

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFÜZYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Yavuz UĞURLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

Doç. Dr. Doğan KAYA

ELAZIĞ , 2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFÜZYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Yavuz UĞURLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, 03/08/2005 Tarihinde aşağıda belirtilen Jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile Başarılı / Başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Doğan KAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12/08/2005 tarih ve 2005-26/1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin önerilmesi yönlendirilmesi ve tamamlanmasında, yoğun çalışma programına rağmen bana vakit ayırıp gerekli yardım ve ilgisini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Doğan KAYA'ya minnet ve şükranlarımı sunarım, ayrıca bu çalışmanın oluşumunda yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Etibar Penahov'a ve Arş. Gör. Dr. Necat POLAT'a teşekkürlerimi sunarım.

Yavuz UĞURLU



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İçindekiler	I
Simgeler Listesi.....	II
Özet.....	III
Abstract	IV
1. Temel Tanımlar ve Teoremler.....	1
1.1.Difüzyon Denklemlerin Çözümlerinin Blow-up'ı (Patlaması).....	7
1.1.1.Adi Diferensiyel Denklemlerde Blow-up	9
1.1.2.Kısmi Diferensiyel Denklemlerde Blow-up	10
1.1.3. Parabolik Denklemlerde Blow-up	10
2. Çözümler için Blow-up Metotları	12
2.1. Konkavlık Metodu	12
2.1.1. Levine Yardımcı Teoremi	13
2.2. Açık Eşitsizlik Metodu	21
3. Çözümlerin Blow-up'ı için Bir Uygulama	27
4. SONUÇ	32
5. KAYNAKLAR	33

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER LİSTESİ

$u(x,t)$: Çözüm fonksiyonu
 Ω : Çözüm fonksiyonun sağlandığı bölge
 Γ : Ω Bölgesinin sınırı
 $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$: $L_p(\Omega)$ uzayında tanımlı norm

∇ : $\frac{\partial}{\partial x}$

Δ : $\frac{\partial}{\partial x^2}$

Δ^2 : $\frac{\partial}{\partial x^4}$

$M(\Omega)$: Ω bölgesinin ölçümü

L^2 : Hilbert Uzayı

$(\cdot, \cdot)$: İç çarpım uzayı



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFÜZYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Yavuz UĞURLU

T.C.

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2005, Sayfa :34

Bu çalışmada difüzyon denklemlerin çözümlerinin patlama zamanı ele alınmıştır. Birinci bölümde bazı temel tanımlar ve eşitsizlikler irdelenmiştir. İkinci bölümde difüzyon denklemlerin çözümlerinin patlama zamanı, H.A. Levine [12] tarafından önerilen konkavlık metodu ve açık eşitsizlik metoduyla hesaplanmıştır. Üçüncü bölümde özel bir difüzyon denklemi için blow-up zamanı açık eşitsizlik metodu kullanılarak ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Blow-up, Levine Lemması, Osgood Şartı, Konkavlık Metodu, Açık Eşitsizlik Metodu.

ABSTRACT

Master Thesis

BLOW-UP OF SOLUTIONS FOR DIFFUSION EQUATIONS

Yavuz UĞURLU

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2005, Page: 34

In this study, blow-up time of solutions for the diffusion equations is considered. In the first chapter, some inequalities and fundamental definitions that are necessary for the remaining chapters of the thesis are presented. In the second chapter blow-up time solutions for diffusion equations are calculated by the Concavity Method and Explicit Inequality Method which are suggested by H.A. Levine [12]. In the third chapter blow-up time for a special diffusion equation are proved by using explicit inequality method.

KEYWORDS: Blow-up, Levine Lemma, Osgood Condition, Concavity Method, Explicit Inequality Method.

1. TEMEL TANIMLAR

Tanım 1.1. Çalışılan alanlarda karşılaşılan problemlere bir yaklaşım olarak matematiksel modeller oluşturmak, bilimin hemen her dalının teorik açıdan gelişmesinde önem taşımıştır. Bir fonksiyonu ve onun muhtelif mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemler *diferensiyel denklemler* olarak isimlendirilir.

Tanım 1.2. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferensiyel denklemlere *adi diferensiyel denklemler* denir. Bir diferensiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n . mertebeden adi bir diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

kapalı formunda gösterilebilir [2]. Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.2)$$

ise ϕ fonksiyonuna (1.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferensiyel denklemin genel çözümü, diferensiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir [5].

$u = u(x, y, z, t)$ fonksiyonu, x, y, z ve t bağımsız değişkenleriyle bir Ω bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{h} \quad (1.3)$$

limiti ile tanımlanır. $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}, \dots$ gibi gösterimler de kullanılabilir. İçinde

kısmi türev bulunan denklemlere *kısmi türevli diferensiyel denklem* denir. Yukarıda tanımladığımız u fonksiyonunun x, y, z, t değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren m . mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, \dots, u_{\frac{m}{m-1} \dots t}) = 0 \quad (1.4)$$

şeklinde gösterilir.

Bir kısmi diferensiyel denklemdeki değişkenler Γ sınırına sahip bir Ω açık bölgesinde tanımlanır. Ω bölgesi ile Γ sınırının birleşim kümesine Ω bölgesinin kapanışı denir ve $\bar{\Omega}$ şeklinde gösterilir. t zaman değişkeni olmak üzere $t_1 < t < t_2$ aralığında ve Ω bölgesindeki

(x,y,z) noktasında ζ fonksiyonu ve m . mertebeye kadar türevleri sürekli ise yani, $\zeta \in C^m(\Omega)$ sınıfından ise $\zeta = \zeta(x,y,z,t)$ fonksiyonuna m . mertebeden kısmi diferensiyel denklemin *çözümüdür* denir [2]. Bir kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferensiyel denklemlere kıyasla kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) *Sınır şartları*: Sınır şartları kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

$$\text{Dirichlet şartı: } u|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann şartı: } \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Karışık (mixed) veya Robin şartı: } \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

(ii) *Başlangıç Şartları*: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferensiyel denkleme '*Cauchy problemi*' denir. Örneğin, IR^n de $t > 0$ ve başlangıç şartları için

$$u_{tt} = a^2 \nabla^2 u(x,t);$$

$$u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$$

ikinci mertebeden bir *Cauchy problemidir*.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \quad (1.5)$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A,B,C,D,E,F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. (1.5) denklemi, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantının işaretine göre sınıflandırılır [3]. Bu sınıflandırma;

<u>Diskriminant</u>	<u>Denklem Tipi</u>
$\Delta > 0,$	Hiperbolik,
$\Delta = 0,$	Parabolik,
$\Delta < 0,$	Eliptik,

şeklinde yapılabilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin eliptik, parabolik ve hiperbolik tiplerinin genel denklemleri sırasıyla Laplace (Δ), ısı ve dalga operatörüdür. Herhangi bir kısmi diferansiyel denklem, uygun birebir bir değişken dönüşümü yardımıyla kendi sınıfının genel operatörüne dönüşebilir [3].

<u>Matematiksel Nicelik</u>	<u>İsimlendirme</u>	<u>Fiziksel isim</u>	<u>Sınıflandırma</u>
Δ_n	Laplacian	Potansiyel operatörü	Eliptik
$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{n-1}$	(ısı)	Difüzyon operatörü	Parabolik
$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{n-1}$	D'Alembert	Dalga operatörü	Hiperbolik

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem, “iyi durumda”, en az bir şartı sağlamaz ise “kötü durumda” olarak adlandırılır. Bu şartlar;

- 1) Varlık,
- 2) Teklik,
- 3) Kararlılık,

şeklinde ifade edilmektedir. Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını tarif etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konduğunda denklemi sağlayan bir çözüm yapılandırmasıdır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir. Adi diferansiyel denklemlere göre kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm tasvirleri seri veya integraller gibi limit yöntemleri içerir ve çözümler her zaman elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilemez. Bu durumda, bir yaklaşık çözüm ele alınır, eğer başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansırsa bu çözüme kararludur denir ve çözüm kararlı kabul edilir.

Örnek olarak,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.6)$$

Laplace denklemini $n > 0$ olmak üzere,

$$u(0,y)=0, \quad u_x(0,y) = \frac{1}{n} \sin y \quad (1.7)$$

Cauchy verileriyle göz önüne alalım. Bu problemin değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen çözümü,

$$u_1(x,y) = \frac{1}{n^2} \sinh x \sin y \quad (1.8)$$

şeklindedir. Başlangıç verileri $u(0,y)=0$ ve $u_x(0,y)=0$ iken problemin çözümü $u_2=0$ aşıkak çözümdür. İki başlangıç verisi arasındaki fark $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n^{-1} \sin ny| = 0$$

olur. Yani, başlangıç verisinde çok küçük bir değışiklik olmuştur. Bu başlangıç verisine karşılık gelen çözümler farkının $y = \frac{\pi}{2}$ noktasında, n tek bir pozitif sayı olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken limit değeriine bakalım;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| u_1\left(x, \frac{\pi}{2}\right) - u_2\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh nx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2n^2} = \infty$$

olur, yani; başlangıç verilerinde yapılan küçük bir değışiklik çözümde büyük bir değışikliğe yol açmıştır. Böylece (1.6) ve (1.7) Cauchy problemi iyi durumlu olmadığı sonucuna varılır [21].

Kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemlerinden, D'Alembert Metodu, Riemann Metodu, Fourier Seri Metodu klasik çözüm yöntemleri olarak karşımıza çıkarken, Fourier Laplace Dönüşüm Metodu, Adomian Ayrışım Metodu ve Varyasyonel Metotlar gibi metotlar da özel yöntemler olarak karşımıza çıkar.

Tanım 1.3. X boş olmayan bir küme ($X \neq \emptyset$), X üzerinde bir metrik aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $d : X \times X \rightarrow R$ dönüşümüdür. $\forall x, y, z \in X$ için

- i) $d(x, x) = 0$
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Bu durumda X kümesine üzerinde tanımlı d metriğı ile birlikte bir *metrik uzay* denir ve (X, d) ile gösterilir.

Tanım 1.4. X , bir K cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow R \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

$$iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği),}$$

özelliklerine sahipse X üzerinde *norm* adını alır ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir.

Tanım 1.5. Tam olan normlu uzaya *Banach Uzay* denir.

Tanım 1.6. H , $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan $(\cdot, \cdot)$ fonksiyonuna iç çarpım denir ve $\forall x, y, z \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$i) (x, y) = (y, x),$$

$$ii) (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$$

$$iii) (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

H , üzerinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonu ile bir iç çarpım uzayı olur. H üzerinde tanımlanan iç çarpım

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

biçiminde bir norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

biçiminde de bir metrik tanımlar. Dolayısıyla her iç çarpım uzayı bir normlu uzay ve bir metrik uzaydır.

Tanım 1.7. H uzayı yukarıda tanımlanan normla bir tam uzay ise H uzayına *Hilbert uzayı* denir. Diğer bir deyişle tam iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 1.8. X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D bölgesinin her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D den Y ye bir operatör veya dönüşüm denir,

$$A: D \subset X \rightarrow Y$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.9. Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörü $\forall x, y \in D$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir.

Tanım 1.10. Ω, R^n uzayında bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. Ω üzerinde tanımlı ve ölçülebilir

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özellikli olan tüm $f(x)$ fonksiyonlarının uzayına $L_p(\Omega)$ uzayı denir. $1 < p < \infty$ ise $L_p(\Omega)$ uzayında norm

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır ve özel olarak $p=1$ alınır ise $L_p(\Omega)$ uzayı *Lebesgue* anlamında integrallenebilir fonksiyonların uzayı olur. Eğer $p=2$ alınır ise $L_p(\Omega)$ uzayı bir *Hilbert* uzayıdır.

$L_2(\Omega)$ uzayında iç çarpım $u, v \in L_2(\Omega)$ olmak üzere

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$$

biçiminde tanımlanır.

Bazı Önemli Eşitsizlikler

Tanım 1.11.(Hölder Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ ve $u \in L_p(\Omega)$ ve $v \in L_q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L_1(\Omega)$

ve

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

eşitsizliği geçerlidir ve bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. Bu eşitsizlikte, özel olarak $p=q=2$ seçilirse yeni eşitsizliğe ise Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

Tanım 1.12. (Green Formülü):

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

1.1. DİFÜZYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI (BLOW-UP)

Uygulamalı bilimlerde bir çok işlem diferensiyel operatörler içeren evolution (bir dizi işlem) denklemlerle veya böyle denklemlerin sistemleriyle modellenebilmektedir. İyi tanımlı çözüm bulmak için denklemlere ilave edilen uygun şartlarla (genellikle, başlangıç ve sınır şartlarıyla) verilmelidir. Standart diferensiyel teoriler, doğrusal operatörleri içermekte ve bunlar için yoğun teoriler geliştirilmektedir. Lineer olmayan diferensiyel denklemler, lineer teorilerde bulunmayan birçok özelliği barındırmaktadır. Bu lineer olmayan özellikler, çoğu zaman matematiksel modeller ile tanımlanan gerçek Dünya olaylarının önemli özellikleri ile alakalıdır. Aynı zamanda bu yeni özellikler matematiksel davranışın temel yeni zorlukları ile yakından bağlantılı olacaktır. Lineer olmayan özellikler üzerindeki çalışmalar, yeni problemlerin kaynağını olmuştur. Matematiksel analiz, kısmi diferensiyel denklemler ve bu denklemlerle bağlantılı diğer alanlardaki yeni metotların çalışılmasıyla etkilenilerek, geçen yüzyılın son kısmında matematiksel araştırmaların en aktif alanlarından biri olmuştur. Modern analizin yeni metot bulma başarıları lineer olmayan dünyanın önemli sorularına matematikçilerin titiz cevaplar vermesini mümkün kılmıştır.

Lineer olmayan evolution problemleri lineer olan problemlerden farklı kılan en dikkat çekici özellik, tamamen düzgün verilerden kaynaklanan singularitelerin olası meydana gelmesinin mümkünlüğüdür. Hadamard kuralı gereği, varlık, teklik ve çözümün başlangıç değerine sürekli bağımlılık kısa zaman aralıklarında gerçekleştirilebilir ise bu durumda çözüme küçük zaman aralığında iyi-tanımlıdır denir. Oysa singulariteler doğrusal problemlerde ortaya çıkabilir. Bu singulariteler; denklemin katsayılarında, başlangıç veya sınır verilerinde veya problemde sabit singulariteler yer alabilir. Aksine, lineer olmayan sistemlerde singulariteler, matematiksel analizle tanımlanabilecek problemin lineer olmayan mekanizmasından, zamanından ve konumundan kaynaklanabilir.

Verilen bir problemin çözümünün belli bir sonlu zamanda çözümün sonsuza yaklaşması durumunda çözümde patlama olması olasılığı vardır. Bu bölümde ve sonraki bölümlerde matematiksel olarak patlama (Blow-up) zamanının hesaplanması üzerinde bazı tartışmalar vereceğiz.

Difüzyon denklemlerin blow-up'ının çalışmasında ulaşılan temel soruların analizi üzerinde duralım. Bu sorular

- 1) Blow-up nedir?
- 2) Ne zaman blow-up olur?
- 3) Blow-up nasıl oluşur?
- 4) Blow-up sonrası ne olur?

5) Blow-up zamanı sayısal olarak nasıl hesaplanır?

Şimdi bu soruların ne anlama geldiğini kısaca açıklayalım.

1) Blow-up nedir?

Blow-up problemi sadece çözümlerin uygun bir sınıfı seçildiği zaman uygun bir şekilde formüle edilir. Genellikle problemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği farklı fonksiyonlar kurarak formüle edilir ve blow-up tam olarak, bu anlamda çözümlerin sürekliliğini geçerli kılmaz. Genel soru şu iki duruma ayrılabilir.

- i) Hangi denklem ve problemler sonlu zamanda Blow-up'ı gösterir. Denklemin biçimi (katsayılarına ve daha genel olarak yapısal şartlara göre) ve verinin biçimi cevabı belirler. Patlamanın reaksiyon terimi tarafından üretilmesi durumunda adi diferensiyel denklem analizindeki gibi bir süper lineerlik şartı gereklidir fakat bir uzay yapıları problemin adi diferensiyel denklem probleminden farklı olduğu örnekleri bulabiliriz.
- ii) Biraz önceki sorunun pozitif bir cevabı olması durumunda hangi çözümlerin sonlu zamanda patlama yapacağını sorabiliriz. Son soru için ihtimaller iki kattır: Patlama verilen sınıftaki tüm çözümler için veya sadece birkaç çözüm için meydana gelir (Açık bir şekilde belirtilmesi gerekir). Eğer özel bir çözüm patlama oluşturmaz ise bu takdirde bu patlama zamanı içerisinde küresel olarak devam eder.

2) Ne zaman?

Diyelim ki patlama sonlu zamanda olsun. Patlama zamanını tahmin edebilir miyiz. Gerçekten, çözüm her $0 < t < \infty$ için fakat $t \rightarrow \infty$ için sonsuz iken bir fonksiyonel yapıda verildiğinde çözüm mevcut olduğu zaman patlamanın özelliği sonsuz zamanda daha dikkat çekici bir biçimde de oluşabilir.

3) Blow-up nasıl oluşur?

Bunun için iki görüş vardır:

(3.i) t , blow-up zamanına yaklaşırken ve x de blow-up noktasına yaklaşırken $u(x, t)$ çözümünün ıraksadığı oranı hesaplamak için.

(3.ii) Patlama olmayan noktalarda $t \rightarrow T^-$ iken $u(x, t)$ çözümlerinin limitlerinde olduğu gibi blow-up profillerinin bitiş zamanını hesaplamak için.

4) Blow-up sonrası ne olur?

Son zamanlara doğru daha az dikkat çeken fakat patlamayı kapsayan matematiksel modellerin pratikteki uygulamaları için büyük öneme sahip bir soru şudur: Sonlu bir

zamandan sonra patlama singülaritesi meydana geldiğinde ne olur. Bu blow-up sonrası süreklilik problemidir. Daha önceden gerekli olan temel bir teknik uygun bir sürekli çözüm kavramı bulmaktır. Bu metot yardımı ile üç tane alternatif ortaya çıkar.

(4i) Çözüm sürekli olamaz, eğer çözüm sürekli olursa doğal bir anlamda her yerde sonsuz olur. Buna tam patlama denir.

(4ii) Çözüm T den sonraki uzay zamanın bazı bölgelerinde sürekli olabilir fakat tamamında sonsuzdur. Buna da tam olmayan patlama denir.

(4iii) Çözüm T den sonra tekrar sınırlı hale gelir, bu geçici patlamadır. Buna patlamanın zirve anında rastlarız ki burada bu patlama T den sonra derhal sınırlı hale gelir. Şimdiye kadar araştırılan modellerin içinde bu en uygun olmayan olaydır.

5) Nasıl hesaplanır?

Son soru patlama olayını belirlemek için ve blow-up çözümlerine, zamanlarına ve profiline yaklaşımda bulunmak veya onları hesaplamak için nümerik metotlardan yardım almaktır. İlk problem hesaplanabilir. Örneğin, uzaydaki yarı-kesikleme, lineer olmayan adi diferensiyel denklem sistemi için bir başlangıç değer problemine yol göstermektir. Bu durumda uzaysal türevleri ele almak için sonlu elemanları, sonlu farkları kullanabiliriz.

1.1.1. Adi Diferensiyel Denklemlerde Blow-up

Lineer olmayan problemlerde singularitelerin en basit şekli, zamanın bazı sonlu $T > 0$ limitine yaklaştığı zaman değişken veya değişkenlerin sonsuza gitmesidir. Bu olayın oluş şekline denklemin çözümünün blow-up olması dolayısıyla problemin bir blow-up zamanına sahip olduğu söylenir. Blow-up, adi diferensiyel denklemlerin teorisinde de ortaya çıkabilir. Bu teorik olayı

$$u_t = u^2; \quad t > 0, \quad u(0) = \alpha$$

şeklindeki basit bir örnek üzerinde açıklayalım. Bu problem, reel değişkenli $u = u(t)$ çözümü için başlangıç değer problemidir. $\alpha > 0$ verisi için tek çözüm $0 < t < T = \frac{1}{\alpha}$ zaman aralığında

mevcuttur ve bu çözüm $u(t) = \frac{1}{(T-t)}$ şeklindedir. Burada, $t < T$ için düzgün çözüm ve $t \rightarrow T^-$

için $u(t) \rightarrow \infty$ olur. Bu durumda, $t = T$ değeri için çözümde blow-up olur ve $u(t)$ çözümü de $t = T$ değerinde blow-up'a sahiptir denir.

Bir dizi işlem tanımlayan değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı, çözümler zamanla global olarak yok olabilmektedir. Bu çözüm mantığı kullanılarak, bu denklemlerden başlanarak blow-up kavramı genelleştirilebilir. Bunun için adi diferensiyel denklemler için ilk adım olarak,

$$u_t = u^p, \quad p > 1$$

denklemini verebiliriz. Daha genel olarak,

$$u_t = f(u)$$

f fonksiyonu pozitif ve

$$\int_1^{\alpha} \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

şartı altında süreklidir. Bu adi diferensiyel denklemler teorisinde 1898 den beri Osgood şartı olarak bilinmektedir [11]. Bu şart pozitif başlangıç verili herhangi bir çözümün sonlu zamanda blow-up olması için gerek ve yeter şarttır. Adi diferensiyel denklemlerdeki bu çalışmalar, araştırmacılara temel teşkil ederek daha karmaşık problemler için blow-up teorisinin gelişmesine ve ileri seviyede irdelenmesine ilham kaynağı olmuştur.

1.1.2. Kısmi Diferensiyel Denklemlerde Blow-Up

Günümüzde sonlu bir zamanda blow-up olan kısmi diferensiyel denklemlerin konusunu ele alan çalışmalarda önemli bir artış olduğu bilinmektedir ve bu çalışmaların matematiksel teorisi yoğun olarak ele alınmaktadır. Yapılan çalışmaların bazı sonuçları [11], Samarskii vd. [19] ve diğer araştırmacıların çalışmalarında bulunabilir.

1.1.3. Parabolik Denklemlerde Blow-up:

Eğer problem uzaysal yapıya da sahipse $u = u(x, t)$; $x \in \Omega$, $0 \leq t < T$ olur. Isının yayılması ve yanma problemleri modeli

$$u_t = \nabla A(u, \nabla u, x, t) + B(u, \nabla u, x, t)$$

biçimindeki genel bir parabol diferensiyel denklem modeli ile ifade edilebilir.

Eğer t bazı sonlu T zamanına yaklaşırken çözüm bazı noktalarda sonsuz oluyorsa blow-up oluşur, yani; bir $T < \infty$ zamanı vardır ki bu da blow-up zamanı olarak adlandırılır. Bu nedenle çözüm bütün $0 < t < T$ aralığı için iyi tanımlıdır. Oysa

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x, t)| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-$$

için olur.

Bu tür denklemler için blow-up konusu, 1940 ve 1950 yıllarda Semenov'un zincir reaksiyon teorisi, adiabatic patlama ve combustion teorisi bağlamında ortaya konmuştur. Matematiksel teorisi ise 1960 li yıllarda aktif olarak araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Daha sonra Kaplan, Fujita, Friedman ve diğerleri gelmektedir [6],[7].



2. ÇÖZÜMLER İÇİN BLOW-UP METOTLARI

Matematiksel analiz literatüründe tartışılan bir kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünün sonlu zamanda blow-up durumunun mevcut olduğunu göstermek için uygulanan bir çok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerden ikisi üzerinde detaylıca duracağız.

2.1. Konkavlık Metodu

Bu metot yukarıda da belirtildiği gibi Levine [8] tarafından geliştirildi ve matematiksel analizde geniş bir uygulama alanı buldu. Bu metottaki temel düşünce bir kısmi diferensiyel denklemin çözümünün pozitif tanımlı bir $F(t)$ fonksiyoneli oluşturmak ve daha sonra herhangi bir $\alpha > 0$ sayısı için t parametresine bağlı bir $F^{-\alpha}$ konkav fonksiyonu göstermektir. Bu işlemlerde F fonksiyoneli

$$\frac{d^2 F^{-\alpha}}{dt^2} \leq 0 \quad (2.1)$$

diferensiyel eşitliğini sağlar ve öyle ki bu eşitsizliğin bir kez integralinin alınması ile $F(t)$ için aşağıdaki alttan sınırlı

$$F^\alpha(t) \geq \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - t\alpha F'(0)} \quad (2.2)$$

fonksiyonu elde edilir. Bu $F^\alpha(t)$ fonksiyonu $F'(0) > 0$ ise sonlu zamanda patlama (blow-up) olur. Patlama T^* noktasından önce veya tam

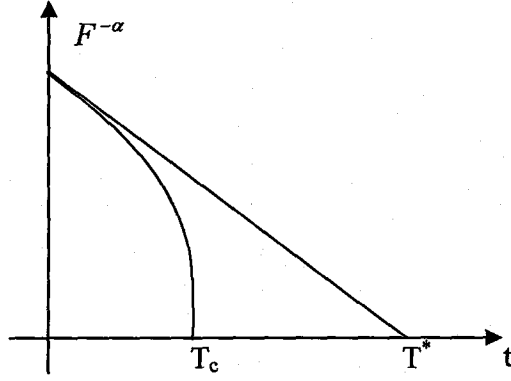
$$T^* = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)} > 0 \quad (2.3)$$

noktasında oluşmalıdır. Bu tartışma kendi başına $F(t)$ fonksiyonelinin gerçekten patlamasının mevcut olduğunu göstermez.

Konkavlık metodunun daha iyi açıklayıcı olması için bu metodun geometrik yorumu Şekil 2.1 deki gibi ifade edilebilir. Bu grafikte; $F^{-\alpha}(t)$ ifadesi

$$y = F^{-\alpha-1}(0)[F(0) - \alpha t F'(0)]$$

düz çizgi ile ifade edilen doğrunun altında kalır. $F'(0) > 0$ iken bu doğrunun eğimi negatiftir ve $F^{-\alpha}$ fonksiyonu konkav ise o zaman bu fonksiyon bu doğrunun altında kalır ve böylece $T_c < \infty$ noktasında t eksenini keser. Tabi ki, çözüm bu noktada sürekli olmalıdır.



Şekil 2.1 $F^{-\alpha}(t)$ fonksiyonu

2.1.1. Levine Yardımcı Teoremi

$F(t)$ iki kez türevlenebilen ve $t > 0, \alpha > 0$ için

$$F''(t)F(t) - (1 + \alpha)[F'(t)]^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ ise, bu durumda öyle bir

$$T_c \leq \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$$

zamanı vardır ki $t \rightarrow T_c$ için $F(t) \rightarrow \infty$ olur.

İspat:

$\Phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım ve bu fonksiyonun birinci ve ikinci türevi

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= -\alpha F^{-\alpha-1}(t)F'(t) \\ \Phi''(t) &= \alpha(\alpha+1)F^{-\alpha-2}(t)F'^2(t) - \alpha F^{-\alpha-1}(t)F''(t) \\ &= -\alpha F^{-\alpha-2}(t)[F''(t)F(t) - (1+\alpha)F'^2(t)] \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

biçimlerinde bulunur. Yukarıdaki (2.1.1) den de görüleceği gibi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \leq 0 \quad (2.1.2)$$

olur.

Yine (2.1.1) eşitliklerinden, $\Phi(t)$ fonksiyonunun her noktadaki $\Phi'(t)$ negatif olduğundan $\Phi(t)$ azalan bir fonksiyondur. $\Phi(t)$ fonksiyonunun $(0, (\Phi(0)))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(0) &= \Phi'(0)(t - 0) \\ \Phi(t) - \Phi(0) &= \Phi'(0)t \end{aligned}$$

olur. Burada $\Phi(0)$ ve $\Phi'(0)$ fonksiyonları yerine yukarıdaki eşitlikleri yazdığımızda

$$\Phi(t) = F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0) \Phi'(0)t$$

olup buradan, bu teğetin t eksenini kestiği noktada

$$T^* = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$$

şeklinde bulunur.

(2.1.1) den $\Phi''(t)$ negatif olduğundan $\Phi(t)$ fonksiyonu konkavdır. Yani, $\Phi(t)$ fonksiyonu her noktada teğetin altında kalır. Teğet doğrusu t eksenini T^* noktasında keser. Bu nedenle $\Phi(t)$ fonksiyonunun grafiği de t eksenini bir $T_c < T^*$ noktasında keser

$$F^\alpha(t) \geq \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - t\alpha F'(0)}. \quad (2.1.3)$$

O halde $t \rightarrow T_c^-$ iken $\Phi(t) \rightarrow 0$ yakınsar. Böylece,

$$\lim_{t \rightarrow T_c^-} F(t) = \infty$$

olur ve yardımcı teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Konkavlık metodunu $\Omega \times (0, T)$ bölgesinde tanımlı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p, \quad p > 1 \quad (2.1.4)$$

şeklindeki kısmi diferensiyel denkleme uygulayalım. Burada, bazı $T > 0$ ve Ω ise $N \geq 1$ olmak üzere R^n uzayında sınırlı bir bölgedir. p sabiti de, sonlu zamanda blow-up durumunun olması için birden büyük bir değere sahip olmalıdır.

$u(x, t)$ çözümünün

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0 \quad (2.1.5)$$

burada Γ , Ω bölgesinin sınırıdır ve aynı zamanda

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.1.6)$$

başlangıç değerini sağladığını varsayalım. Yukarıda verilen (2.1.4) ve (2.1.6) problemi için uygun bir $F(t)$ fonksiyoneli

$$F(t) = \int_0^t \|u\|^2 d\eta + (T-t)\|u_0\|^2 + \beta(t+\tau)^2 \quad (2.1.7)$$

şeklinde oluşturulur ve burada $T, \beta, \tau > 0$ seçileceklerdir. Bu fonksiyonel ise basit anlamda Levine tarafından seçilen fonksiyoneldir [12]. Levine bu fonksiyoneli Hilbert uzayında ve

$$Pu_t = -Au + G(u)$$

biçimindeki diferensiyel-operatör denklemlerin çözümünde ifade etmiştir. Burada, P ve A lineer simetrik bir operatör ve $G(u)$ fonksiyonu da belirli şartları sağlayan lineer olmayan bir potansiyel fonksiyondur. (2.1.4) ve (2.1.6) probleminin lineerleştirilmiş versiyonu için çözümü uygun ve gerçek çözümlerin hızlı olarak sıfıra azalması dikkat edilmesi gereken bir husustur. Böylece herhangi bir blow-up lineer olmayan terim sebebiyledir.

Konkavlık metodunu uygulamak için Levine yardımcı teoremi ile verilen eşitsizliği sağlayan bir F fonksiyoneli göstermek yeterli olacaktır. Bu durumda $F > 0$ için

$$FF'' - (1 + \alpha)(F')^2 \geq 0 \quad (2.1.8)$$

eşitsizliğini sağlayan F fonksiyonelinin gösterilmesinin yeterli olduğunu görürüz.

$$F(t) = \int_0^t \|u\|^2 d\eta + (T-t)\|u_0\|^2 + \beta(t+\tau)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= F' = 2 \int_0^t (u, u_\eta) d\eta + \|u_0\|^2 - \|u_0\|^2 + 2\beta(t+\tau) \\ F'(t) &= 2 \int_0^t (u, u_\eta) d\eta + 2\beta(t+\tau)\end{aligned}\quad (2.1.9)$$

elde edilir ve burada $(\cdot, \cdot)$, $L^2(\Omega)$ uzayında iç çarpımı gösterir. (2.1.14) denklemini (2.1.9) eşitliğinde kullanırsak

$$\begin{aligned}F'(t) &= 2 \int_0^t (u, \Delta u + u^p) d\eta + 2\beta(t+\tau) \\ F'(t) &= 2 \int_0^t [(u, \Delta u) + (u, u^p)] d\eta + 2\beta(t+\tau) \\ F'(t) &= 2 \int_0^t \left(\underbrace{\int_\Omega u \Delta u dx}_{I_1} + \int_\Omega u u^p dx \right) d\eta + 2\beta(t+\tau)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu elde edilen ifadede I_1 integralinde Green – Gauss formülü kullanılırsa

$$I_1 = \int_\Omega u \Delta u dx = - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = -\|\nabla u\|^2$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $F'(t)$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$$F'(t) = -2 \int_0^t \|\nabla u\|^2 d\eta + 2 \int_0^t \int_\Omega u^{p+1} dx d\eta + 2\beta(t+\tau) \quad (2.1.10)$$

bulunur. Bu son ifadede türev alınır, küçük bir düzenleme ve ilk integral parçası ile

$$\begin{aligned}F''(t) &= -2 \left(\int_0^t \int_\Omega 2 \nabla u \nabla u_t dx d\eta + \|\nabla u_0\|^2 \right) + 2 \int_\Omega u^{p+1} dx + 2\beta \\ F''(t) &= -4 \int_0^t \left(\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx}_{I_2} \right) d\eta - 2\|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_\Omega u^{p+1} dx + 2\beta\end{aligned}$$

hesaplanır. Tekrar, bu son eşitlikteki ilk integrale I_2 diyelim ve bu integrale Green-Gauss formülünü uygularsak

$$I_2 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx$$

elde edilir ve yukarıdaki $F''(t)$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$F''(t) = -4 \int_0^t \left\{ - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx \right\} d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

bulunur ve eşitlik

$$F''(t) = 4 \int_0^t (\Delta u, u_{\eta}) d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

şekline dönüşür.

Yukarıda verilen (2.1.4) denkleminde $\Delta u = u_t - u^p$ eşitliğini $F''(t)$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$F''(t) = 4 \int_0^t (u_{\eta} - u^p, u_{\eta}) d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \{ (u_{\eta}, u_{\eta}) - (u^p, u_{\eta}) \} d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta - 4 \int_0^t (u^p, u_{\eta}) d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta - 4 \int_0^t \int_{\Omega} u^p u_{\eta} dx d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta - 4 \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx \right\} d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta - \frac{4}{p+1} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\Omega} (u^{p+1} dx) d\eta - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta - \frac{4}{p+1} \int_{\Omega} u^{p+1}(x, t) dx + \frac{4}{p+1} \int_{\Omega} u^{p+1}(x, 0) dx - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

$$F''(t) = 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta - \frac{4}{p+1} \int_{\Omega} u^{p+1} dx + \frac{4}{p+1} \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - 2 \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2\beta$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (2.1.8) eşitsizliğinin sol tarafına benzer bir şekilde düzenlenirse

$$\begin{aligned}
F''(t) = & 4(\alpha+1) \left[\int_0^t \|u_\eta\|^2 d\eta + \beta \right] - 4\alpha \int_0^t \|u_\eta\|^2 d\eta - 2(2\alpha+1)\beta + \\
& + 2 \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \int_\Omega u^{p+1} dx + 4 \left[\frac{1}{p+1} \int_\Omega u_0^{p+1} dx - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

elde edilir. Yukarıda (2.1.7), (2.1.10) ve (2.1.11) eşitlikleri (2.1.8) eşitsizliğinde kullanılırsa, yani;

$$\begin{aligned}
FF'' - (1+\alpha)(F')^2 = & 4(\alpha+1)S^2 + 4(\alpha+1)(T-t)\|u_0\|^2 \left(\int_0^t \|u_\eta\|^2 d\eta + \beta \right) + \\
& + F \left\{ -4\alpha \int_0^t \|u_\eta\|^2 d\eta - 2(2\alpha+1)\beta \right\} + 2 \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \int_\Omega u^{p+1} dx + \\
& + 4 \left[\frac{1}{p+1} \int_\Omega u_0^{p+1} dx - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 \right] \geq 0
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

bulunur. Burada, S^2 niceliktir ve bu nicelik Cauchy-Schwarz eşitsizliği gerçeği ile negatif değildir ve

$$S^2 = \left[\int_0^t \|u\|^2 d\eta + \beta(t+\tau) \right] \left[\int_0^t \|u\|^2 d\eta + \beta \right] - \left[\int_0^t (u, u_\eta) d\eta + \beta(t+\tau) \right]^2$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda (2.1.4) ile verilen kısmi diferensiyel denklemin kullanılması ve bir kısmının integre edilmesi ile

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u_\eta\|^2 d\eta &= \int_0^t \int_\Omega u_\eta^2 dx d\eta = \int_0^t (u_\eta, u_\eta) d\eta = \int_0^t (u_\eta, \Delta u + u^p) d\eta = \int_0^t (u_\eta, \Delta u) d\eta + \int_0^t (u_\eta, u^p) d\eta \\
&= \int_0^t \left(\underbrace{\int_\Omega u_\eta \Delta u dx}_{I_3} \right) d\eta + \int_0^t \left(\int_\Omega u_\eta u^p dx \right) d\eta
\end{aligned}$$

yazılır, buradan da yukarıdaki I_3 integraline Green-Gauss formülü uygulanırsa

$$I_3 = \int_\Omega u_\eta \Delta u dx = - \int_\Omega \nabla u_\eta \nabla u dx$$

yazılabilir. Buradan I_3 integralini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u_\eta\|^2 d\eta &= \int_0^t \left\{ - \int_\Omega \nabla u_\eta \nabla u dx \right\} d\eta + \int_0^t \left\{ \int_\Omega u_\eta u^p dx \right\} d\eta = \left[- \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2} (\nabla u)^2 \right) dx + \right. \\
&\quad \left. \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1} \right) dx \right] d\eta \\
&= -\frac{1}{2} \left[\int_\Omega \nabla u(x,t) dx - \int_\Omega \nabla u(x,0) dx + \int_\Omega \frac{1}{p+1} u^{p+1}(x,t) dx - \int_\Omega \frac{1}{p+1} u^{p+1}(x,0) dx \right] \\
&= -\frac{1}{2} [\|\nabla u\|^2 - \|\nabla u_0\|^2] + \frac{1}{p+1} \int_\Omega u^{p+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_0^{p+1} dx \\
&= -\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 + \frac{1}{p+1} \int_\Omega u^{p+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega u_0^{p+1} dx \tag{2.1.13}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda verilen (2.1.12) eşitliğinin sağ tarafında bulunan ilk iki terim negatif değildir ve bu sebeple onları ihmal edebiliriz. Daha sonra (2.1.12) eşitliğinin sağ tarafındaki kıvrık parantez içindeki ifade yerine (2.1.13) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
FF'' - (1+\alpha)(F')^2 &\geq 2\alpha F \|\nabla u\|^2 + \left[2 \left(\frac{p-1}{p+1} - \frac{4\alpha}{p+1} \right) F \int_\Omega u^{p+1} dx \right. \\
&\quad \left. + F \left[\frac{4(1+\alpha)}{p+1} \int_\Omega u_0^{p+1} dx - 2(1+\alpha) \|\nabla u_0\|^2 - 2(2\alpha+1)\beta \right] \right] \geq 0 \tag{2.1.14}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.1.14) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi sıfır yapacak şekilde bir

$$\begin{aligned}
\frac{2(p-1)}{p+1} - \frac{4\alpha}{p+1} &= 0 \Rightarrow 2(p-1) = 4\alpha \\
&\Rightarrow p-1 = 2\alpha \\
&\Rightarrow \alpha = \frac{p-1}{2} > 0
\end{aligned}$$

α seçebiliriz. Bu α değeri yukarıdaki (2.1.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa eşitsizlik

$$FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq 2\alpha F \|\nabla u\|^2 - 2\beta p F + 2(p+1) F \left[\frac{1}{p+1} \int_\Omega u_0^{p+1} dx - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 \right] \geq 0 \tag{2.1.15}$$

şekline getirilir. Yukarıdaki (2.1.15) eşitsizliğindeki köşeli parantez içinin sıfırdan büyük olması için, yani;

$$\int_{\Omega} u_0^{p+1} dx > \left(\frac{p+1}{2} \right) \|\nabla u_0\|^2 \quad (2.1.16)$$

olmalıdır. (2.1.15) eşitsizliği tekrar yazılır ve düzenlenirse

$$FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq 2\alpha F \|\nabla u\|^2 - F \left[2\beta p + 2 \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - (p+1) \|\nabla u_0\|^2 \right] \geq 0$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizliğin köşeli parantez içinde bulunan terimi sıfırdan büyük olacak şekilde β sabitini seçebiliriz

$$\left(2\beta p + 2 \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - (p+1) \|\nabla u_0\|^2 \right) > 0$$

olur buradan da

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - \left(\frac{p+1}{2p} \right) \|\nabla u_0\|^2 > \beta \quad (2.1.17)$$

elde edilir. Böylece, $FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq 0$ olacak şekilde $\alpha > 0, \beta > 0$ sabitlerini tespit etmiş oluruz. Bu mantıkla seçilen β (2.1.15) ifadesinden hareketle hemen (2.1.8) çıkar ve böylece (2.1.2) ifadesindeki F eşitsizliği sağlanır. Buna göre (2.1.4)-(2.1.6) probleminin $u(x,t)$ çözümü, klasik anlamda (2.1.3) eşitliği ile verilen T^* dışında mevcut olamaz. Mevcut durum da ise (2.1.3)

$$T^* = \frac{T \|u_0\|^2 + \beta \tau^2}{\beta \tau (p-1)}, \quad T^* \in [0, T),$$

şeklinde kabul edilir. (2.1.7) eşitliğindeki F fonksiyoneline tanımlanan T sayısı başlangıçta

$$T \geq T^* = \frac{T \|u_0\|^2 + \beta \tau^2}{\beta \tau (p-1)}$$

olacak şekilde seçilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T \geq \frac{T \|u_0\|^2 + \beta \tau^2}{\beta \tau (p-1)}$$

bulunur, buradan da

$$T \geq \frac{\beta \tau^2}{\beta \tau (p-1) - \|u_0\|^2} \quad (2.1.18)$$

sağlayacak şekilde $T > 0$ seçmeliyiz. β katsayısı hali hazırda (2.1.17) ile sınırlandırıldı. Fakat, şimdi öyle büyük bir τ seçmeliyiz ki

$$\tau > \frac{\|u_0\|^2}{\beta(p-1)} \quad (2.1.19)$$

şeklinde olmalı ve bu τ değeri aynı zamanda (2.1.18) eşitsizliğini sağlamalıdır. Böylece, (2.1.4)-(2.1.6) probleminin çözümü T^* sabitinden önce veya T^* noktasında F fonksiyoneli patlamalıdır. Bu durumda gerçekten çözümde blow-up mevcuttur.

Konkavlık metodunun bir çok ilginç açıklamaları mevcuttur. Örneğin, Levine ve Payne [11] kısmi diferensiyel denklemi lineer fakat sınır şartları lineer olmadığında sonlu zamandaki blow-up olayının nasıl olduğunu gösterdiler. Levine [11], bir lineer olmayan Euler-Poisson-Darboux denkleminin bir çözümü için mevcut olmayan varlık teoremi oluşturarak kısmi diferensiyel denklemlerdeki katsayıların singüler olması durumunda konkavlık metodunun nasıl uygulandığını gösterdi. Aynı zamanda, Kalantarov ve Ladyzhenskaya [9]

$$FF'' - (1 + \alpha)(F')^2 \geq -aF^2 - bFF' \quad (2.1.20)$$

genelleştirilmiş konkavlık eşitsizliğinin mevcut olmayan varlık tartışmasına nasıl genişletileceğini gösterdiler.

Konkavlık metodunun diğer bir uygulaması, Flavin ve Rionero [11] kitabının 108-115 sayfalarında vermişlerdir. Bu metodun uygulaması için bu yazarlar, lineer olmayan Schrödinger denklemi ve lineer olmayan elastik rod denklemlerinin bir çözümü için oluşturulan çözümün yokluğu (non-existence) konkavlık tekniğinin nasıl uygulanabileceğini açıklamışlardır. Bu yazarlar aynı zamanda, bu kitabın 305. sayfasında Monge-Ampere tipi bir denklemin çözümü için global yokluk nedenini açıklamışlardır.

2.2. Açık Eşitsizlik Metodu:

Bu kategorinin içinde pek çok teknik yer almaktadır. Ana fikir pozitif tanımlı bir fonksiyonel seçmek ve sonlu zamanda singüler olan bir t fonksiyonunun altında sınırlı olduğunu göstermektir. Burada, matematik literatüründe geçirgen ortam (Porous medium) denklemi

olarak bilinen bir kısmi diferansiyel denklemin oluşturulması ile tipik işlemler dizisini örneklendireceğiz. Bu denklemde $m > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(u^m) \quad (2.2.1)$$

şeklinde olacaktır. Çalışacağımız bu denklem bizi Levine ve Payne [10] zamanına geri götürür ve böylece zamanın akışını tersine çevirip (2.2.1) denkleminin yerine $m > 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(u^m) \quad (2.2.2)$$

kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem R^n uzayında sınırlı bir Ω bölgesi ile bazı $T < \infty$ için $\Omega \times (0, T)$ bölgesinde tanımlıdır buna ilaveten.

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2.3)$$

olduğunu kabul edelim. Referans [10] da Levine ve Payne, (2.2.2) denkleminin bir boyutlu versiyonunu incelediler. Fakat, bu incelemede uzaysal tanım kümesi tüm reel doğru üzerindeydi ve bu çok zor bir problem. Gerçekten geçirgen ortam denklemleri matematiksel biyolojide özellikle böcekler ve diğer hayvanların dağılımını oluşturmada kullanılmaktadır. Yukarıda verilen (2.2.1) denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \nabla(u^{m-1} \nabla u)$$

şeklinde de yazılabilir. Çünkü, bu denklemi $\kappa = mu^{m-1}$ şeklinde bir lineer olmayan yayılma (difüzyon) katsayısı yardımıyla bir difüzyon denklemleri şeklinde kabul edebiliriz. Yayılmanın çözüm bağımlılığı bazen standart lineer diferansiyel denklemin çözümüyle bağdaşan istenmeyen etkiyi, yani; κ sabitini ortadan kaldırır. Çözüm bağımlı difüzyon (2.2.1) in çözümünün uzayda bir dalga gibi yayılmasına imkan verir ve bu nedenle bir sıvıya sürüşü gibi bir böcek popülasyonunun dağılımını modellemek uygundur. (2.2.2) denkleminin patlama (blow-up) zamanını bulmak için eşitliğin her iki yanını u ile çarpalım ve kabul edelim ki $m > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} uu_t &= -u \Delta(u^m) \\ \int_{\Omega} uu_t dt &= - \int_{\Omega} u \Delta(u^m) dx \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 \right) &= - \left\{ \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^m}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla(u^m) dx \right\} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 \right) &= \int_{\Omega} mu^{m-1} |\nabla u|^2 dx = m \underbrace{\int_{\Omega} u^{m-1} |\nabla u|^2 dx}_{I_4} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$\nabla u^{\frac{m+1}{2}} = \frac{m+1}{2} u^{\frac{m-1}{2}} \nabla u$$

burada eşitliğin her iki tarafının karesi alınır

$$\left[\nabla \left(u^{\frac{m+1}{2}} \right) \right]^2 \frac{4}{(m+1)^2} = u^{m-1} |\nabla u|^2$$

elde edilir ve her iki tarafın Ω üzerinden integrali alınır

$$\int_{\Omega} \left[\nabla \left(u^{\frac{m+1}{2}} \right) \right]^2 \frac{4}{(m+1)^2} dx = \int_{\Omega} u^{m-1} |\nabla u|^2 dx$$

$$\frac{4}{(m+1)^2} \left\| \nabla \left(u^{\frac{m+1}{2}} \right) \right\|^2 = \underbrace{\int_{\Omega} u^{m-1} |\nabla u|^2 dx}_{I_4}$$

bulunur. Buradaki I_4 değeri (2.2.4) de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u\|^2 = \frac{4m}{(m+1)^2} \left\| \nabla \left(u^{\frac{m+1}{2}} \right) \right\|^2$$

eşitliği elde edilir. Ω bölgesinde tanımlanan ve bu bölgenin Γ sınırı üzerinde sıfır olan bir $f(x)$ fonksiyonu için Poincare eşitsizliği

$$\|\nabla f\|^2 \geq \lambda_1 \|f\|^2$$

şeklindedir ve burada λ_1 zar probleminin en küçük özdeğeridir. Buna göre

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq \frac{8m\lambda_1}{(m+1)^2} \int_{\Omega} u^{m+1} dx \quad (2.2.5)$$

elde edilir. Sonuç olarak Hölder eşitsizliğinden, (2.2.4) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq \frac{8m\lambda_1}{(m+1)^2} [M(\Omega)]^{\frac{1-m}{2}} \|u\|^{m+1} \quad (2.2.6)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanının integrali alınarak

$$\frac{1}{\left[\left(\|u_0\|^2 \right)^{\frac{-m+1}{2}} + \left(\frac{1-m}{2} \right) Ct \right]^{\frac{2}{m-1}}} \leq \|u\|^2$$

veya diğer bir gösterimle

$$\|u\| \geq \frac{1}{\left[(\|u_0\|)^{1-m} + \left(\frac{1-m}{2} \right) Ct \right]^{\frac{1}{m-1}}} \quad (2.2.7)$$

bulunur. Buradaki C sabiti

$$C = \frac{8m\lambda_1}{(m+1)^2 [M(\Omega)]^{\frac{m-1}{2}}}$$

şeklinde verilen bir sabittir. Bu (2.2.7) ile elde edilen son eşitsizlikte paydanın sıfır olması için

$$\left(\|u_0\|^2 \right)^{\frac{-m+1}{2}} = \frac{m-1}{2} Ct$$

olmalıdır. Böylece

$$\frac{1}{\|u_0\|^{m-1}} = \frac{m-1}{2} Ct \Rightarrow \frac{2}{(m-1)\|u_0\|^{m-1} C} = t$$

blow-up zamanını hesaplamış oluruz.

Konkavlık metodunda açıkladığımız (2.1.4) denklemini bu metot ile yani açık eşitsizlik metodu ile açıklayabiliriz. Bunu görebilmek için

$$F(t) = \|u(t)\|^2 = \int_{\Omega} u^2 dx$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_{\Omega} 2uu_t dx = 2 \int_{\Omega} u(\Delta u + u^p) dx \\ &= 2 \int_{\Omega} u \Delta u dx + 2 \int_{\Omega} u u^p dx \\ &= 2 \left(\int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right) + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx \\ F'(t) &= -2 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx \\ F'(t) &= -2 \|\nabla u\|^2 + 2 \int_{\Omega} u^{p+1} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Kısım 2.1 de ele aldığımız (2.1.4) denkleminin her iki yanını u_t ile çarpıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2 \int_0^t \|\nabla u_\eta\|^2 d\eta + \|\nabla u\|^2 = \frac{2}{p+1} \int_{\Omega} u^{p+1} dx + \|\nabla u_0\|^2 - \frac{2}{p+1} \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx$$

elde edilir. Burada $\|\nabla u\|^2$ terimini yalnız bırakıp yukarıda elde ettiğimiz F' eşitliğinde yerine yazılır ve Hölder eşitsizliği göz önünde bulundurulur ise

$$\int_{\Omega} u^{p+1} dx \geq \left(\|u\|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} [M(\Omega)]^{-\frac{(p-1)}{2}} \quad (2.2.8)$$

bulunur, burada $M(\Omega)$, Ω bölgesinin bir ölçümüdür. Bu eşitsizlik kullanılarak ta

$$\begin{aligned} F' &= \frac{2(p-1)}{p+1} \int_{\Omega} u^{p+1} + 4 \int_0^t \|u_{\eta}\|^2 d\eta + 2 \left[\frac{2}{p+1} \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - \|\nabla u_0\|^2 \right] \\ &\geq \frac{2(p-1)}{(p+1)[M(\Omega)]^{-\frac{(p-1)}{2}}} \left(\|u\|^2 \right)^{\frac{(p+1)}{2}} + 2 \left[\frac{2}{p+1} \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - \|\nabla u_0\|^2 \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Konkavlık metodundaki (2.1.16) eşitliği göz önüne alınırsa

$$2 \left[\frac{2}{p+1} \int_{\Omega} u_0^{p+1} dx - \|\nabla u_0\|^2 \right] \geq 0$$

eşitsizliğinin olduğu görülür. Dolayısıyla

$$F' \geq \frac{2(p-1)}{(p+1)[M(\Omega)]^{-\frac{p-1}{2}}} \left(\|u\|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}}$$

veya

$$F'(t) \geq \frac{2(p-1)}{(p+1)[M(\Omega)]^{-\frac{(p-1)}{2}}} F^{\frac{(p+1)}{2}}$$

yazılabilir. Burada F fonksiyonunun katsayısı

$$C^* = \frac{2(p-1)}{(p+1)[M(\Omega)]^{-\frac{(p-1)}{2}}},$$

alınırsa

$$F' \geq C^* F^{\alpha},$$

olacak biçimde bir $\alpha > 1$ sayısı bulunabilir.

$$F(t) = \|u(t)\|^2$$

ifadesini göz önüne alırsak

$$F' \geq C^* F^\alpha$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq C^* \left(\|u\|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} \quad (2.2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq C^* \left(\|u\| \right)^{p+1}$$

ve (2.2.9) eşitliğinin her iki yanının bir kez integrali alınırsa

$$\frac{\left(\|u(x,t)\|^2 \right)^{\frac{-p+1}{2}}}{\frac{-p+1}{2}} - \frac{\left(\|u(x,0)\|^2 \right)^{\frac{-p+1}{2}}}{\frac{-p+1}{2}} \geq C^* t \quad (2.2.10)$$

$$\left(\|u\|^2 \right)^{\frac{-p+1}{2}} - \left(\|u_0\|^2 \right)^{\frac{-p+1}{2}} \leq \left(\frac{-p+1}{2} \right) C^* t$$

bulunur. (2.2.10) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\|u\| \geq \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\|u_0\|^2 \right)^{\frac{-p+1}{2}} + \left(\frac{1-p}{2} \right) C^* t \right]^{\frac{2}{p-1}}}} \quad (2.2.11)$$

olur. (2.2.11) eşitliğinde payda sıfır olduğunda

$$\|u_0\|^{-p+1} = \left(\frac{p-1}{2} \right) C^* t$$

elde edilir. Buradan

$$t = \frac{2}{\|u_0\|^{p-1} (p-1) C^*}$$

blow-up zamanı elde edilmiş olur.

3. ÇÖZÜMLERİN BLOW-UP'I İÇİN BİR UYGULAMA

Problem 3.1. Yukarıda verilen açık eşitsizlik metodunu kullanarak aşağıdaki problemin çözümünün blow-up zamanını araştıralım.

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \Delta^2 u &= f(u), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(x, t)|_{\Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= (\nabla u)n|_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) denkleminin her iki yanını u_t ile çarparak ve Ω üzerinden integralini alalım.

$$\begin{aligned} u_t u_t - u_t \Delta u + u_t \Delta^2 u &= u_t f(u) \\ \int_{\Omega} u_t^2 dx - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx}_{I_2} &= \int_{\Omega} u_t f(u) dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

I_1 ve I_2 integrallerine Green-Gauss formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} u_t \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \\ I_2 &= \int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx = - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u dx \end{aligned}$$

bulunur ve bu eşitlikler (3.2) eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u dx}_{I_3} = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \int_0^u f(\xi) d\xi dx \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir. Burada I_3 integraline Green-Gauss formülü uygularsak

$$I_3 = \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u dx = - \int_{\Omega} \Delta u_t \Delta u dx$$

bulunur ve bu eşitlik (3.3) de yerine yazılırsa ve $f(u)$ fonksiyonun ilkeli $F(u)$ olduğu kabul edilirse

$$\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\Omega} \Delta u_t \Delta u dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx$$

$$\|u_t\|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Delta u)^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx$$

$$\|u_t\|^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u) dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) dx \right] + \|u_t\|^2 = 0$$

bulunur. Bu son eşitlikteki köşeli parantez içini

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) dx \quad (3.4)$$

ile ifade edelim. (3.1) denkleminin her iki yanını u ile çarpalım ve Ω bölgesi üzerinden integralini alalım.

$$uu_t - u\Delta u + u\Delta^2 u = uf(u)$$

$$\int_{\Omega} uu_t dx - \underbrace{\int_{\Omega} u\Delta u dx}_{I_4} + \underbrace{\int_{\Omega} u\Delta^2 u dx}_{I_5} = \int_{\Omega} uf(u) dx \quad (3.5)$$

I_4 ve I_5 integrallerine ayrı ayrı Green-Gauss formülünü uygulayalım

$$I_4 = \int_{\Omega} u\Delta u dx = -\|\nabla u\|^2,$$

$$I_5 = \int_{\Omega} u\Delta^2 u dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla^3 u dx$$

elde edilir ve bu I_4 ve I_5 integrallerini (3.5) eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\int_{\Omega} uu_t dx + \|\nabla u\|^2 - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \nabla^3 u dx}_{I_6} = \int_{\Omega} uf(u) dx \quad (3.6)$$

bulunur. (3.6) eşitliğindeki I_6 integrale Green-Gauss formülünü uygulayalım

$$I_6 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla^3 u dx = -\|\Delta u\|^2$$

bulunur ve bu bulunan I_6 integralini (3.6) eşitliğinde yazarsak

$$\int_{\Omega} uu_t dx + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 = \int_{\Omega} uf(u) dx$$

eşitliği bulunur. Bu ifade aşağıdaki gibi

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 = \int_{\Omega} u f(u) dx$$

veya

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = -\|\nabla u\|^2 - \|\Delta u\|^2 + \int_{\Omega} u f(u) dx \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} F(u) dx$$

eşitliğinin her iki tarafını 2 ile çarpalım

$$2E(t) = \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - 2 \int_{\Omega} F(u) dx$$

bulunur ve burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -\|\nabla u\|^2 - \|\Delta u\|^2 &= -2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2E(t) \geq -2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2E(0) \\ -\|\nabla u\|^2 - \|\Delta u\|^2 &\geq -2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2E(0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) eşitsizliği (3.7) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq \left(\int_{\Omega} u f(u) dx - 2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2E(0) \right)$$

veya

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq 2 \left(\int_{\Omega} u f(u) dx - 2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2E(0) \right) \quad (3.9)$$

bulunur. Burada

$$\int_{\Omega} u f(u) dx \geq k \int_{\Omega} F(u) dx \geq k\beta \|u\|_{m+1}^{m+1}, \quad m > 1, k > 2, \beta > 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu son ifade (3.9) da yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq 2 \left(k \int_{\Omega} F(u) dx - 2 \int_{\Omega} F(u) dx - 2E(0) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq 2 \left[(k-2) \int_{\Omega} F(u) dx \right] - 4E(0)$$

elde edilir. Burada $E(0) > 0$ olduğundan ihmal edilir. Böylece,

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq 2(k-2)\beta \|u\|_{m+1}^{m+1}, \quad m > 1 \quad (3.10)$$

bulunur. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\|u\|_{m+1}^{m+1} = \int_{\Omega} u^{m+1} dx \geq c_1 \left(\|u\|_2^2 \right)^{\frac{m+1}{2}} \quad (3.11)$$

olur. (3.11) eşitliği (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq 2(k-2)\beta c_1 \left(\|u\|_2^2 \right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad m > 1$$

elde edilir. Burada $A = 2(k-2)\beta c_1$ olsun. O halde yukarıdaki eşitsizlik

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq A \left(\|u\|_2^2 \right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad m > 1$$

şeklinde yazılır.

$$F = \|u\|^2$$

alırsak

$$\frac{d}{dt} F \geq A F^{\frac{m+1}{2}}, \quad \frac{m+1}{2} > 1$$

olacak şekilde $F' \geq A F^\alpha$, $\alpha > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir F fonksiyoneli oluşturmuş oluruz.

$$\frac{d\|u\|^2}{dt} \geq A \left(\|u\|^2 \right)^{\frac{m+1}{2}},$$

$$\frac{d\|u\|^2}{\left(\|u\|^2 \right)^{\frac{m+1}{2}}} \geq A dt$$

her iki tarafın 0 dan t ye integralini alırsak

$$\int_0^t \frac{d\|u\|^2}{\left(\|u\|^2 \right)^{\frac{m+1}{2}}} \geq \int_0^t A dt \Rightarrow \int_0^t \left(\|u\|^2 \right)^{\frac{-m-1}{2}} d\|u\|^2 \geq A t$$

buradan aşağıdaki eşitsizlik

$$\frac{\left(\|u(x,t)\|^2 \right)^{\frac{-m+1}{2}}}{\frac{-m+1}{2}} - \frac{\left(\|u(x,0)\|^2 \right)^{\frac{-m+1}{2}}}{\frac{-m+1}{2}} \geq A t, \quad \frac{-m+1}{2} < 0$$

ve buradan da

$$\|u\| \geq \frac{1}{\left[\left(\|u_0\|^2 \right)^{\frac{-m+1}{2}} + \left(\frac{-m+1}{2} \right) At \right]^{\frac{1}{m-1}}}$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitlikte payda sıfıra giderken $\|u\| \rightarrow \infty$ olur.

$$\left(\|u_0\|^2 \right)^{\frac{-m+1}{2}} + \left(\frac{-m+1}{2} \right) At = 0$$

alınırsa

$$t = \frac{2}{(m-1)A\|u_0\|^{m-1}}$$

elde edilir ki buda (3.1) denklemi için aranan blow-up zamanıdır.

4. SONUÇ

Sonuç olarak, bu çalışmada lineer olmayan parabolik denklemlerin çözümlerinin patlaması üzerinde durduk ve bu çalışma ile ilgili iki metot açıkladık. Konkavlık metodunda sınır koşullarının özelliklerini de yansıtan ve belirli bir norma göre çözümü temsil eden bir fonksiyonel yazarak bu fonksiyonelin Levine [11] yardımcı teoreminin hipotezlerini sağladığını gösterdik. Açık Eşitsizlik metodunda ise $F'(t) \geq CF^\alpha$, ($\alpha > 1$, $C = sbt$) eşitsizliğini sağlayan bir F fonksiyoneli oluşturulur. Böylece sonlu t zamanında bu fonksiyonellerin ve dolayısıyla çözümün normunun patladığı bulunur. Yani çözümün sonlu bir t zamanından sonra yok olduğu söylenebilir. Çözümlerin blow-up'ı literatürde birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır, bu çalışmalardan bazıları [13-24] referanslarında görülebilir.



KAYNAKLAR

- [1]. S. L. Sobolev, 1964, Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, Inc., New York, 427p.
- [2]. P. Duchateau and D.W. Zachmann, 1986, Shaum's Outline of Theory and Problems of Partial Differential Equations. McGraw-Hill Companies, 241p
- [3]. K. E. Gustafson, 1999, Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods. Dover Publications, Inc, Mineola, NY., 448p.
- [4]. B. Musayev ve M. Alp, 2000, Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları, Ankara, 470s.
- [5]. C. Cerit, 1997, Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (Çeviri), Beta Basım Y., 527s.
- [6]. S. Kaplan, On the Growth of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 305-330.
- [7]. H. Fujita, On the Blowing up of Solutions of the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J.Faculty Sci. Univ., Tokyo, **13** (1969), 109-124.
- [8]. H.A. Levine, Some Additional Remarks on the Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations, SIAM J. Math. Anal., **5** (1974), 138-146.
- [9]. V.K. Kalantarov and O.A. Ladyzhenskaya, The occurrence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic Type, J. Soviet Math., **10** (1978), 53-70.
- [10]. H.A. Levine and L.E. Payne, Nonexistence Theorems for the Heat Equations with Nonlinear Boundary Conditions and for Porous Medium Equation Backward in time, J. Diff.Eq., **16** (1974), 319-334.
- [11]. B. Straughan, 1998, Explosive Instabilities in Mechanics, Springer-Verlag, Berlin.
- [12]. H. A. Levine, Some Nonexistence and Instability Theorems for Formally Parabolic Equations of the Form $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rational Mech. Anal., **51** (1973), 371- 386.
- [13]. V.A. Galaktianov and J.L. Vazquez, The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations, *Discrete Cont. Dyn. S.*, **8** (2) (2002), 399-433.
- [14]. V.A. Galaktianov, Boundary value problem for the nonlinear parabolic equation $u_t = \Delta u^{\alpha+1} + u^{\beta}$ Differ. Eq., **17** (1981), 551-555.
- [15]. Y.A. Li and P.J. Olver, Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, *J.Diff. Eq.*, **162** (2000), 27-63.
- [16]. K. Masuda, Analytic solutions of some nonlinear diffusion equations, *Math. Z.* **187** (1984), 61-73.

- [17]. S.A. Messaoudi, Blow-up in a nonlinearly damped wave equation, *Math. Nach.*, **231** (2001), 105-111.
- [18]. K. Ono, Global existence, decay, and blow-up of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings, *J. Diff. Eq.*, **137** (1997), 273-301.
- [19]. A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, and A.P. Mikhailov, Blow-up in quasilinear parabolic equations, Nauka, Moscow, 1987; English translation: Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1995.
- [20]. M. Tsutsumi, Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Kyoto Univ. **8** (1972/73), 211-229.
- [21]. S.K. Turitsyn, Blow-up in the Boussinesq equation, *Phys. Rev. E*, **47** (1993), 796-799.
- [22]. J.L. Vazquez, Domain of existence and blow-up for the exponential reaction-diffusion equation, *Indiana Univ. Math. Journal*, **48** (2) (1999), 677-709.
- [23]. Y. Zhyijian, Global existence, asymptotic behavior and blow-up of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative term, *J. Diff. Eq.*, **187** (2003), 520- 540.
- [24]. N. Polat, D. Kaya and H. Ilhan Tutarlar, Blow-up of Solutions for the damped Boussinesq equation, *Z. Naturforsch A*, 64a (7), (2005), 473-476.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve orta öğrenimi Elazığ'da tamamladım. 1999 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2003 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik Programında tezli yüksek lisansa başladım.

