’s operator” Math. USSR Sb., Vol.26 No.4 (1975) 493-554.
- [18] McKean H. and Van Moerbeke P., “The spectrum of Hill’s equation” Invent Math. Vol.30 No.3 (1975) 217-274.
- [19] Trubowitz E., “The inverse problem for periodic potentials” Comm. Pure Appl. Math. Vol.30 (1977) 321-337.
- [20] Guseniov G.S., “On the quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with periodic coefficients” Vestnik Moskov Univ. Ser I Math. Mekh. No.3 (1984) 14-21.
- [21] Guseniov G.S., “On the spectral analysis of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators” Soviet Math. Dokl. Vol.32 No.3 (1985) 859-862.
- [22] Guseniov G.S., “Spectrum and eigen function expansion for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with periodic coefficients” Spectral Theory of Sturm-Liouville operators and Its Appl. Vol.6 (1985) 56-97.
- [23] Kreyszig E. “Introductory Functional Analysis with Applications” Newyork, (1978).
- [24] Şuhubi E.S., “Fonksiyonel Analiz” İ.T.Ü. İstanbul (2001).
- [25] Levitan B.M. and Sargysan I.S. “Introduction to Spectral Theory” Moscov, Nauka (1970).
- [26] Ocak R., “Kompleks Analiz” Atatürk Üniv. Erzurum (1993).
- [27] Idemen M., “Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi” Işık Üniv. İstanbul (1999).
- [28] Naimark M.A., “Linear Differential Operators” NAUKA, (1969).
- [29] Hochstadt H., “The invers Sturm-Liouville problem” Comm. On Pure and Appl.Math. Vol.26 (1973) 715-729.
- [30] Levitan B.M. and Gasymov M.G., “The determination of a differantial equation from two spectra” Uspekhi Mat. Nauk Vol.19 (2) (1954) 3-63
- [31] Cazes A. and Hochstadt H., “İnvers Sturm-Liouville problems and Hill’s equation” Journal of Math. Anal and Appl.Vol.111 (1985) 606-621.
- [32] Levin B.JA., “Distribution of Zeros of Entire Functions” Amer Math. Soc. (1964).
- [33] Borg G., “Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe. Bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte” Acta Math.Vol.78 (1946) 1-96.
- [34] Goldberg W. and Hochstadt H., “On a Hill’s equation with two gaps in its spectrum” Siam J.Appl.Math. Vol.10 No.5 (1979) 1069-1076.
- [35] Goldberg W., “On a periodic boundary value problem with a finite number of gaps in its spectrum” J.Math.Anal. Appl. Vol.79 (1981) 502-516.

- [36] Hochstadt H., "A special Hill's equation with discontinuous coefficients" Amer. Math. Monthly Vol.70 (1963) 18-26.
- [37] Hochstadt H., "Function theoretic properties of the discriminant of Hill's equation" Math. Vol.82 (1963) 237-242.
- [38] Hochstadt H., "A special Hill's equation with discontinuous coefficients" Amer. Math. Monthly Vol.70 (1963) 18-26.
- [39] Eastham M.S.P., "Results and problems in the spectral theory of periodic differential equations" Lect. Notes in Math. Vol.448 (1975) 126-135.
- [40] Kolmogorov A. and Fomin A., "Introductory real analysis" Dover Publications, Inc., New York (1970).
- [41] Hochstadt H., "An inverse problem for a Hill's equation" Siam J. Appl. Math. Vol.31 No.2 (1976).
- [42] Hochstadt H., "A direct and inverse problem for a Hill's equation with double eigenvalues" Journal of Math. Anal and Appl.66 (1978) 507-513.
- [43] Lax P.D., "Periodic solutions of the KdV equation" Comm. on pure and Appl. Math. Vol.28 (1975) 141-188.
- [44] Akhiezer N.I. and Glazman I.M., "Theory of linear operators in Hilbert Space" Ungar, New York, Vol.2 (1963).
- [45] McKean H.P. and Van Moerbeke P., "The spectrum of Hill's equation" Invent Math. Vol.30 (1975) 217-274.
- [46] Levitan B.M. "Inverse Sturm-Liouville Problems" Utrecht, The Netherlands (1987).
- [47] Coddington E.A. and Levinson N., "Theory of ordinary differential equations" McGraw-Hill (1955).
- [48] Yaslan I., "Periyodik ve süreksiz fonksiyon katsayılı Sturm-Liouville denkleminin spektral teorisi üzerine" İzmir, (1996).
- [49] Aydın M., "Hill denkleminin spektral analizi" Yüksek Lisans tezi Elazığ (1999).
- [50] Koyunbakan H., "Singüler Sturm Liouville Operatörünün Spektral Teorisi" Doktora tezi (2002).
- [51] Baş E., "Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters Problemleri" Doktora tezi (2006).
- [52] İç Ü., "Kanonik Dirac Operatörü için Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Ters Problem" Doktora tezi Elazığ, (2003).
- [53] Kayalar M., "Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm Liouville-Operatörü için Ters Problem" Doktora tezi Erzurum, (2003).

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Elazığ da doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı.1990 yılında Fırat Üniversitesi Matematik bölümünü kazandı. 1994 yılında ilk görev yeri olan Kars Digor Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev aldı.1996 yılında Elazığ Karşıyaka Lisesine atandı. 1997 yılında F.Ü. Fen-Ed. Fakültesi Matematik Bölümünde açılan Öğretim Görevlisi kadrosunda görev yapmaya başladı.1999 yılında ise Yüksek Lisansını tamamladı. Halen Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.