

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CESARO DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer ŞENGÜL

(08121113)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Foksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

TEMMUZ- 2010

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CESARO DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer ŞENGÜL

(08121113)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 1 Temmuz 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Temmuz 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Diğer Juri Üyeleri : Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü)

: Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Hacer ŞENGÜL
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. MUTLAK OLMAYAN TİPTE CESARO DİZİ UZAYLARI.....	7
3.1. Normlu Köthe Dizi Uzayları.....	8
3.2. X_p nin Birleştirilmiş Uzayı.....	10
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO DİZİ UZAYLARINDA DÜZGÜN KADEC-KLEE ÖZELLİKLERİ VE ROTUNDLUK.....	13
5. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO FARK DİZİ UZAYLARI.....	24
5.1. Dual Uzaylar.....	31
6. SONUÇ.....	34
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	37

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; konunun tarihi geçmişi verilmiştir.

İkinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; mutlak olmayan tipte Cesaro dizi uzayları ve onlarla ilgili kavramlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğu gösterilmiş ve rotundluk, *UKK* özelliği incelenmiştir.

Beşinci bölümde; genelleştirilmiş Cesaro fark dizi uzayları $C_p(\Delta^m)$ ($1 \leq p < \infty$), $C_\infty(\Delta^m)$ tanımlanmış ve bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Cesaro Dizi Uzayları, Luxemburg Norm, Konveks Modular, Uç Nokta, Rotundluk.

SUMMARY

Geometric Properties of Cesaro Sequence Spaces

This study is prepared as five chapter.

In the first chapter; historical background of the subject is given.

In the second chapter; the fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter; Cesaro sequence spaces of non-absolute type and their associate concepts are examined.

In the fourth chapter; generalized Cesaro sequence space equipped with the Luxemburg norm under which it is a Banach space and its rotund, UKK property are examined.

In the fifth chapter; generalized Cesaro difference sequence spaces $C_p(\Delta^m)$ ($1 \leq p < \infty$), $C_\infty(\Delta^m)$ are defined and some properties of these spaces are examined.

Key Words: Generalized Cesaro Sequence Spaces, Luxemburg Norm, Convex Modular, Extreme Point, Rotundity.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
BK	: Banach Koordinatsal
$\xrightarrow{w}$	: Zayıf yakınsaklık
$\xrightarrow{s}$	: Kuvvetli yakınsaklık
UKK	: Düzgün Kadec-Klee özelliği
R	: Rotund uzay
UR	: Düzgün Rotund uzay
LUR	: Yerel Düzgün Rotund uzay
X'	: X normlu uzayının sürekli dual uzayı
X^α	: X dizi uzayının α -dualı
w	: Bütün reel dizilerin uzayı
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

Son zamanlarda, dizi uzaylarının topolojik ve diğ er bazı alışılmış özelliklerine ilaveten geometrik özelliklerinin araştırılması büyük ilgi görmektedir. Literatürde farklı dizi uzaylarının geometrik özellikleriyle ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Örneğın Mursaleen [20] Euler dizi uzayının bazı geometrik özelliklerini çalışmış, Suantai [9] Cesaro dizi uzayının geometrik özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmada da genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı $ces(p)$ tanımlanmış ve $ces(p)$ nin Luxemburg normuna göre rotundluk, H- zelliğ  gibi geometrik özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

$$L1) x + y = y + x$$

$$L2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) \text{ Her } x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \text{ vardır.}$$

$$L4) \text{ Herbir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \text{ vardır.}$$

$$L5) 1 \cdot x = x$$

$$L6) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8) \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \text{ [1].}$$

Tanım 2.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in K$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir.

Burada $K = \mathbb{R}$ alınırsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine reel normlu uzay denir [2].

Tanım 2.3. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır. Bu yakınsaklık kuvvetli yakınsaklık olarak da tanımlanır ve $x_n \xrightarrow{s} x$ şeklinde de gösterilir [2].

Tanım 2.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 2.5. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [2].

Tanım 2.6. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonların cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir [2].

Tanım 2.7. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $f \in X'$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

ise (x_n) dizisi x e zayıf yakınsaktır denir. (x_n) dizisi x e zayıf yakınsak ise $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde yazılır [3].

Tanım 2.8. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. X in kapalı birim yuvarı

$$\{x : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır ve $B(X)$ ile gösterilir.

X in açık birim yuvarı

$$\{x : x \in X, \|x\| < 1\}$$

şeklinde tanımlanır. X in birim küresi

$$\{x : x \in X, \|x\| = 1\}$$

şeklinde tanımlanır ve $S(X)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.9. Reel terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere, w

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [5]. Ayrıca

$$l_\infty = \left\{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\right\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.10. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k: X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK- uzayı denir [5].

Tanım 2.11. X bir Banach uzayı olsun. Birim küre üzerindeki her zayıf yakınsak dizi norma göre yakınsak ise X Banach uzayı Kadec-Klee özelliğine (H-özelliliğine) sahiptir denir [6].

Tanım 2.12. (x_n) , X Banach uzayında bir dizi olsun.

$$sep(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\|: n \neq m\} > \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa (x_n) dizisine ε -ayrılmış dizi denir [6].

Tanım 2.13. X bir Banach uzayı olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $S(X)$ deki her bir (x_n) dizisi için $sep(x_n) > \varepsilon$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ iken $\|x\| < 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa X e düzgün Kadec-Klee (UKK) özelliğine sahiptir denir [6].

Tanım 2.14. $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $u, v \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\Phi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \Phi(u) + (1 - \lambda)\Phi(v)$$

ise Φ fonksiyonuna konvektir denir. Özel olarak $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\Phi\left(\frac{u + v}{2}\right) \leq \frac{\Phi(u) + \Phi(v)}{2}$$

elde edilir. Eğer $u \neq v$ için

$$\Phi\left(\frac{u + v}{2}\right) < \frac{\Phi(u) + \Phi(v)}{2}$$

ise Φ fonksiyonu kesin konveks olarak adlandırılır [6].

Tanım 2.15. $(X, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay $S(X)$ ve $B(X)$ sırasıyla X in birim küresi ve kapalı birim yuvarı olsun. Her $y, z \in S(X)$ için $2x = y + z$ iken $y = z$ ise $x \in S(X)$ noktasına $B(X)$ in bir uç noktası denir [10].

Tanım 2.16. X bir reel Banach uzayı olmak üzere $S(X)$, X in birim küresi ve $B(X)$, X in kapalı birim yuvarı olsun. $S(X)$ in her noktası $B(X)$ in bir uç noktası ise X Banach uzayına rotund (R) denir [10].

Tanım 2.17. $0 < \varepsilon < 1$ olsun. Her $x, y \in S(X)$ için $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde ε a bağlı bir $0 < \delta < 1$ sayısı varsa X Banach uzayına düzgün rotund (UR) denir [7].

Tanım 2.18. X bir reel Banach uzayı olsun. $x \in S(X)$ ve her bir $(x_n) \subset B(X)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| = 2$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ ise $x \in S(X)$ noktasına $B(X)$ in yerel düzgün rotund noktası (LUR -point) denir. $S(X)$ in her noktası $B(X)$ in bir yerel düzgün rotund noktası ise X e yerel düzgün rotund (LUR) denir [10].

Teorem 2.19. X normlu bir lineer uzay ve N , X in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Bu takdirde N nin sınırlı olması için gerek ve yeter şart, her $f \in X'$ için $f(N)$ nin sınırlı olmasıdır [13].

3. MUTLAK OLMAYAN TİPTE CESARO DİZİ UZAYLARI

Cesaro dizi uzayları

$$ces_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$$

ve

$$ces_{\infty} = \left\{ x = (x_k) : \sup_n n^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k| < \infty \right\}$$

Shiue [12] tarafından tanımlandı. Jagers [11] ces_p ($1 < p < \infty$) nin Köthe duallerini hesapladı. Ng and Lee [14,15] mutlak olmayan tipte Cesaro dizi uzayları olan

$$X_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k \right|^p < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$$

ve

$$X_{\infty} = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k \right| < \infty \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve X_p ($1 \leq p < \infty$) nin

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.1)$$

normu ile, X_{∞} dizi uzayının da

$$\|x\|_{\infty} = \sup_n \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k \right| \quad (3.2)$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler. Şimdi bu uzaylarla ilgili ayrıntılı bilgi verelim.

3.1. Normlu Köthe Dizi Uzayları

$X, x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bütün reel dizilerin cümlesi olsun. $\varrho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyoneli

i) $\varrho(0) = 0$,

ii) $\varrho(\alpha x) = |\alpha|\varrho(x)$,

iii) $\varrho(x + y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$

şartlarını sağlıyorsa ϱ fonksiyoneli yarı norm olarak isimlendirilir.

(i) şartı yerine $\varrho, \varrho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şartını sağlıyorsa ϱ fonksiyoneli norm olarak isimlendirilir. $\varrho(x) < \infty$ şartını sağlayan bütün x dizilerinin koleksiyonunu X_ϱ ile gösterelim. Açık olarak X_ϱ bir lineer uzaydır. X_ϱ yi ϱ yarı normu ile donatılmış mutlak olmayan tipte normlu Köthe uzayı olarak adlandıracağız. Eğer X_ϱ, ϱ normu ile tam ise X_ϱ ye Banach uzayı denir.

Bu bölümde X_ϱ nin mutlak olmayan tipte bir Banach uzayı olduğunu kabul edeceğiz.

Yukarıda tanımlanan ϱ yarı normunu kullanarak

$$\varrho'(x) = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \varrho(y) \leq 1 \right\}$$

şeklinde yeni bir ϱ' yarı normunu tanımlayalım ve $\varrho(y) \leq 1$ şartını sağlayan en az bir y için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ serisi yakınsak değilse $\varrho'(x) = \infty$ olsun. ϱ' yarı normu, ϱ in birleştirilmiş yarı normu olarak isimlendirilir. $\varrho'(x) < \infty$ olacak şekilde tüm $x \in X$ dizilerinden oluşan $X_{\varrho'}$ uzayı X_ϱ in birleştirilmiş uzayı olarak isimlendirilir. Her $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X_\varrho$ ve $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X_{\varrho'}$ için

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \varrho(x) \varrho'(y)$$

yazabiliriz.

$E \subset \mathbb{N}$ boş olmayan bir küme olsun. E nin $\varrho(x_F) < \infty$ olacak şekilde bir F alt kümesi varsa ϱ yarı normuna doygundur denir. Burada

$$x_F = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \begin{cases} 1, & k \in F \\ 0, & k \notin F \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir dizidir.

ϱ nin doygun olması için gerek ve yeter şart X_{ϱ} nin sonlu terimli tüm dizileri kapsaması, yani dizinin sonlu çoklukta teriminin sıfırdan farklı olmasıdır. Aşağıdaki teorem Banach-Steinhaus teoreminin bir sonucudur [15]:

Teorem 3.1.1. ϱ' doygun ve $y \in X$ olsun. $y \in X_{\varrho'} \Leftrightarrow$ Her $x \in X_{\varrho}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k < \infty$ dur [15].

Teorem 3.1.2. $1 \leq p < \infty$ için X_p uzayı (3.1) normuna göre ve X_{∞} uzayı da (3.2) normuna göre mutlak olmayan tipte Banach dizi uzayıdır [15].

İspat. $1 \leq p < \infty$ için kısa bir ispat verelim. $(x^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$, X_p de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ ve $i, j \geq N(\varepsilon)$ için $\|x^{(i)} - x^{(j)}\|_p < \varepsilon$ elde edilir. $x^{(i)} = (x_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$ yazabiliriz. k sabiti için $(x_k^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ yakınsaktır, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = x_k$ diyelim. Bu durumda her m ve $i \geq N(\varepsilon)$ için

$$\sum_{n=1}^m \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^{(i)} - x_k) \right|^p \leq \varepsilon^p$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $i \geq N(\varepsilon)$ için $\|x^{(i)} - x\|_p \leq \varepsilon$ olur. Bu X_p nin tam olduğunu ispatlar. X_{∞} un tamlığı benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.1.3. $1 \leq p \leq \infty$ için $ces_p \subset X_p$ ve $ces_p \neq X_p$ dir [15].

İspat. Kapsama aşıkardır. $ces_p \neq X_p$ olduğunu göstermek için, $1 < p < \infty$ için X_p nin elemanı ces_p nin elemanı olmayan $x_1 = -1$ ve $k = 2, 3, \dots$ için $x_k = 2(-1)^k$ olan bir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisini tanımlayalım. Diğer taraftan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = k(-1)^k$ şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi X_{∞} un elemanıdır ancak ces_{∞} un elemanı değildir. Son olarak $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} -1, & k = 1 \\ \frac{(-1)^k(2k-1)}{k(k-1)}, & k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $x \in X_1$ ancak $x \notin ces_1$ dir.

Teorem 3.1.4. $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $\sigma(x) = (\sigma_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dönüşümünü $\sigma: X_p \rightarrow l_p$,
 $\sigma(x) = \sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde σ , bire-bir, örten ve sınırlı
lineer bir dönüşümdür [15].

3.2. X_p nin Birleştirilmiş Uzayı

Bu bölümde X_p uzayının birleştirilmiş uzayından bahsedeceğiz.

Aşağıdaki şartları sağlayan tüm $y \in X_p$ dizilerinin kümesini Y_q ile gösterelim.

(1) Her $k \in \mathbb{N}$ için $|ky_k| \leq M$

(2) $1 \leq q < \infty$ için $\lambda_q(y) = (\sum_{k=1}^{\infty} |k(y_k - y_{k+1})|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$,

$\lambda_{\infty}(y) = \sup\{|k(y_k - y_{k+1})|: k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere X_p nin birleştirilmiş uzayını hesaplayacağız.

Lemma 3.2.1. $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, X_p nin X'_p birleştirilmiş uzayının bir elemanı ise $(ky_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. Özel olarak $p = \infty$ ise $k \rightarrow \infty$ için $ky_k \rightarrow 0$ dır [15].

İspat. $y \in X'_p$ olsun. Bu durumda her $x \in X_p$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k < \infty$ olur. Bu da gösterir ki $k \rightarrow \infty$ için $x_k y_k \rightarrow 0$ dır. $x = (k(-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi X_{∞} un bir elemanı olduğundan $k \rightarrow \infty$ için $ky_k \rightarrow 0$ dır. $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ yazalım. Teorem 3.1.4 den l_p deki her $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi için

$$y_k [ks_k - (k-1)s_{k-1}] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \text{ için} \quad (3.2.1)$$

elde edilir. (3.2.1), l_p deki her $((-1)^k |s_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi için de doğrudur. Yani

$$(-1)^k y_k [k|s_k| - (k-1)|s_{k-1}|] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \text{ için}$$

dır. Böylece $k \rightarrow \infty$ için $ky_k s_k \rightarrow 0$ dır. Şimdi $(ky_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nin sınırlı olduğunu göstereceğiz. $p = 1$ için ispat kolaydır. $1 < p < \infty$ için dizinin sınırlı olmadığını farzedelim. Bu durumda $j \in \mathbb{N}$ için $|k_j y_{k_j}| > j$ olacak şekilde bir $(k_j y_{k_j})$ alt dizisi vardır. $0 < r < 1$ ve $pr > 1$ şeklinde tanımlanan r sayısını alalım ve l_p de

$$s'_k = \begin{cases} (ky_k)^{-r}, & k = k_j, j = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde $(s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisini tanımlayalım. Bu takdirde $j \rightarrow \infty$ için $k_j y_{k_j} s'_{k_j} = (k_j y_{k_j})^{1-r}$ sıfıra yakınsamaz. Bu bir çelişkidir. Böylece dizi sınırlı olmak zorundadır.

Teorem 3.2.2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere X_p ($1 \leq p \leq \infty$) nin birleştirilmiş uzayı X'_p , λ_q normu ile donatılmış Y_q uzayıdır [15].

İspat. $y \in X'_p$ olsun. Her $x \in X_p$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ yakınsaktır. Şimdi Abel dönüşümünü uygulayalım bu takdirde $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^m x_k y_k = \sum_{k=1}^{m-1} k(y_k - y_{k+1})\sigma_k + m y_m \sigma_m$$

elde edilir. $x \in X_p$, $1 \leq p < \infty$, olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $\sigma_n \rightarrow 0$ ve $p = \infty$ için $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. Lemma 3.2.1 den yukarıdaki eşitliğin son terimi $m \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar ve böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} k(y_k - y_{k+1})\sigma_k$$

dir. Teorem 3.1.4 ü uygulayarak görebiliriz ki üstteki seriler l_p ye ait olan bütün

$\sigma = (\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri için yakınsaktır. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $(k(y_k - y_{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$, l_q ya ait ve

$$\begin{aligned} \lambda_q(y) &= \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} k(y_k - y_{k+1})\sigma_k \right| : \|\sigma\|_{l_p} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \|x\|_p \leq 1 \right\} = \|y\|'_p \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.2.1 den $X'_p \subset Y_q$ olduğu ispatlanır.

Tersine; $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, Y_q nun bir elemanı olsun. λ_q normu doygun olduğundan Teorem 3.1.1 ve Abel dönüşümünden $x \in X_p$ ve $y \in Y_q$ için $k \rightarrow \infty$ olmak üzere $m y_k \sigma_k \rightarrow 0$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. $1 \leq p < \infty$ için yukarıdaki bilinenlerden $(ky_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sınırlı ve $k \rightarrow \infty$ için $\sigma_k \rightarrow 0$ dır. $p = \infty$ için $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sınırlı ve $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ dır. Böylece

$$|ky_k| \leq \sum_{j=k}^{\infty} k|y_j - y_{j-1}| \leq \sum_{j=k}^{\infty} j|y_j - y_{j-1}|$$

dir. $k \rightarrow \infty$ için $ky_k \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO DİZİ UZAYLARINDA DÜZGÜN KADEC-KLEE ÖZELLİKLERİ VE ROTUNDLUK

Bu kısımda $ces(p)$ dizi uzayının Luxemburg normuna göre rotund ve düzgün Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu göstereceğiz.

Tanım 4.1. X bir reel vektör uzayı olsun. $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli

(i) $\varrho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $|\alpha| = 1$ şartını sağlayan her α skaleri için $\varrho(\alpha x) = \varrho(x)$,

(iii) Her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ iken $\varrho(\alpha x + \beta y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$

şartlarını sağlıyorsa bir modular olarak isimlendirilir.

(iv) Her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ iken $\varrho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \varrho(x) + \beta \varrho(y)$

ise ϱ moduları konveks olarak isimlendirilir.

ϱ , X üzerinde bir modular olsun.

$$X_\varrho = \{x \in X : \varrho(\lambda x) < \infty, \text{ en az bir } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

uzayına modular uzay denir. Eğer ϱ konveks modular ise

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\},$$

$$\|x\|_0 = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \varrho(kx))$$

fonksiyonları X_ϱ üzerinde iki normdur, sırasıyla bu normlar Luxemburg norm ve Amemiya norm olarak isimlendirilir.

$$\|x\| \leq \|x\|_0 \leq 2\|x\|$$

olduğundan Luxemburg normu ile Amemiya normu denktir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ olmak üzere pozitif reel sayıların bir dizisi $p = (p_n)$ olsun.

Genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı $ces(p)$

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x(i)| \right)^{p_n}$$

olmak üzere

$$ces(p) = \{x \in w : \rho(\lambda x) < \infty, \text{ en az bir } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır [6].

$ces(p)$ uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

Luxemburg normu ile bir Banach uzayıdır. $p = (p_n)$ sınırlı ise

$$ces(p) = \left\{ x = x(i) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x(i)| \right)^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır [8].

$l(p)$ Nakano dizi uzayı, $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^{p_i}$ olmak üzere

$$l(p) = \{x \in w : \sigma(\lambda x) < \infty, \text{ en az bir } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır. $l(p)$ uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

normuna göre Banach uzayıdır. $p = (p_n)$ sınırlı ise

$$l(p) = \left\{ x \in w : \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^{p_i} < \infty \right\}$$

elde edilir [9].

Bu çalışmada her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ve $p = (p_k)$ sınırlı olmak üzere $M = \sup_k p_k$ olacaktır.

Önerme 4.2. ρ , $ces(p)$ üzerinde konveks modulardır [8].

İspat. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ve her α skaleri için $|\alpha| = 1$ iken $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ olduğu açıktır. $x, y \in ces(p)$ ve $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $t \rightarrow |t|^{p_k}$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x + \beta y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |\alpha x(i) + \beta y(i)| \right)^{p_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right) + \beta \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y(i)| \right) \right)^{p_k} \\ &\leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y(i)| \right)^{p_k} \\ &= \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.3. $x \in ces(p)$ olsun. $ces(p)$ üzerindeki ρ moduları aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $0 < a < 1$ ise, $a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) \leq \rho(x)$ ve $\rho(ax) \leq a\rho(x)$,
- (ii) $a \geq 1$ ise, $\rho(x) \leq a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right)$,
- (iii) $a \geq 1$ ise, $\rho(x) \leq a\rho(x) \leq \rho(ax)$ [8].

İspat. ρ konveks olduğundan (iii) açıktır. Geriye (i) ve (ii) nin ispatı kalır. $0 < a < 1$ olsun.

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x(i)}{a} \right| \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a^{p_k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x(i)}{a} \right| \right)^{p_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} a^M \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x(i)}{a} \right| \right)^{p_k} \\ &= a^M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x(i)}{a} \right| \right)^{p_k} = a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

elde edilir, ρ konveks olduğundan $\rho(ax) \leq a\rho(x)$ dir. Böylece (i) sağlanır.

Şimdi $a \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a^{p_k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x(i)}{a} \right| \right)^{p_k} \\ &\leq a^M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x(i)}{a} \right| \right)^{p_k} = a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) sağlanır.

Önerme 4.4. Her $x \in ces(p)$ için,

- (i) $\|x\| < 1$ ise, $\rho(x) \leq \|x\|$,
 - (ii) $\|x\| > 1$ ise, $\rho(x) \geq \|x\|$,
 - (iii) $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1$,
 - (iv) $\|x\| < 1 \Leftrightarrow \rho(x) < 1$,
 - (v) $\|x\| > 1 \Leftrightarrow \rho(x) > 1$,
 - (vi) $0 < a < 1$ ve $\|x\| > a$ ise, $\rho(x) > a^M$, ve
 - (vii) $a \geq 1$ ve $\|x\| < a$ ise, $\rho(x) < a^M$
- dir [8].

İspat. (i) $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|$ olacak şekilde bir ε seçelim, bu durumda $\|x\| + \varepsilon < 1$ dir.

$\|\cdot\|$ un tanımından, $\|x\| + \varepsilon > \lambda$ ve $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır. Önerme 4.3

(i) ve (iii) den

$$\begin{aligned}\rho(x) &\leq \rho\left(\frac{(\|x\| + \varepsilon)}{\lambda} x\right) = \rho\left((\|x\| + \varepsilon) \frac{x}{\lambda}\right) \\ &\leq (\|x\| + \varepsilon) \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \|x\| + \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $\rho(x) \leq \|x\|$ olduğunu gösterir. Böylece (i) in ispatı tamamlanır.

(ii) $0 < \varepsilon < \frac{\|x\|-1}{\|x\|}$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçelim, bu durumda $1 < (1 - \varepsilon)\|x\| < \|x\|$

dir. $\|\cdot\|$ un tanımı ve Önerme 4.3 (i) den,

$$1 < \rho\left(\frac{x}{(1 - \varepsilon)\|x\|}\right) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)\|x\|} \rho(x)$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon \in \left(0, \frac{\|x\|-1}{\|x\|}\right)$ için $(1 - \varepsilon)\|x\| < \rho(x)$ dir. Bu da $\|x\| \leq \rho(x)$

olduğunu gösterir. Bu (ii) nin ispatını tamamlar.

(iii) Kabul edelim ki $\|x\| = 1$ olsun. $\|x\|$ in tanımından $\varepsilon > 0$ için $1 + \varepsilon > \lambda > \|x\|$ ve $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı vardır. Önerme 4.3 (ii) den,

$$\rho(x) \leq \lambda^M \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \lambda^M < (1 + \varepsilon)^M$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $(\rho(x))^{\frac{1}{M}} < 1 + \varepsilon$ olup, bu da $\rho(x) \leq 1$ olduğunu gösterir. $\rho(x) < 1$ ise, $\rho(x) < a^M < 1$ olacak şekilde bir $a \in (0,1)$ seçebiliriz. Önerme 4.3 (i) den, $\rho\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{1}{a^M} \rho(x) < 1$ elde edilir. Buradan da $\|x\| \leq a < 1$ olup bu bir çelişkidir. Böylece $\rho(x) = 1$ dir. Kabul edelim ki $\rho(x) = 1$ olsun. O zaman $\|x\| \leq 1$ dir. $\|x\| < 1$ ise (i) den $\rho(x) \leq \|x\| < 1$ elde edilir ki bu bizim kabulümüzle çelişir. Böylece $\|x\| = 1$ dir.

(iv) (i) ve (iii) den görülür.

(v) (iii) ve (iv) den açıktır.

(vi) $0 < a < 1$ ve $\|x\| > a$ olsun. Bu durumda $\left\|\frac{x}{a}\right\| > 1$ dir. (v) den $\rho\left(\frac{x}{a}\right) > 1$ olur.

Böylece Önerme 4.3 (i) den $\rho(x) \geq a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) > a^M$ elde edilir.

(vii) $a \geq 1$ ve $\|x\| < a$ olsun. Bu durumda $\left\|\frac{x}{a}\right\| < 1$ dir. (iv) den $\rho\left(\frac{x}{a}\right) < 1$ olur. $a = 1$ ise $\rho(x) < 1 = a^M$ olduğu açıktır. $a > 1$ ise Önerme 4.3 (ii) den $\rho(x) \leq a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) < a^M$ dir.

Önerme 4.5. (x_n) , $ces(p)$ de bir dizi olsun.

(i) $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n\| \rightarrow 1$ ise, $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n) \rightarrow 1$,

(ii) $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n) \rightarrow 0$ ise, $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n\| \rightarrow 0$ [8].

İspat. (i) $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n\| \rightarrow 1$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Bu durumda $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için $1 - \varepsilon < \|x_n\| < 1 + \varepsilon$. Önerme 4.4 (vi) ve (vii) den, her $n \geq N$ için $(1 - \varepsilon)^M < \rho(x_n) < (1 + \varepsilon)^M$, bu $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n) \rightarrow 1$ olduğunu gösterir.

(ii) $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n\| \nrightarrow 0$ olduğunu farzedelim. Bu durumda bir $\varepsilon \in (0,1)$ ve (x_n) in bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_{n_k}\| > \varepsilon$ dur. Önerme 4.4 (vi) dan, her $k \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{n_k}) > \varepsilon^M$ elde edilir. Bu $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n) \nrightarrow 0$ olduğunu verir.

Lemma 4.6. $x \in ces(p)$ ve $(x_n) \subseteq ces(p)$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n) \rightarrow \rho(x)$ olsun. Bu durumda her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) \rightarrow x(i)$ ise, $x_n \rightarrow x$ dir [8].

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\varrho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} < \infty$ olduğu için

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^{M+1}} \quad (4.1)$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n(i) \rightarrow x(i)$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\varrho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} \rightarrow \varrho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k}$$

olduğundan, her $n \geq n_0$ için

$$\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} < \rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \quad (4.2)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.3)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (4.1), (4.2) ve (4.3) den her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_n - x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n - x) \rightarrow 0$ dır. Böylece Önerme 4.5 (ii) den $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ dır.

Teorem 4.7. $ces(p)$ uzayı H-özelliğine sahiptir [8].

İspat. $x \in S(ces(p))$ ve $(x_n), ces(p)$ de $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n\| \rightarrow 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde bir dizi olsun. Önerme 4.4 (iii) den $\rho(x) = 1$, Önerme 4.5 (i) den $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n) \rightarrow \rho(x)$ dir. $p_i : ces(p) \rightarrow \mathbb{R}, p_i(y) = y(i)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm $ces(p)$ üzerinde sürekli lineer fonksiyonel olup, her $i \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n(i) \rightarrow x(i)$ dir.

Lemma 4.6 dan $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ elde edilir.

Teorem 4.8. $ces(p)$ uzayı rotund uzaydır [8].

İspat. $x \in S(ces(p))$ ve $y, z \in B(ces(p))$ olmak üzere $x = \frac{y+z}{2}$ olsun. Önerme 4.4 ve ρ konveks olduğundan

$$1 = \rho(x) \leq \frac{1}{2}(\rho(y) + \rho(z)) \leq \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

elde edilir, öyle ki $\rho(x) = \frac{1}{2}(\rho(y) + \rho(z)) = 1$ dir. Bu da her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{y(i) + z(i)}{2} \right| \right)^{p_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y(i)| \right)^{p_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |z(i)| \right)^{p_k} \quad (4.4)$$

olduğunu ifade eder. Her $i \in \mathbb{N}$ için $y(i) = z(i)$ olduğunu göstereceğiz. (4.4) den

$$|x(1)|^{p_1} = \left| \frac{y(1) + z(1)}{2} \right|^{p_1} = \frac{1}{2} (|y(1)|^{p_1} + |z(1)|^{p_1}) \quad (4.5)$$

elde edilir. $t \rightarrow |t|^{p_1}$ dönüşümü kesin konveks olduğundan, (4.5) den $y(1) = z(1)$ dir.

Şimdi her $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $y(i) = z(i)$ olduğunu farzedelim. O zaman her $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $y(i) = z(i) = x(i)$ elde edilir. (4.4) den

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{y(i) + z(i)}{2} \right| \right)^{p_k} &= \left(\frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y(i)| + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |z(i)|}{2} \right)^{p_k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y(i)| \right)^{p_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |z(i)| \right)^{p_k} \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. $t \rightarrow |t|^{p_k}$ dönüşümünün konveksliğinden $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y(i)| = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |z(i)|$ dir. Her $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ için $y(i) = z(i)$ olduğundan

$$|y(k)| = |z(k)| \quad (4.7)$$

dır. $y(k) = 0$ ise $z(k) = y(k) = 0$ dir. $y(k) \neq 0$ olsun. O zaman $z(k) \neq 0$ dir. $y(k)z(k) < 0$ ise (4.7) den $y(k) + z(k) = 0$ elde edilir. (4.6) ve (4.7) den

$$\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} |x(i)| \right)^{p_k} = \left(\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |x(i)| + |y(k)| \right) \right)^{p_k}$$

olup bu bir çelişkidir. Böylece $y(k)z(k) > 0$ olur. Bu da (4.5) den $y(k) = z(k)$ olduğunu ifade eder. Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için tümevarımdan $y(i) = z(i)$, yani $y = z$ dir [8].

Önerme 4.9. $(x_n) \subseteq B(l(p))$ ve $(y_n) \subseteq B(l(p))$ olsun. $\sigma \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) ise her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) - y_n(i) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) dır [9].

Önerme 4.10. $(x_n) \subseteq B(ces(p))$ ve $x \in S(ces(p))$ olsun. $\rho \left(\frac{x_n + x}{2} \right) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) ise her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) \rightarrow x(i)$ ($n \rightarrow \infty$) dır [9].

İspat. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \mathbb{N}$ için,

$$s_n(i) = \begin{cases} \text{sgn}(x_n(i) + x(i)), & x_n(i) + x(i) \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , \quad x_n(i) + x(i) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_n(i) \frac{x_n(i)}{2} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_n(i) \frac{x(i)}{2} \right)^{p_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{x_n(i) + x(i)}{2} \right| \right)^{p_k} \\ &= \rho \left(\frac{x_n + x}{2} \right) \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

Her $n, k \in \mathbb{N}$ için $a_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_n(i) x_n(i)$ ve $b_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_n(i) x(i)$ olsun. Bu durumda $(a_n) \in l(p)$ ve $(b_n) \in l(p)$ olup, (4.8) den $n \rightarrow \infty$ için

$$\sigma \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) \rightarrow 1$$

elde edilir. Önerme 4.9 dan her $i \in \mathbb{N}$ için

$$a_n(i) - b_n(i) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.9)$$

elde edilir. Şimdi biz her $k \in \mathbb{N}$ için $x_n(k) \rightarrow x(k)$ ($n \rightarrow \infty$) olduğunu göstereceğiz.

Önerme 4.9 dan $n \rightarrow \infty$ için

$$s_n(1)x_n(1) - s_n(1)x(1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu da $n \rightarrow \infty$ için $x_n(1) \rightarrow x(1)$ olduğunu gösterir. Farzedelim ki her

$i \leq k-1$ için $x_n(i) \rightarrow x(i)$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. Bu durumda her $i \leq k-1$ için

$$s_n(i)(x_n(i) - x(i)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.10)$$

elde edilir. $s_n(k)(x_n(k) - x(k)) = k(a_n(k) - b_n(k)) - \sum_{i=1}^{k-1} s_n(i)(x_n(i) - x(i))$

olduğu için, (4.9) ve (4.10) dan $n \rightarrow \infty$ için $s_n(k)(x_n(k) - x(k)) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu da

$n \rightarrow \infty$ için $x_n(k) \rightarrow x(k)$ demektir. Böylece tümevarımdan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_n(k) \rightarrow x(k)$ ($n \rightarrow \infty$) elde edilir.

Teorem 4.11. $ces(p)$ uzayı yerel düzgün rotund uzaydır [9].

İspat. $x \in S(ces(p))$ ve (x_n) , $B(ces(p))$ de $\|x_n + x\| \rightarrow 2$ ($n \rightarrow \infty$) olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için $\left\| \frac{x_n + x}{2} \right\| \rightarrow 1$ dir. Önerme 4.5 (i) den $n \rightarrow \infty$ için $\rho\left(\frac{x_n + x}{2}\right) \rightarrow 1$ olur. Önerme 4.10 dan her $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için $x_n(i) \rightarrow x(i)$ dir. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^{M+1}}, \quad (4.11)$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq n_0 \quad (4.12)$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} > \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} - \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M}, \quad n \geq n_0 \quad (4.13)$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Önerme 4.4 (i) ve (iii) den her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n) \leq 1$ ve $\rho(x) = 1$ dir. (4.11), (4.12), (4.13) ve $a, b \geq 0$ için $(a + b)^{p_k} \leq 2^{p_k}(a^{p_k} + b^{p_k})$ gerçeğinden her $n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned} \rho(x_n - x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(1 - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_n(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(1 - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^{M+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $n \rightarrow \infty$ için $\rho(x_n - x) \rightarrow 0$ dır. Böylece Önerme 4.5 (ii) den $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ dır. Teoremin ispatı tamamlanır.

5. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO FARK DİZİ UZAYLARI

Fark dizi uzayları fikri ilk kez Kızmaz [19] tarafından ileri sürüldü. Kızmaz 1981 de $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ ve $X = l_\infty, c$ veya c_0 için

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) : (\Delta x_k) \in X\}$$

dizi uzaylarını tanımladı. Daha sonra Et ve Çolak [17] genelleştirilmiş fark operatörünü kullanarak bu uzayları genelleştirdiler. m herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\Delta^m, \sum^m : w \rightarrow w$$

operatörlerini

$$(\Delta^1 x)_k = \Delta^1 x_k = x_k - x_{k+1}, \quad \left(\sum^1 x \right)_k = \sum_{j=1}^{k-1} x_j, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$\Delta^m = \Delta^1 o \Delta^{m-1}, \quad \sum^m = \sum^1 o \sum^{m-1} \quad (m \geq 2)$$

şeklinde tanımlayalım. Açıkça w üzerinde

$$\sum^m o \Delta^m = \Delta^m o \sum^m = id$$

dır.

1995 yılında Et ve Çolak [17] yukarıdaki dizi uzaylarını $X = l_\infty, c$ veya c_0 için $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$,

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in X\}$$

dizi uzaylarına genelleştirdi. $X(\Delta^m)$ dizi uzayları $X = l_\infty, c$ veya c_0 için

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x_k\|_{\infty}$$

normuna göre Banach uzaylarıdır. Şimdi $\Delta^{(m)}$ operatörünü

$$\Delta^{(m)}x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i}$$

şeklinde tanımlayalım. $\Delta^{(m)}(X)$ in

$$\|x\|_{\Delta'} = \sup_k |\Delta^{(m)}x_k|$$

normuna göre bir *BK*-uzayı olduğu gösterilebilir, $\|x\|_{\Delta}$ ve $\|x\|_{\Delta'}$ normları birbirine denktir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $(\Delta^m x_k) \in X$ olması için gerek ve yeter şart $(\Delta^{(m)}x_k) \in X$ olmasıdır.

Δ operatörünü kullanarak 1983 yılında Orhan [16] aşağıdaki uzayları tanımladı.

$$X_p(\Delta) = \begin{cases} \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \right|^p < \infty \right\}, & 1 \leq p < \infty \\ \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \right| < \infty \right\}, & p = \infty \end{cases}$$

$$C_p(\Delta) = \begin{cases} \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k| \right)^p < \infty \right\}, & 1 \leq p < \infty \\ \left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k| < \infty \right\}, & p = \infty \end{cases}$$

$X_p(\Delta)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_1 = |x_1| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

X_{∞} uzayı

$$\|x\|_2 = |x_1| + \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \right|,$$

$C_p(\Delta)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_3 = |x_1| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$C_{\infty}(\Delta)$ uzayı

$$\|x\|_4 = |x_1| + \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k|,$$

normları ile birer normlu uzaydır. Açık olarak $C_p(\Delta) \subset X_p(\Delta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) dır. Bu kapsama kesindir. Gerçekten $(x_k) = ((-1)^k)$, $C_p(\Delta)$ nın elemanı değil fakat $X_p(\Delta)$ nın elemanıdır. Bundan başka

$$x_k = \begin{cases} 0 & , k = 1 \\ \frac{(-1)^k}{k} & , k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

olarak tanımlanan dizi $X_1(\Delta)$ nın elemanıdır fakat $C_1(\Delta)$ nın elemanı değildir. Şimdi x dizisini $x = (-1)^k k$ ($k = 1, 2, \dots$) şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $(x_k) \notin C_{\infty}(\Delta)$ fakat $(x_k) \in X_{\infty}(\Delta)$ dır. Diğer taraftan $ces_p \subset C_p(\Delta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) kapsamı kesindir. Dikkat edilirse X_p ve $C_p(\Delta)$ uzaylarının ortak elemanları vardır. Fakat bu uzaylar birbirlerini kapsamazlar. Et [18], $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C_p(\Delta^m)$ ($1 \leq p < \infty$) ve $C_{\infty}(\Delta^m)$ uzaylarını

$$C_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

ve

$$C_{\infty}(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right| < \infty, n \geq 1 \right\}$$

şeklinde tanımladı. $C_p(\Delta^m)$ ve $C_{\infty}(\Delta^m)$ in lineer uzay oldukları aşikardır.

Teorem 5.1. $C_p(\Delta^m)$, $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.1)$$

normuna göre bir Banach uzayı ve $C_{\infty}(\Delta^m)$,

$$\|x\|_{\infty} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right| \quad (5.2)$$

normuna göre bir Banach uzayıdır [18].

İspat. $C_{\infty}(\Delta^m)$, (5.2) normuna göre bir normlu uzaydır. $C_{\infty}(\Delta^m)$ in tam olduğunu göstermek için, her bir $s \in \mathbb{N}$ için $x^s = (x_i^s) = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in C_{\infty}(\Delta^m)$ olmak üzere $C_{\infty}(\Delta^m)$ de (x^s) bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\infty} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m (x_k^s - x_k^t) \right| \rightarrow 0$$

dır. Böylece $s, t \rightarrow \infty$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu da $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisinin kompleks sayılar cümlesi $\mathcal{C}$ de Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathcal{C}$ tam olduğu için dizi yakınsaktır. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_s x_k^s = x_k$$

yazabiliriz. (x^s) Cauchy dizisi olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki her $s, t \geq N$ için $\|x^s - x^t\|_{\infty} < \varepsilon$ dur. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ ve her $s, t \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| \leq \varepsilon$$

ve

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m (x_k^s - x_k^t) \right| \leq \varepsilon$$

dır. Her $s \geq N$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

ve

$$\lim_t \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m(x_k^s - x_k^t) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m(x_k^s - x_k) \right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu da her $s \geq N$ için $\|x^s - x\|_\infty < 2\varepsilon$ olduğunu gösterir ki $x = (x_k)$ olmak üzere $s \rightarrow \infty$ için $x^s \rightarrow x$ dir.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m(x_k + x_k^N - x_k^N) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k^N \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m(x_k^N - x_k) \right| \\ &\leq \|x^N - x\|_\infty + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k^N \right| < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $x \in C_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. Böylece $C_\infty(\Delta^m)$ bir Banach uzayıdır. Benzer yolla $C_p(\Delta^m)$ in (5.1) normuna göre bir Banach uzayı olduğu gösterilebilir.

$C_p(\Delta^m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) Banach uzayı ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x^s - x\|_p \rightarrow 0$ ($s \rightarrow \infty$) iken $|x^s - x| \rightarrow 0$ ($s \rightarrow \infty$) olduğundan $C_p(\Delta^m)$ bir BK-uzayıdır.

Teorem 5.1 de $m = 1$ ve $m = 0$ alınırsa sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2. $C_p(\Delta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayı bir Banach uzayıdır [16].

Sonuç 5.3. $X_p(\Delta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayı bir Banach uzayıdır [15].

Şimdi

$$s : C_p(\Delta^m) \rightarrow C_p(\Delta^m), x \rightarrow sx = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

operatorünü tanımlayalım. Açık olarak bu operator $C_p(\Delta^m)$ üzerinde sınırlı lineer bir operatördür. $1 \leq p \leq \infty$ için

$$s(C_p(\Delta^m)) = sC_p(\Delta^m) = \{x = (x_k) : x \in C_p(\Delta^m), x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$$

cümlesi $C_p(\Delta^m)$ in alt cümlesidir.

Şimdi bu dizi uzayları arasındaki bazı kapsama ilişkilerini verelim.

Teorem 5.4. $1 \leq p < q$ ise $C_p(\Delta^m) \subset C_q(\Delta^m)$ dir [18].

İspat. $1 \leq p < q$ için

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği ispatı verir.

Teorem 5.5. $1 \leq p \leq \infty$ için $C_p(\Delta^{m-1}) \subset C_p(\Delta^m)$ kapsaması kesindir [18].

İspat. $1 \leq p < \infty$ için $x = (x_k) \in C_p(\Delta^{m-1})$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_k \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_{k+1} \right|$$

dir. $1 \leq p < \infty$ için

$$|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $1 \leq p < \infty$ için $M = 2^p$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p \leq M \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_k \right|^p + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_{k+1} \right|^p \right\}$$

olur. Her bir pozitif r tamsayısı için

$$\sum_{n=1}^r \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p \leq M \left\{ \sum_{n=1}^r \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_k \right|^p + \sum_{n=1}^r \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_{k+1} \right|^p \right\}$$

olup $r \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p \leq M \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_k \right|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^{m-1} x_{k+1} \right|^p \right\} < \infty$$

elde edilir.

Böylece $1 \leq p < \infty$ için $C_p(\Delta^{m-1}) \subset C_p(\Delta^m)$ dir. Kapsama kesindir. Gerçekten; $x = (k^{m-1})$ dizisi $1 \leq p < \infty$ için $C_p(\Delta^m)$ in bir elemanı fakat $C_p(\Delta^{m-1})$ elemanı değildir. Benzer şekilde $C_{\infty}(\Delta^{m-1}) \subset C_{\infty}(\Delta^m)$ olduğunu göstermek kolaydır. $C_{\infty}(\Delta^{m-1}) \neq C_{\infty}(\Delta^m)$ olduğunu görmek için, her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = k^m$ şeklinde (x_k) dizisini tanımlayalım. Bu durumda (x_k) , $C_{\infty}(\Delta^m)$ in bir elemanı olup $C_{\infty}(\Delta^{m-1})$ in elemanı değildir. Diğer taraftan $c(\Delta^m) \subset l_{\infty}(\Delta^m) \subset C_{\infty}(\Delta^m)$ olup bu kapsama kesindir. Gerçekten;

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , & k = n^2 \\ 0 & , & k \neq n^2 \end{cases} , \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi $C_{\infty}(\Delta^m)$ in elemanı $l_{\infty}(\Delta^m)$ in elemanı değildir.

$C_p(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ uzaylarının ortak elemanları vardır, fakat birbirini kapsamazlar. Gerçekten; $(x_k) = (k^m)$ dizisi, $c(\Delta^m)$ in bir elemanı olup $C_p(\Delta^m)$ in bir elemanı değildir. Diğer taraftan $(x_k) = ((-1)^k)$ dizisi $C_p(\Delta^m)$ e ait fakat $c(\Delta^m)$ e ait değildir.

Uyarı 5.6. $1 \leq p \leq \infty$ için $C_p(\Delta^m)$ dizi cebiri değildir. Bunu bir örnekle açıklayalım. $x = (k)$ ve $y = (k^{m-1})$ olsun. Açık olarak $x, y \in C_p(\Delta^m)$ ($1 \leq p < \infty$), $x \cdot y \notin C_p(\Delta^m)$ dir.

Şimdi $O_p(\Delta^m)$ ve $O_{\infty}(\Delta^m)$ uzaylarını

$$O_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \right)^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

$$O_{\infty}(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| < \infty, n \geq 1 \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu uzaylar sırasıyla

$$\|x\|_{p_3} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\infty_1} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \right)$$

normlarına göre normlu uzaylardır. Açık olarak $O_p(\Delta^m) \subset C_p(\Delta^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ dır.

$1 \leq p \leq \infty$ için $O_p(\Delta^{m-1}) \subset O_p(\Delta^m)$ olduğunu görmek kolaydır.

5.1. Dual Uzaylar

Bu kısımda $C_{\infty}(\Delta^m)$ ve $O_{\infty}(\Delta^m)$ in Köthe-Toeplitz duallerini tanımlayacağız. Bunun için aşağıdaki birkaç Lemmayı ispatsız olarak vereceğiz.

Lemma 5.1.1. $x \in sC_{\infty}(\Delta^m)$ ise $\sup_k k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$ dur [18].

Lemma 5.1.2. $\sup_k k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$ iken $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ dur [17].

Sonuç 5.1.3. $x \in sC_{\infty}(\Delta^m)$ iken $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ dur [18].

Tanım 5.1.4. X bir dizi uzayı olsun ve

$$X^{\alpha} = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \text{ her } x \in X \text{ için} \right\}$$

tanımlayalım. X^{α} ya X in α -dual uzayları denir. X^{α} , Köthe-Toeplitz dual uzayı olarak da isimlendirilir. $X \subset Y$ ise $Y^{\alpha} \subset X^{\alpha}$ dır. $X \subset X^{\alpha\alpha}$ olduğu açıktır. $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X bir α -uzay olarak isimlendirilir. Özel olarak bir α -uzay Köthe uzay veya kusursuz (perfekt) dizi uzayı olarak adlandırılır [18].

Lemma 5.1.5. m bir pozitif tamsayı olsun.

$$[sC_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha} = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| < \infty \right\}$$

dur [18].

İspat.

$$U_1 = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| < \infty \right\}$$

diyelim. $a \in U_1$ ise, her bir $x \in sC_{\infty}(\Delta^m)$ için Sonuç 5.1.3 den

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| (k^{-m} |x_k|) < \infty$$

dur. Böylece $a \in [sC_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ olur.

$a \in [sC_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ olsun. O zaman her bir $a \in sC_{\infty}(\Delta^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ dur.

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \\ k^m, & k > m \end{cases} \quad (5.1.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |k^m a_k| = \sum_{k=1}^m |k^m a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |k^m a_k| < \infty$$

yazılabilir. Bu da $a \in U_1$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.1.6. $[sC_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha} = [C_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ [18].

İspat. $sC_{\infty}(\Delta^m) \subset C_{\infty}(\Delta^m)$ olduğundan $[C_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha} \subset [sC_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ dır.

$a \in [sC_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ ve $x \in C_{\infty}(\Delta^m)$ olsun. $x' = (x'_k) \in sC_{\infty}(\Delta^m)$ için

$$x_k = \begin{cases} x_k, & k \leq m \\ x'_k, & k > m \end{cases}$$

şeklinde $x = (x_k)$ dizisini alalım. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^m |a_k x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x'_k| < \infty$$

yazabiliriz. Buradan $a \in [C_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ dır.

Teorem 5.1.7. $[O_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha} = [C_{\infty}(\Delta^m)]^{\alpha}$ [18].

Teorem 5.1.8. $X = O_\infty(\Delta^m)$ veya $C_\infty(\Delta^m)$ için

$[X]^{\alpha\alpha} = \{a = (a_k) : \sup_k k^{-m}|a_k| < \infty\}$ dur [18].

Sonuç 5.1.9. $X = O_\infty(\Delta^m)$ veya $C_\infty(\Delta^m)$ olsun. Bu durumda X perfekt değildir [18].

6. SONUÇ

Bu tezde, Ng ve Lee tarafından tanımlanan mutlak olmayan tipte Cesaro dizi uzayları, m pozitif bir tamsayı olmak üzere, genelleştirilmiş fark operatörü Δ^m kullanılarak $C_p(\Delta^m)$ ve $C_\infty(\Delta^m)$ uzaylarına genelleştirildi ve bu uzayların Köthe-Toeplitz dualleri verildi. $X \neq X^{\alpha\alpha}$ olduğundan bu uzaylar perfekt uzaylar değildir.

KAYNAKLAR

- [1] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [2] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [3] **Curtain, R. F. and Pritchard, A. J.**, 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London.
- [4] **Megginson, R. E.**, 1998. An Introduction to Banach Space Theory, Springer-Verlag, New York.
- [5] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, *Math. Z.*, 118, 93-102.
- [6] **Petrot, N. and Suantai, S.**, 2004. On Uniform Kadec-Klee Properties and Rotundity in Generalized Cesaro Sequence Spaces, *Internat. J. Math. Sci.* **2**, 91-97.
- [7] **Cui, Y., Hudzik, H. and Kowalewski, W.**, 2003. On Fully Rotundity Properties and Approximative Compactness in Some Banach Sequence Spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **34(1)** : 17-30.
- [8] **Suantai, S.**, 2003. On the H-Property of Some Banach Sequence Spaces, *Archivum Mathematicum(BRNO)*, *Tomus* **39**, 309-316.
- [9] **Suantai, S.**, 2003. On Some Convexity Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces, *Georgian Mathematical Journal*, *Volume* **10**, *Number* **1**, 193-200.
- [10] **Karakaya, V.**, 2007. Some Geometric Properties of Sequence Spaces Involving Lacunary Sequence, *JIA* , *Article ID* 81028.

- [11] **Jagers, A. A.**, 1974. A note on Cesaro sequence spaces, *Nieuw Arch. voor Wiskunde* (3) 22, p. 113-124.
- [12] **Shiue, J. S.**, 1970. On the Cesaro sequence spaces, *Tamkang J. Math.* 2, p. 19-25.
- [13] **Bayraktar, M.**, 1994. Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi Yayınları No: 789, Erzurum.
- [14] **Ng, P.N. and Lee, P.Y.**, 1976. On the associate spaces of Cesaro sequence spaces, *Nanta Math.* 9.
- [15] **Ng, P.N. and Lee, P.Y.**, 1978. Cesaro sequence spaces of non-absolute type, *Prace Matematyczne XX*.
- [16] **Orhan, C.**, 1983. Cesaro difference sequence spaces and related matrix transformations, *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A₁* 32, 55-63.
- [17] **Et, M. And Çolak, R.**, 1995. On Some Generalized Difference Sequence Spaces, *Soochow Journal of Mathematics Vol. 21*, No: 4, 377-386.
- [18] **Et, M.**, 1996. On Some Generalized Cesaro Difference Sequence Spaces, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Dergisi* 55-56, 221-229.
- [19] **Kızmaz, H.**, 1981. On Certain Sequence Spaces, *Canad. Math. Bull. Vol. 24 (2)*, 169-176.
- [20] **Mursaleen, M.**, 2003. Some Geometric Properties of a Sequence Space Related to l^p , *Bull. Austral. Math. Soc.*, 67, 343-347.

ÖZGEÇMİŞ

1986 Malatya doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Malatya’da tamamladıktan sonra 2004 yılında kazandığım İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’den 2008 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım ve halen devam etmekteyim.

Hacer ŞENGÜL