

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA
FACTORABLE YÜZEYLER

Ayla ERDUR

Yüksek Lisans Tezi
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri
Danışman: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Haziran-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayla ERDUR
(141121104)

Tezin Estitüye Verildiği Tarih: 14.06.2016

Tezin Savunulduğu Tarih: 29.06.2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (Fırat Üniv.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (Fırat Üniv.)

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL (Bingöl Üniv.)

Haziran-2016

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasının her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemedi beni yönlendiren ve sabırla yardımcı olan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ' e teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

AYLA ERDUR

ELAZIĞ-2016



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar	2
2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar.....	4
2.3. 3- Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Temel Kavramlar	10
2.4. 3- Boyutlu Galilean Uzayında Temel Kavramlar	15
3. ÖKLİD UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER.....	19
4. LORENTZ UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER.....	22
5. G31 PSEUDO GALİLEAN UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER	42
5.1. G31 Pseudo-Galilean Uzayında Sıfır Gauss Eğrilikli Factorable Yüzeyler.....	42
5.2. G31 Pseudo - Galilean Uzayında Minimal Factorable Yüzeyler	47
6. G3 GALİLEAN UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER.....	52
6.1 . G3 Galilean Uzayında Sıfır Gauss Eğrilikli Factorable Yüzeyler.....	52
6.2. G3 Galilean Uzayında Minimal Factorable Yüzeyler	56
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ.....	63

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde; yüzeylerin diferansiyel geometrisi hakkında genel literatür bilgilerine yer verildi.

İkinci bölümde Öklid, Lorentz, Pseudo-Galilean ve Galilean uzaylarının önemli tanım ve teoremleri verildi.

Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla Öklid, Lorentz ve Pseudo-Galilean uzaylarında factorable yüzeylere yer verildi.

Son bölümde ise Galilean uzayında Factorable yüzeylerin sıfır Gauss eğrilikli yüzey olması durumlarına göre karakterizasyonlar detaylıca incelendi.

Anahtar Kelimeler: Galilean Uzayı, Pseudo Galilean Uzayı, Factorable Yüzey, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğrilik

SUMMARY

(Factorable surfaces in 3-dimensional Galilean Space)

This thesis consist of six chapters:

In the first chapter, general data in relation to differential geometry of surfaces are given.

In the second chapter, some basic definition and theorems of Euclid, Lorentz, Pseudo-Galilean and Galilean spaces are given.

In chapter [3, 4, 5], factorable surfaces in the Euclid, Lorentz and Pseudo-Galilean spaces are respectively given.

In the sixth chapter, we introduce the factorable surfaces in the Galilean space $\mathbb{G}_3$ and completely classify such surfaces with null gaussian and mean curvature.

Key Words: Galilean Spaces, Pseudo- Galilean Space, Factorable Surfaces, Gauss Curvature, Mean Curvature

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Pseudo-Galilean Uzayında Noktalar	11
Şekil 2.2. Galilean Uzayında Nokta ve Doğrular	15
Şekil 5.1. $u_3 = 0.5 (u_1)^{0.5}$ parametrizasyonuna sahip sıfır Gauss eğrilikli factorable yüzey	45
Şekil 5.2. $u_3 = 1.5 \exp u_1 + u_2 - 5$ parametrizasyonuna sahip sıfır Gauss eğrilikli factorable yüzey	45
Şekil 5.3. $u_3 = -0.25 (u_1) - 1(u_2)^2$ parametrizasyonuna sahip sıfır Gauss eğrilikli factorable yüzey	46
Şekil 5.4. $u_3 = \cos u_1 (u_2 + 1)$ parametrizasyonuna sahip birinci tip minimal factorable yüzey	49
Şekil 5.5. $u_2 = \sin u_1 (u_3 + 1)$ parametrizasyonuna sahip ikinci tip minimal factorable yüzey	50
Şekil 5.6. $u_1 = (2u_2)^{0.5} (23u_3)^{1.5}$ parametrizasyonuna sahip üçüncü tip minimal factorable yüzey	50

SEMBOLLER LİSTESİ

A	: Afin uzay
V	: Vektör uzayı
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	: 3-boyutlu Lorentz uzayı
M^2	: Yüzey
$\langle, \rangle$	: Öklid metriği
$\ , \ $	: n- boyutlu Öklid uzayında norm
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğrilik
E, F, G ve L, M, N	: Sırasıyla birinci ve ikinci temel formun katsayıları
$\langle, \rangle _L$	: Lorentz metriği
$\wedge_L$	: Lorentz uzayında vektörel çarpım
d	: Uzaklık fonksiyonu
$\mathbb{G}_3$	: 3 boyutlu Galilean uzayı
$\mathbb{G}_3^1$	: 3 boyutlu Pseudo-Galilean uzayı
f	: İdeal doğru
w	: İdeal düzlem
I	: Hiperbolik involusyon
ε	: Eliptik involusyon
$\times_G$	: Galilean Uzayında vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Yüzeylerin diferansiyel geometrisi, geometrinin önemli inceleme alanlarından biridir. Yüzey kavramı, Öklid uzayında ve Öklidsel olmayan uzaylarda diferansiyel ve integral hesabın metodları kullanılarak bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Ayrıca Öklid geometrisinde incelenen yüzeylerin Öklidsel olmayan geometrilerdeki durumu da birçok araştırmacı için araştırma konusu olmuştur ve önemli çalışmalar ortaya çıkmıştır. Bu yüzeylerden önemli bir tanesi de Factorable yüzeylerdir.

Geometri alanındaki araştırmacılardan bazıları Öklid, Minkowski ve Pseudo-Galilean uzaylarında Factorable yüzey kavramını tanımlamış ve bu yüzeyi eğrilikleri yardımı ile karakterize etmişlerdir.

Sıfır Gauss eğriliğine sahip yüzeyler de diferansiyel geometride önemli rol oynar. Diferansiyel geometride yüzeyler null (sıfır) Gauss eğriliğine sahip olması ve minimal olması açısından bazı araştırmacılar tarafından sınıflandırılmıştır. Bir yüzey eğer sıfır Gauss eğriliğine sahip ise açılabilir yüzey olarak isimlendirilir. Silindir ve koni bu yüzeylere ait örnekler olarak verilebilir.

Bu çalışmada ise daha önce belirtilen Öklid ve Öklid dışı geometrilerdeki çalışmalardan esinlenerek Galilean uzayında factorable yüzey kavramı çalışılmıştır. İlk olarak $\mathbb{G}_3$ Galilean uzayında factorable yüzey tanımı verilerek bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Bu eğriliklerin sıfır olma durumları detaylı bir şekilde incelenerek bu durum hakkında temel bir sınıflandırma yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

$$A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$A_2) \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [1].

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece bu afin uzay Öklid uzayı adını alır [1].

Tanım 2.1.3. $d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir [1].

Tanım 2.1.4. $d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında Öklid metriği denir [1].

Tanım 2.1.5. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü; $\cos \theta = \frac{\langle xy, yz \rangle}{\|xy\| \|yz\|}$ eşitliğinden hesaplanan θ reel sayısıdır [1].

Tanım 2.1.6. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n – boyutlu topolojik manifold denir.

$(M_1) M$ bir Hausdorff uzayıdır.

(M_2) M nin herbir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M_3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [1].

Tanım 2.1.7. E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k -yüncü mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilir denir [1].

Tanım 2.1.8. M bir topolojik n – manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa M ye C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir [1].

Tanım 2.1.9. $\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta$$

şeklinde tanımlı $\times$ iç işlemine vektörel çarpım işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de vektörel çarpım denir [1].

Tanım 2.1.10. M , $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin herbir p noktası için, p nin $\mathbb{R}^3$ de bir A komşuluğu ve $\mathbb{R}^2$ nin bir U açık alt kümesinden, $\mathbb{R}^3$ uzayına bir φ fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi doğrulayacak biçimde bulunabiliyorsa, M ye $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir.

(1) $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve regüler bir fonksiyondur.

(2) $\varphi(U) = M \cap A$ dır ve $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ fonksiyonu homeomorfizmdir [2].

Tanım 2.1.11. N , M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere, M nin her p noktasında,

$$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M), \quad S_p(v_p) = -D_{v_p}N$$

biçiminde tanımlı S fonksiyonuna, M yüzeyinin N birim normal vektör alanına bağlı şekil operatörü denir [2].

Tanım 2.1.12. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyinin her bir p noktasına

$$I_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I fonksiyonuna, M üzerinde birinci temel form denir.

$$II_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

biçiminde tanımlı II fonksiyonuna ise M üzerinde ikinci temel form denir [2].

Tanım 2.1.13. Kabul edelim ki M yüzeyi

$$r(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$$

ile verilmiş olsun. Burada diferansiyellenebilir a, b, c fonksiyonlarına r nin koordinat fonksiyonları adı verilir. Bu durumda birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E = g(r_x, r_x), F = g(r_x, r_y), G = g(r_y, r_y),$$

$$L = g(r_{xx}, n), M = g(r_{xy}, n), N = g(r_{yy}, n)$$

ile verilir. Burada g Öklid iç çarpımını göstermektedir. Burada

$$n = \frac{r_x \times r_y}{\| r_x \times r_y \|}$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır. Yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri de sırasıyla

$$H = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}, \quad (2.1.1)$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \quad (2.1.2)$$

ile verilir [2].

2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. V bir reel vektör uzayı olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $u, v, w \in V$ için $\langle, \rangle$ dönüşümüne, aşağıdaki özelliklere sahip ise V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [3].

$$1) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$$

$$2) \langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$$

Tanım 2.2.2. $\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir bilinear form olsun. Bu bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir [3].

A)

i) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna pozitif tanımlı,

ii) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna negatif tanımlı denir.

Her iki duruma birlikte bilinear formlar için tanımlı durum adı verilir.

B)

i) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna pozitif yarı- tanımlı,

ii) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna negatif yarı- tanımlı, denir.

Her iki duruma birlikte bilinear formlar için tanımsız durum adı verilir.

C)

$\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ a non- dejenere bilinear form denir.

Bu duruma ise bilinear formlar için non-dejenere durum denir.

Tanım 2.2.3. V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bilinear form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formun indeksi denir ve bu indeks genellikle v ile gösterilir [3].

Tanım 2.2.4. M, C^∞ manifold ve

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere fonksiyonuna M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir [3].

Tanım 2.2.5. M, C^∞ manifold ve $\langle , \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere $(M, \langle , \rangle)$ ikilisine bir semi-Riemann manifoldu denir [3].

Tanım 2.2.6. $(M, \langle , \rangle)$ bir semi-Riemann manifoldu ve boy $M = n$ olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $\nu = 1$ ise $(M, \langle , \rangle)$ ikilisine bir Lorentz manifoldu denir [3].

Tanım 2.2.7. $\langle , \rangle|_L: R^n \times R^n \rightarrow R$ dönüşümü

$\forall \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ için

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle|_L = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

yada

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle|_L = \sum_{i=2}^n \epsilon_i x_i y_i \text{ olup}$$

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i=1 \quad \text{ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\langle , \rangle|_L$ fonksiyonuna R^n de bir Lorentz iç çarpımı ve bu iç çarpım ile birleşen R^n uzayına da bir vektör uzayı denir. Bu vektör uzayına $n -$ boyutlu standart Lorentz uzayı denir ve L^n ile gösterilir.

R^n üzerindeki Lorentz iç çarpımının $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına karşılık geldiği matris,

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, $\langle , \rangle|_L$ Lorentz iç çarpımını $\langle , \rangle$ ile göstereceğiz ve $\langle , \rangle = g$ gösterimini de kullanacağız.

Tanım 2.2.8. Bir M Lorentz manifoldu üzerinde bir tanjant vektör v olsun. Eğer;

$\langle v, v \rangle > 0$ ise v ye space-like (uzay - benzeri) vektör,

$\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye time-like (zaman - benzeri) vektör,

$\langle v, v \rangle = 0$ ise v ye null veya light-like (ışık - benzeri) vektör

denir [5].

Tanım 2.2.9. Time-like (zaman-benzeri) ve light-like (ışık-benzeri) vektörlere causal vektörler denir [4].

Tanım 2.2.10. M bir Lorentz manifoldu olsun. M manifoldunun bir noktasındaki null vektörlerinin cümlesine; null konisi denir [3].

Tanım 2.2.11. Bir L^n , n -boyutlu Lorentz uzayının bütün time-like (zaman-benzeri) vektörlerinin cümlesi ℓ olsun. $u \in \ell$ için

$$C(u) = \{v \in \ell \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$

olmak üzere $C(u)$ ya u yu ihtiva eden L^n nin bir time-konisi (zaman – konisi) denir [3].

Tanım 2.2.12. L^n , n -boyutlu bir Lorentz uzayı olsun.

$$\forall \vec{X}, \vec{Y} \in L^n \text{ için } \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir [6].

Sonuç 2.2.1. Her ikisi de time-like (zaman-benzeri) olan iki vektör birbirine dik olamaz. Benzer düşünce her ikisi de space-like (uzay-benzeri) olan iki vektör için de geçerlidir [6].

Sonuç 2.2.2. Lorentz uzayında $\vec{0}$ vektörü bütün vektörlere diktir [7].

Tanım 2.2.13. 4-boyutlu Lorentz uzayına Minkowski uzayı denir [3].

Tanım 2.2.14. L^n , n -boyutlu Lorentz uzayında bir vektör $\vec{w}$ ve $\langle, \rangle$ ise L^n üzerinde bir Lorentz iç çarpımı olsun. $\vec{w}$ nın normu;

$$\|\vec{w}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle|}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}$ yerine $\|\cdot\|$ ifadesini kullanacağız.

Teorem 2.2.1. $\vec{x} \in \mathbb{L}^n$ olmak üzere;

i) $\|\vec{x}\| > 0$ dır.

ii) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektörüdür.

iii) $\vec{x}$ bir time-like (zaman-benzeri) vektör olsun. Bu taktirde $\vec{x} \in L^n$ için,

$$\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

olur.

iv) $\vec{x}$ bir space-like (uzay-benzeri) vektör olsun. Bu taktirde,

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

olur [9].

Tanım 2.2.15. $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{L}^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında olmak üzere;

$$\wedge|_{\mathbb{L}} : \mathbb{L}^3 \times \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \vec{X} \wedge \vec{Y}|_{\mathbb{L}} = (-\langle x_2, y_3 \rangle + \langle x_3, y_2 \rangle, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlı $\wedge|_{\mathbb{L}}$ operatörüne $\mathbb{L}^3$ de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir. Bunu matris formunda

$$\vec{X} \wedge \vec{Y}|_{\mathbb{L}} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz [9].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\wedge|_{\mathbb{L}}$ sembolü yerine $\wedge$ sembolünü kullanacağız.

Tanım 2.2.16. $\mathbb{L}^n$, n-boyutlu Lorentz uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere;

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k -sınıfından (k -yıncı sınıftan) diferansiyellenebilir denir. Özel olarak, f sadece sürekli ise C^0 -sınıfındandır denir. U üzerinde tanımlı C^1 -sınıfından fonksiyona U üzerinde 0-form adı verilir. Ayrıca,

$$C^k(U, R) = \{f \mid f : U \rightarrow R \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ - sınıfından}\} \quad \text{ve}$$

$$C^\infty(U, R) = \{f \mid f : U \rightarrow R, f \in C^k(U, R), k \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde gösterilir [7].

Tanım 2.2.17. Kabul edelim ki L^n Lorentz uzayında M yüzeyi

$$r(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$$

ile verilmiş olsun. Burada diferansiyellenebilir a, b, c fonksiyonlarına r nin koordinat fonksiyonları adı verilir. Bu durumda birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E = g_L(r_x, r_x), F = g_L(r_x, r_y), G = g_L(r_y, r_y),$$

$$L = g_L(r_{xx}, n), M = g_L(r_{xy}, n), N = g_L(r_{yy}, n),$$

ile verilir. Burada

$$n = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|},$$

yüzeyin birim normal vektör alanı ve E, F, G birinci temel formun; L, M, N de ikinci temel formun katsayılarıdır. Yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2|EG - F^2|},$$

$$K = g_L(n, n) \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

ile verilir. Burada g_L Lorentz anlamında iç çarpımı göstermektedir.

2.3. 3- Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Temel Kavramlar

Pseudo-Galilean geometri, projektif işareti $(0,0,+,-)$ olan reel Cayley –Klein geometrilerinden biridir. Pseudo-Galilean geometrisinin temeli $\{w, f, I\}$ sıralı üçlüleridir. Burada w $P_3(\mathbb{R})$ 3-boyutlu reel projektif uzayında ideal düzlem, f ideal düzlemde bir doğru ve I da f nin noktalarının sabit hiperbolik involusyonudur [11].

Tanım 2.3.1. Uygun afin bileşenlere sahip

$$B_6 = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ e & -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen Galilean uzayının B_6 hareket grubu göz önüne alındığında

$$\overline{B_6} := \langle B_6, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle$$

şeklinde $\overline{B_6}$ grubu $\mathbb{G}_3^1$ Pseudo-Galilean uzayının hareket grubu olarak adlandırılır [11].

Afin bileşenlere sahip $\overline{B_6}$ grubu

$$\overline{B_6} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \eta \cosh\varphi & \eta \sinh\varphi \\ e & \eta \sinh\varphi & \eta \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Burada $\eta = \pm 1$ dir.

$\overline{B_6}$, hareketi boyunca noktaları altı sınıfa ayırır. Bu altı sınıf aşağıdaki şekilde oluşturulur [11].

1) $(1: x: y: z) \sim (x, y, z)$ şeklindeki reel noktalar.

2) $(1, y, z)$ birim vektörleri tarafından gerilen mutlak olmayan $(0: 1: y: z)$ şeklindeki noktalar.

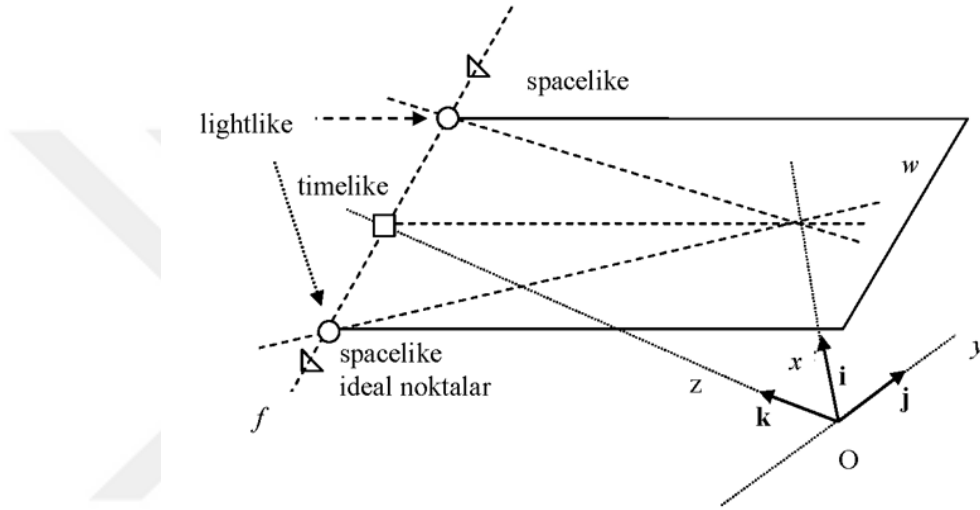
3) Projektif işareti serbest olan $(0: 0: \cosh\varphi: \sinh\varphi)$ şeklinde yazılabilen spacelike mutlak noktalar.

4) $(0:0:\sinh\varphi:\cosh\varphi)$ şeklinde timelike mutlak noktaları.

5) $(0:0:1:1)$ şeklindeki bir lightlike mutlak nokta.

6) $(0:0:1:-1)$ şeklindeki bir diğer lightlike mutlak nokta.

Yukarıda sınıflandırılan noktalar Şekil 2.3.1. de gösterildiği gibidir. $\mathbb{G}_3^1$ Pseudo Galilean uzayında bir vektör (yani bir reel nokta çifti) w nın bir ideal noktasını temsil eder.



Şekil 2.1. Pseudo-Galilean Uzayında Noktalar

$\mathbb{G}_3^1$ in homojen koordinatları aşağıdaki şekildedir:

w ideal düzlemi $x_0 = 0$ ile, f ideal doğrusu $x_0 = x_1 = 0$ ile ve hiperbolik involusyon $(0:0:x_2:x_3) \rightarrow (0:0:x_3:x_2)$ ile verilir. $\mathbb{G}_3^1$ deki metrik bağıntılar mutlak şekle göre verilir. Afin koordinatlar $(x_0:x_1:x_2:x_3) = (1:x:y:z)$ şeklinde verildiğinden $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d(X, Y) = \begin{cases} |y_1 - x_1|, & x_1 \neq y_1 \\ \sqrt{|(y_2 - x_2)^2 - (y_3 - x_3)^2|}, & x_1 = y_1 \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörlerinin Pseudo-Galilean skaler çarpımı

$$X.Y = \begin{cases} x_1 y_1, & x_1 \neq 0 \text{ ya da } y_1 \neq 0 \\ x_2 y_2 - x_3 y_3, & x_1 = y_1 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu anlamda X vektörünün Pseudo –Galilean normu $\|X\| = \sqrt{|X.X|}$ dir .

$(T_0; x_0, y_0, z_0) \sim (1; x_0, y_0, z_0)$ başlangıç noktasına sahip $(T_0; e_1, e_2, e_3)$ üç ayaklısının Pseudo-Galilean anlamında ortonormal olması için gerek ve yeter şart e_1, e_2, e_3 vektörlerinin aşağıdaki formda olmasıdır [11]:

$$e_1 = (1, y_1, z_1), e_2 = (0, y_2, z_2), e_3 = (0, \varepsilon z_2, \varepsilon y_2), y_2^2 - z_2^2 = \delta, \varepsilon, \delta = \pm 1.$$

Eğer $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$ yani $y_2^2 - z_2^2 = \varepsilon$ ise $(T_0; e_1, e_2, e_3)$ üç ayaklısına pozitif yönlendirilmiştir denir [11].

$\overline{B_6}$ grubuna göre $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo -Galilean uzayında vektörler ikiye ayrılır. Bu vektörleri aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

Tanım 2.3.2. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir $X = (x_1, x_2, x_3)$ verildiğinde eğer $x_1 = 0$ ise $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü izotropik vektör olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.3.3. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir $X = (x_1, x_2, x_3)$ verildiğinde eğer $x_1 \neq 0$ ise $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü non-izotropik vektör olarak adlandırılır [12].

Bütün non- izotropik birim vektörler $(1, x_2, x_3)$ formundadır [12].

Tanım 2.3.4. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$ izotropik vektörü verildiğinde

$$x_2^2 - x_3^2 > 0 \text{ ise } X \text{ izotropik vektörüne spacelike vektör,}$$

$$x_2^2 - x_3^2 < 0 \text{ ise } X \text{ izotropik vektörüne timelike vektör,}$$

$$x_2 = \mp x_3 \text{ ise } X \text{ izotropik vektörüne lightlike vektör denir [11].}$$

Tanım 2.3.5. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörlerinin Pseudo-Galilean vektörel çarpımı

$$X \times Y = \begin{vmatrix} 0 & -e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$, $i=2,3$ şeklindedir [13].

Tanım 2.3.6. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında M^2 ,

$$r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2))$$

şeklinde parametrize edilmiş bir yüzey olsun.

$$(r_i)_{u_j} = \partial r_i / \partial u_j \quad \text{ve} \quad (r_i)_{u_j u_k} = \partial^2 r_i / \partial u_j \partial u_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{ve} \quad j, k = 1, 2$$

olarak tanımlıdır.

M^2 yüzeyinin diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart $(r_1)_{u_j} = \partial r_1 / \partial u_j \neq 0$, $j = 1, 2$ olmasıdır. M^2 yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$g_i = (r_1)_{u_i} \text{ ve } h_{ij} = (0, (r_2)_{u_i}, (r_3)_{u_i}) \cdot (0, (r_2)_{u_j}, (r_3)_{u_j}), \quad i, j = 1, 2$$

olarak tanımlıdır ve matris formunda

$$ds^2 = \begin{pmatrix} ds_1^2 & 0 \\ 0 & ds_2^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$ds_1^2 = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2 \quad \text{ve} \quad ds_2^2 = h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2$$

şeklindedir [13].

Tanım 2.3.7. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında M^2 ,

$$r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2))$$

şeklinde parametrize edilmiş bir yüzey olsun. W fonksiyonunu

$$W = \sqrt{|((r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_2)_{u_1})^2 - ((r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_3)_{u_1})^2|}$$

olarak tanımlayalım. O halde M^2 nin N birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{W} (0, (r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_3)_{u_1}, (r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_2)_{u_1})$$

şeklindedir, burada $N.N = \varepsilon = \mp 1$ dir. Dolayısıyla iki tip diferansiyellenebilir yüzey vardır [13]:

- 1) timelike birim normallere sahip ($\varepsilon = -1$) spacelike yüzeyler,
- 2) spacelike birim normallere sahip ($\varepsilon = 1$) timelike yüzeyler.

Tanım 2.3.8. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında M^2 ,

$$r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2))$$

şeklinde parametrize edilmiş bir yüzey olsun. M^2 yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \varepsilon \frac{1}{g_1} (g_1 (0, (r_2)_{u_i u_j}, (r_3)_{u_i u_j}) - (g_i)_{u_j} (0, (r_2)_{u_1}, (r_3)_{u_1})). N \\ &= \varepsilon \frac{1}{g_2} (g_2 (0, (r_2)_{u_i u_j}, (r_3)_{u_i u_j}) - (g_i)_{u_j} (0, (r_2)_{u_2}, (r_3)_{u_2})). N \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. M^2 nin ortalama ve Gauss eğriliği sırasıyla

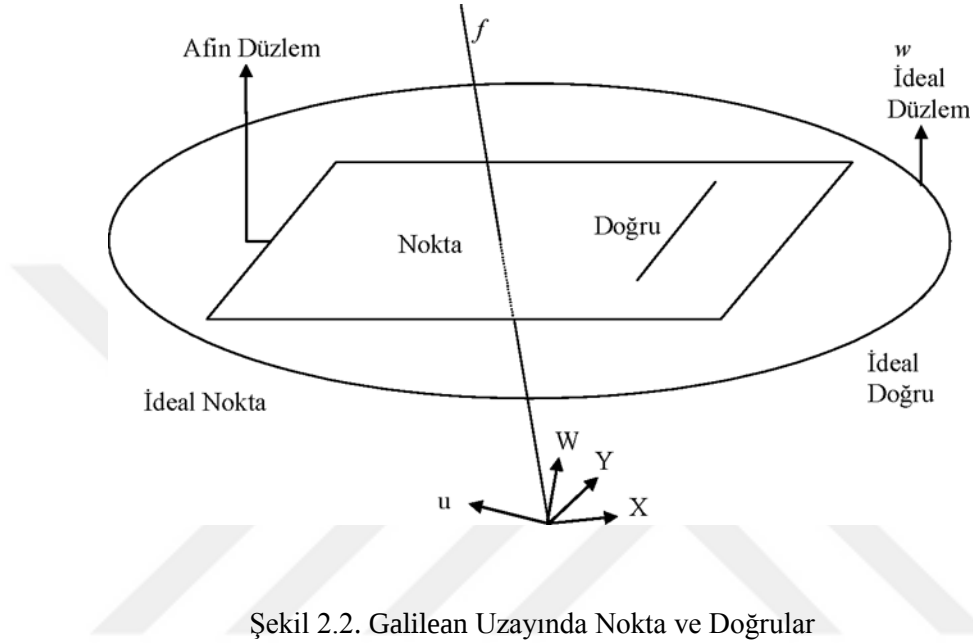
$$\begin{aligned} K &= -\varepsilon \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2} \\ H &= -\varepsilon \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2} \end{aligned}$$

ile tanımlanır [13].

Tanım 2.3.9. $\mathbb{G}_3^1$ 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir yüzeyin ortalama eğriliği sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir [13].

2.4. 3- Boyutlu Galilean Uzayında Temel Kavramlar

G_3 Galilean uzayı, 3- boyutlu P_3 kompleks projektif uzayının w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini, $f \subset w$ ideal doğruların bir reel doğrusunu ve $I_1, I_2 \in f$ gibi ideal noktalardan iki tanesini içeren $\{w, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahip olan bir halidir [14].



Şekil 2.2. Galilean Uzayında Nokta ve Doğrular

G_3 uzayının bir reel modeli olarak ε eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset w$ reel doğrusunu ve $w \subset G_3$ reel düzlemini içeren $\{w, f\}$ ideale sahip bir P_3 projektif uzayını alabiliriz.

Uygun koordinatlarda ε eliptik involusyonunu

$$w \dots x_0 = 0, \quad f \dots x_0 = x_1 = 0$$

$$\varepsilon: (0:0:x_2:x_3) \rightarrow (0:0:x_3:-x_2)$$

şeklinde alabiliriz.

Homojen olmayan koordinatlarda H_8 benzerlik grubu

$$x' = a_{11} + a_{12}x$$

$$y' = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \cos\varphi + a_{23}z \sin\varphi$$

$$z' = a_{31} + a_{32}x - a_{23}y \sin\varphi + a_{23}z \cos\varphi$$

formundadır. Burada a_{ij} ve φ reel sayılardır.

Burada a_{12} ve a_{23} katsayıları özel bir rol oynar. $a_{12} = a_{23} = 1$ alındığında Galilean uzayının B_6 hareket grubu elde edilir. Bu grup

$$B_6 = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ e & -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Böylece bu hareket boyunca G_3 Galilean uzayında doğrular dört gruba ayrılır. Bu doğrular aşağıdaki şekilde verilebilir [14]:

- 1) Reel non-izotropik doğrular: Bu doğrular f ideal doğrusunu kesmezler.
- 2) Reel izotropik doğrular. Bu doğrular w düzlemine ait değildir fakat f ideal doğrusunu keserler.
- 3) Reel olmayan non-izotropik doğrular. Bu doğrular f den başka w nın bütün doğrularıdır.
- 4) f ideal doğrusu

G_3 Galilean uzayında $x = \text{sabit}$ alındığında düzlemler öklidyendir, bu ise w düzlemidir. Diğer düzlemler izotropiktir.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d(X, Y) = \begin{cases} |y_1 - x_1|, & x_1 \neq y_1 \\ \sqrt{|(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2|}, & x_1 = y_1 \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörlerinin Galilean skaler çarpımı

$$X.Y = \begin{cases} x_1 y_1, & x_1 \neq 0 \text{ yada } x_2 \neq 0 \\ x_2 y_2 + x_3 y_3, & x_1 = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu anlamda X vektörünün Galilean normu $\|X\| = \sqrt{X.X}$ dir. Bir $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü verildiğinde eğer $x_1 = 0$ ise bu X vektörüne izotropik vektör denir, aksi halde bu vektör non-izotropik vektör olarak adlandırılır.

Galilean uzayında vektörel çarpım

$$X \times_G Y = \left(0, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

olarak tanımlıdır.

$\mathbb{R}^2$ nin bir açık alt cümlesi D olsun ve M^2 de G_3 Galilean uzayında

$$r: D \rightarrow G_3, (u_1, u_2) \rightarrow (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2))$$

şeklinde parametrize edilmiş bir yüzey olsun. Burada r_k $1 \leq k \leq 3$, D üzerinde diferensiyellenebilir ve reel değerli fonksiyondur.

$$(r_k)_{u_i} = \partial r_k / \partial u_i \text{ ve } (r_k)_{u_i u_j} = \partial^2 r_k / \partial u_i \partial u_j, \quad 1 \leq k \leq 3 \text{ ve } 1 \leq i, j \leq 2$$

ile ifade edilir.

O halde böyle bir yüzeyin admissible olması için gerek ve yeter şart $(r_1)_{u_i} \neq 0$, $i = 1, 2$ olmasıdır.

M^2 nin birinci temel formunun katsayıları

$$g_i = (r_1)_{u_i}, \quad h_{ij} = (r_2)_{u_i} (r_2)_{u_j} + (r_3)_{u_i} (r_3)_{u_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.4.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

W fonksiyonunu

$$W = \sqrt{((r_3)_{u_1} (r_1)_{u_2} - (r_1)_{u_1} (r_3)_{u_2})^2 + ((r_1)_{u_1} (r_2)_{u_2} - (r_2)_{u_1} (r_1)_{u_2})^2}$$

olarak tanımlayalım. O halde M^2 nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{W} (0, (r_3)_{u_1} (r_1)_{u_2} - (r_1)_{u_1} (r_3)_{u_2}, (r_1)_{u_1} (r_2)_{u_2} - (r_2)_{u_1} (r_1)_{u_2}) \quad (2.4.2)$$

şeklinde elde edilir. Burada $N \cdot N = 1$ dir.

M^2 nin ikinci temel formu

$$II = L_{11} du_1^2 + L_{12} du_1 du_2 + L_{22} du_2^2 \quad (2.4.3)$$

olarak tanımlıdır. Burada

$$L_{ij} = \frac{1}{g_1} \left(g_1(0, (r_2)_{u_i u_j}, (r_3)_{u_i u_j}) - (g_i)_{u_j}(0, (r_2)_{u_1}, (r_3)_{u_1}) \right) N, g_1 \neq 0 \quad (2.4.4)$$

dir.

M^2 nin ortalama ve Gauss eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}{W^2}, \quad H = \frac{g_2^2 L_{11}-2g_1g_2 L_{12}+g_1^2 L_{22}}{2W^2} \quad (2.4.5)$$

olarak tanımlıdır.

Eğer G_3 deki bir yüzeyin ortalama eğriliği sıfıra özdeş ise bu yüzeye minimal yüzey denir.

Tanım 2.4.1. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü verildiğinde eğer $x_1 = 0$ ise $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü izotropik vektör olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.4.2. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X = (x_1, x_2, x_3)$ verildiğinde eğer $x_1 \neq 0$ ise $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü non- izotropik vektör olarak adlandırılır [12].

Bütün non- izotropik birim vektörler $(1, x_2, x_3)$ formundadır [12].

3. ÖKLİD UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER

Tanım 3.1. $\mathbb{E}^3$ deki bir M^2 yüzeyi

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) = f(x(u, v))g(y(u, v)))$$

yada

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v) = f(x(u, v))g(z(u, v)), z(u, v))$$

yada

$$r(u, v) = (x(u, v) = f(y(u, v))g(z(u, v)), y(u, v), z(u, v))$$

olarak yazılabiliyorsa, M^2 yüzeyi factorable yüzey olarak adlandırılır, burada f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlardır [15].

Tanım 3.2. Kabul edelim ki M^2 yüzeyi

$$r(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$$

ile verilmiş olsun. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E = f'^2 g^2 + 1,$$

$$F = f g f' g',$$

$$G = 1 + f^2 g'^2,$$

$$n = \frac{1}{W}(-f'g, -fg', 1),$$

$$L = \frac{gf''}{W}, \quad M = \frac{f'g'}{W}, \quad N = \frac{fg''}{W},$$

olarak elde edilir, burada $W = \sqrt{f'^2 g^2 + f^2 g'^2 + 1}$ dir. Yukarıdaki eşitliklerin (2.1.1) ve (2.1.2) formüllerinde yerine yazılmasıyla

$$H = \frac{1}{2} W^{-3} H_1,$$

$$K = \frac{1}{W^2} (gf''fg'' - f'^2 g'^2)$$

olarak elde edilir. Burada $H_1 = (1 + f^2 g'^2) f'' g + (f'^2 g^2 + 1) f g'' - 2 f g f' g'$ dir [15].

Teorem 3.1. $S, \mathbb{E}^3$ de $r(x, y) = (x, y, z(x, y)) = (x, y, f(x)g(y))$ factorable yüzey olsun. Eğer S yüzeyi minimal ise aşağıdaki yüzeylerden birine ya da $\mathbb{E}^3$ ün bir açık parçasına eşdeğerdir:

- (1) $z = c_1x + c_2,$
- (2) $z = c_1y + c_2,$
- (3) $z = c_1x \tan(c_2y),$
- (4) $z = c_1y \tan(c_2x),$
- (5) $f(x), g(y);$

$$\begin{cases} x = \int \frac{df(x)}{\sqrt{2a \ln f(x) + c_1}} \\ y = \int \frac{dg(y)}{\sqrt{c_2 g^4(y) - \frac{b}{2}}} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

yada

$$\begin{cases} x = \int \frac{df(x)}{\sqrt{c_1 f^4(x) - \frac{a}{2}}} \\ y = \int \frac{dg(y)}{\sqrt{2b \ln g(y) + c_2}} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

yada

$$\begin{cases} x = \int \frac{df(x)}{\sqrt{c_1 f^{2(1+k)}(x) - c_2}} \\ y = \int \frac{dg(y)}{\sqrt{c_3 g^{2(1-k)}(y) - c_4}} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

denklemlerini sağlar, burada $a, b, k, c_1, c_2, c_3, c_4$ sabitler ve $a^2 + b^2 \neq 0, k \neq 1$ dir [16].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında, $\mathbb{E}^3$ deki dönüşümler ile $r(x, y)$ factorable yüzeyi $z = f(x)g(y)$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} E &= g(r_x, r_x), F = g(r_y, r_x), G = g(r_y, r_y) \\ L &= g(r_{xx}, n), M = g(r_{xy}, n), N = g(r_{yy}, n) \\ n &= \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|}, H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Verilen yüzey minimal, yani $H = 0$ olsun. O halde

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \left(f''(x)f(x) - f'^2(x) \right) g'^2(y) + \left(g''(y)g(y) - g'^2(y) \right) f'^2(x) = 0 \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Eğer,

$$f'(x) = 0 \text{ ya da } g'(y) = 0, f''(x) = 0 \text{ yada } g''(y) = 0 \text{ ise}$$

sırasıyla Teorem 3.1 in (1), (2), (3), (4) şıkları sağlanmış olur.

Eğer,

$$f''(x)g''(y) \neq 0 \text{ ise}$$

(3.1.4) denkleminin x ve y ye göre türevi alındığında

$$\frac{(f''(x)f(x) - f'^2(x))'}{(f'^2(x))'} = - \frac{(g''(y)g(y) - g'^2(y))'}{(g'^2(y))'} = k \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Yani

$$\begin{cases} f''(x)f(x) - (1+k)f'^2(x) = a \\ g''(y)g(y) - (1-k)g'^2(y) = b \end{cases} \quad (3.1.6)$$

bulunur. Şimdi $a^2 + b^2 \neq 0$ olsun. Eğer $k = -1$ ise

$$\begin{cases} f''(x)f(x) = a \\ g''(y)g(y) - 2g'^2(y) = b \end{cases} \quad (3.1.7)$$

elde ederiz. Bu denklemin çözümünden (3.1.1) elde edilir. Eğer $k = 1$ olursa

$$\begin{cases} f''(x)f(x) - 2f'^2(x) = a \\ g''(y)g(y) = b \end{cases} \quad (3.1.8)$$

bulunur. Bu denklemin çözümünden (3.1.2) denklemini elde edilir. Eğer $k \neq \pm 1$ ise (3.1.6) denkleminin çözülmesiyle (3.1.3) denklemini elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4. LORENTZ UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER

Tanım 4.1. M , 2-boyutlu irtibatlı ve yönlendirilmiş bir manifold olsun ve $r: M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\mathbb{E}_1^3$ de (u, v) parametrelerine sahip bir yüzey olsun. $S: r(u, v)$ yüzeyi

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ile ifade edilir. $\mathbb{E}_1^3$ deki bir S yüzeyi eğer

$$r(u, v) = (x, y, f(x)g(y))$$

yada

$$r(u, v) = (x, f(x)g(z), z)$$

yada

$$r(u, v) = (f(y)g(z), y, z)$$

olarak yazılabiliyorsa factorable yüzey olarak adlandırılır [17].

Spacelike yön, timelike yön ve lightlike yöne göre $\mathbb{E}_1^3$ deki factorable yüzeyler aşağıdaki gibi altı tür olarak göz önüne alınabilir [17]:

- tip 1: spacelike yön boyunca ve spacelike yön;
- tip 2: spacelike yön boyunca ve timelike yön;
- tip 3: lightlike yön boyunca ve lightlike yön;
- tip 4: lightlike yön boyunca ve spacelike yön;
- tip 5: timelike yön boyunca ve lightlike yön;
- tip 6: timelike yön boyunca ve timelike yön.

Teorem 4.1. S , $\mathbb{E}_1^3$ de tip 3 cinsinden bir factorable yüzey olsun.

(1) Eğer S yüzeyinin K Gauss eğriliği özdeş olarak sıfır ise S aşağıdaki yüzeylerden biridir ya da bu yüzeylerin bir açık parçasıdır:

(a) $z(x, y) = c_1 g(y),$

(b) $z(x, y) = c_1 f(x),$

(c) $z(x, y) = \exp(c_1 x + c_2 y + c_3),$

(d) $z(x, y) = (c_1 x + c_2)^{\frac{1}{1-k_1}} (c_3 y + c_4)^{\frac{k_1}{k_1-1}}$

(2) Eğer S minimal ise, S aşağıdaki yüzeylerden biridir yada bu yüzeylerin bir açık parçasıdır:

$$(a) z(x, y) = c_1 g(y),$$

$$(b) z(x, y) = c_1 f(x),$$

burada $c_1, c_2, c_3, c_4, k_1, k_2$ sabit ve $k_1 \neq 1$ dir [17].

İspat. $ds^2 = 2 dx dy + dz^2$ metriğine sahip 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de tip 3 cinsinden factorable yüzey

$$r(x, y) = (x, y, z(x, y)) = (x, y, f(x)g(y))$$

olarak yazılabilir. O halde S nin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği

$$K = - \frac{f(x)f''(x)g(y)g''(y) - (f'(x)g'(y))^2}{(1 + 2f(x)f'(x)g(y)g'(y))^2}$$

$$H = - \frac{H_1}{2[1 + 2f(x)f'(x)g(y)g'(y)]^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$H_1 = f(x)(f'(x))^2(g(y))^2g''(y) + (f(x))^2f''(x)g(y)(g'(y))^2$$

$$-2f(x)(f'(x))^2g(y)(g'(y))^2 - 2f'(x)g'(y)$$

dir.

(1) $K = 0$ olduğunda

$$f(x)f''(x)g(y)g''(y) - (f'(x)g'(y))^2 = 0 \quad (4.1.1)$$

elde ederiz. $p(x) = \frac{df}{dx}$ ve $q(y) = \frac{dg}{dy}$ olsun. Bu durumda (4.1.1) den

$$f(x)p(x)\frac{dp}{df}g(y)q(y)\frac{dq}{dg} - (p(x)q(y))^2 = 0 \quad (4.1.2)$$

elde ederiz.

(a) Eğer $p(x) = 0$ ise $f(x) = c_1$ olduğu elde edilir. Böylece $z(x, y) = c_1 g(y)$ elde edilir.

(b) Benzer şekilde eğer $q(y) = 0$ ise $z(x, y) = c_1 f(x)$ elde edilir.

(c) Eğer $p(x) \neq 0$ ve $q(y) \neq 0$ ise (4.1.2) ifadesinden

$$f(x) \frac{dp}{df} g(y) \frac{dq}{dg} = p(x)q(y)$$

elde edilir. O zaman $p(x)q(y) \neq 0$ olduğundan $g(y) \frac{dq}{dg} \neq 0$ dır. Böylece

$$\frac{f(x) \frac{dp}{df}}{p(x)} = \frac{q(y)}{g(y) \frac{dq}{dg}} = k_1 \quad (4.1.3)$$

elde ederiz, burada k_1 bir sabittir.

(i) Eğer $k_1 = 1$ ise (4.1.3) denkleminde

$$\begin{cases} f(x) = \exp(c_1x + c_2) \\ g(y) = \exp(c_3y + c_4) \end{cases}$$

elde edilir. O halde Teorem 4.1 (1) in (c) şıkkı elde edilir.

(ii) Eğer $k_1 \neq 1$ ise (4.1.3) denkleminde

$$\begin{cases} f(x) = (c_1x + c_2)^{\frac{1}{1-k_1}} \\ g(y) = (c_3y + c_4)^{\frac{k_1}{k_1-1}} \end{cases}$$

elde ederiz. O halde Teorem 4.1 (1) in (d) şıkkı elde edilir.

(2) $p(x) = \frac{df}{dx}$ ve $q(y) = \frac{dg}{dy}$ olsun. $H = 0$ olduğunda

$$\begin{aligned} & f(x)(p(x))^2 (g(y))^2 q(y) \frac{dq}{dg} + (f(x))^2 p(x) \frac{dp}{df} g(y)(q(y))^2 \\ & - 2f(x)(p(x))^2 g(y)(q(y))^2 - 2p(x)q(y) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

elde edilir.

(a) Eğer $p(x) = 0$ ise $f(x) = c_1$ elde ederiz. O halde S , $z(x, y) = c_1g(y)$ olarak yazılabilir.

(b) Eğer $q(y) = 0$ ise $z(x, y) = c_1f(x)$ elde ederiz.

(c) $p(x) = \frac{df}{dx}$ ve $q(y) = \frac{dg}{dy}$ için (4.1.4) denklemini

$$(f(x)p(x))g(y) \left(g(y) \frac{dq}{dg} - q(y) \right) + (g(y)q(y))f(x) \left(f(x) \frac{dp}{df} - p(x) \right) = 2 \quad (4.1.5)$$

şeklinde yazılabiliriz. (4.1.5) in sırasıyla x ve y ye göre türevi alınırsa

$$(f(x)p(x))'g(y)\left(g(y)\frac{dq}{dg}-q(y)\right)+(g(y)q(y))\left[f(x)\left(f(x)\frac{dp}{df}-p(x)\right)\right]'=0 \quad (4.1.6)$$

$$f(x)p(x)\left[g(y)\left(g(y)\frac{dq}{dg}-q(y)\right)\right]'+(g(y)q(y))'f(x)\left(f(x)\frac{dp}{df}-p(x)\right)=0 \quad (4.1.7)$$

elde ederiz.

Eğer $(f(x)p(x))' = 0$ ise (4.1.6) denkleminde $p(x) = 0$ olur. Bu ise $p(x)q(y) \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece $(f(x)p(x))' \neq 0$ dır ve benzer şekilde $(g(y)q(y))' \neq 0$ olur. Böylece (4.1.6) ve (4.1.7) denklemlerinden

$$\frac{\left[f(x)\left(f(x)\frac{dp}{df}-p(x)\right)\right]'}{(f(x)p(x))'} = -\frac{g(y)\frac{dq}{dg}-q(y)}{q(y)} = k_1 \quad (4.1.8)$$

$$\frac{f(x)\frac{dp}{df}-p(x)}{p(x)} = -\frac{\left[g(y)\left(g(y)\frac{dq}{dg}-q(y)\right)\right]'}{(g(y)q(y))'} = k_2 \quad (4.1.9)$$

olarak yazılabilir, burada k_1, k_2 sıfırdan farklı sabitlerdir. (4.1.8) ve (4.1.9) denklemlerinden $k_1 = k_2 = k$ olduğu elde edilir. (4.1.5) ifadesi ile

$$kf(x)p(x)g(y)q(y) = 1$$

elde ederiz. $f(x)p(x) = \text{sabit}$ ve $g(y)q(y) = \text{sabit}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde bu Teorem 4.1 in ispatı için yeterli olur.

Teorem 4.2. $S, \mathbb{E}_1^3$ de tip 4 cinsinden bir factorable yüzey olsun.

(1) Eğer S nin K Gauss eğriliği özdeş olarak sıfır ise, S aşağıdaki yüzeylerden biridir ya da bu yüzeylerin bir açık parçasıdır:

(a) $x(y, z) = c_1 f(y),$

(b) $x(y, z) = c_1 g(z),$

(c) $x(y, z) = \exp(c_1 y + c_2 z + c_3),$

(d) $x(y, z) = (c_1 y + c_2)^{\frac{1}{1-k_1}} (c_3 z + c_4)^{\frac{k_1}{k_1-1}}$

(2) Eğer S minimal ise S aşağıdaki yüzeylerden biridir ya da bu yüzeylerin bir açık parçasıdır:

$$(a) x(y, z) = c_1 g(z),$$

$$(b) x(y, z) = (c_1 y + c_2) \exp(c_3 z + c_4),$$

$$(c) f(y), g(z),$$

$$f(y) = c_1 \tan\left(\frac{c_1 k_2}{2} y + c_2\right),$$

$$g(z) = \frac{k_2}{c_3} \sinh^2\left(\frac{\varepsilon \sqrt{c_3}}{2} z\right)$$

eşitliğini sağlar, burada c_1, c_2, c_3, k_1, k_2 sabit ve $k_1 \neq 1, k_2 \neq 0, \varepsilon = \pm 1$ dir [17].

İspat. $ds^2 = 2 dx dy + dz^2$ metriğine sahip 3-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de tip 4 cinsinden factorable yüzey

$$r(y, z) = (x(y, z), y, z) = (f(y)g(z), y, z)$$

olarak yazılabilir. S yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği

$$K = -\frac{f(y)f''(y)g(z)g''(z) - (f'(y)g'(z))^2}{[(f'(y)g'(z))^2 - 2f'(y)g(z)]^2}$$

$$H = -\frac{2f(y)f'(y)g(z)g''(z) + f''(y)g(z) - 2f(y)f'(y)(f'(y)g'(z))^2}{2[(f'(y)g'(z))^2 - 2f'(y)g(z)]^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde hesaplanır.

(1) $K = 0$ olduğunda

$$f(y)f''(y)g(z)g''(z) - (f'(y)g'(z))^2 = 0$$

elde ederiz. Bu durumda Teorem 4.2 (1) in sonuçları elde edilmiş olur.

(2) $H = 0$ olduğunda

$$2f(y)f'(y)g(z)g''(z) + f''(y)g(z) - 2f(y)f'(y)(f'(y)g'(z))^2 = 0 \quad (4.1.10)$$

olur.

$$p(y) = \frac{df}{dy} \text{ ve } q(z) = \frac{dg}{dz} \text{ olsun. O zaman (4.1.10) denkleminde}$$

$$2f(y)p(y)g(z)q(z)\frac{dq}{dz} + p(y)\frac{dp}{dy}g(z) - 2f(y)p(y)(q(z))^2 = 0 \quad (4.1.11)$$

olarak yazılabilir. O halde

(a) Eğer $p(y) = 0$ ise $x(y, z) = c_1 g(z)$ ve

(b) Eğer $p(y) \neq 0$ ise (4.1.11) denklemi

$$2f(y)g(z)q(z)\frac{dq}{dg} + \frac{dp}{df}g(z) - 2f(y)(q(z))^2 = 0,$$

yani,

$$\frac{\frac{dp}{df}}{f(y)} = 2 \frac{(q(z))^2 - g(z)q(z)\frac{dq}{dg}}{g(z)} = k_2$$

olarak yazılabilir, burada k_2 sabittir.

(i) Eğer $k_2 = 0$ ise bu denklemin çözümünden

$$\begin{cases} f(y) = c_1y + c_2 \\ g(z) = \exp(c_3z + c_4) \end{cases}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 4.2 (2) nin (b) eşitliğini verir.

(ii) Eğer $k_2 \neq 0$ ise

$$\begin{cases} \frac{dp}{df} = k_2f(y) \\ (q(z))^2 - g(z)q(z)\frac{dq}{dz} = \frac{k_2g(z)}{2} \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklemleri çözümünden Teorem 4.2 (2) nin (c) sonucu elde edilir. Bu da Teorem 4.2 nin ispatını tamamlar.

Teorem 4.3. 3-boyutlu Lorentz uzayında sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli yada sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli tip 3 türünden hiçbir factorable yüzey yoktur [17].

İspat. (1) Eğer tip 3 türünden bir S factorable yüzeyinin K Gauss eğriliği sıfırdan farklı bir C sabiti ise

$$K = -\frac{f(x)f''(x)g(y)g''(y) - (f'(x)g'(y))^2}{[1 + 2f(x)f'(x)g(y)g'(y)]^2} = C \neq 0 \quad (4.1.12)$$

elde edilir. $K \neq 0$ olması $f'(x)g'(y) \neq 0$ olmasını gerektirir.

$$\alpha_1 = g(y)g'(y), \alpha_2 = (g'(y))^2 \text{ ve } \alpha_3 = g(y)g'(y)$$

ifadesini (4.1.12) denkleminde yerine yazalım, burada $\alpha_2\alpha_3 \neq 0$ dır. Bu durumda

$$K = -\frac{\alpha_1f(x)f''(x) - \alpha_2(f'(x))^2}{[1 + 2\alpha_3f(x)f'(x)]^2} = C \quad (4.1.13)$$

dir. (4.1.13) ifadesinin y ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
& f(x)f''(x)[\alpha'_1 + f(x)f'(x)(2\alpha'_1\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha'_3)] \\
& = (f'(x))^2[\alpha'_2 - f(x)f'(x)(4\alpha_2\alpha'_3 - 2\alpha'_2\alpha_3)]
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir.

(a) Eğer

$$\alpha'_1 + f(x)f'(x)(2\alpha'_1\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha'_3) = 0$$

ise

$$\alpha'_2 - f(x)f'(x)(4\alpha_2\alpha'_3 - 2\alpha'_2\alpha_3) = 0 \tag{4.1.15}$$

bulunur. (4.1.15) denkleminde $\alpha'_2 = 0$ olduğundan $g'(y) = 0$ bulunur. (4.1.15) ifadesinde $\alpha'_2 \neq 0$ olduğu göz önüne alınır

$$\frac{4\alpha_2\alpha'_3 - 2\alpha'_2\alpha_3}{\alpha'_2} = \frac{1}{f(x)f'(x)} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Buradan $f(x)f'(x) = \text{sabit}$ olduğunu elde ederiz. (4.1.12) ifadesinden ise

$$(f(x))^{-2} \frac{g(y)g''(y) - (g'(y))^2}{[1 + 2c_1g(y)g'(y)]^2} = \text{sabit}$$

olduğu görülür. Bu ise $f(x) = \text{sabit}$ olması anlamına gelir. Böylece

$$\alpha'_1 + f(x)f'(x)(2\alpha'_1\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha'_3) \neq 0$$

yazılabilir.

(b)

$$\alpha'_1 + f(x)f'(x)(2\alpha'_1\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha'_3) \neq 0 \tag{4.1.17}$$

olduğu göz önüne alınır (4.1.14) formülü

$$f(x)f''(x) = (f'(x))^2 \frac{\alpha'_2 - f(x)f'(x)\beta_1}{\alpha'_1 + f(x)f'(x)\beta_2} \tag{4.1.18}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\beta_1 = 4\alpha_2\alpha'_3 - 2\alpha'_2\alpha_3$ ve $\beta_2 = 2\alpha'_1\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha'_3$ dür.

(4.1.18) ifadesinde y ye göre türev alınır

$$\begin{aligned}
& (f(x)f'(x))^2(\beta'_1\beta_2 - \beta_1\beta'_2) + f(x)f'(x)(\alpha'_1\beta'_1 - \alpha''_1\beta_1 - \alpha'_2\beta'_2 + \alpha''_2\beta_2) \\
& + \alpha''_1\alpha'_2 - \alpha'_1\alpha''_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2' = 0 \\ \alpha_1' \beta_1' - \alpha_1'' \beta_1 - \alpha_2'' \beta_2 + \alpha_2' \beta_2' = 0 \\ \alpha_1'' \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2'' = 0 \end{cases} \quad (4.1.20)$$

denklemleri yazılabilir, burada $\alpha_2 \beta_1 \neq 0$ dır. Aksi halde $g'(y) = 0$ elde edilirdi.

(1) (i) Eğer (4.1.17) ifadesinde $\alpha_1' = 0$ alınırsa $\beta_2 \neq 0$ elde ederiz. Bu $\alpha_1' = 0$ ve $\beta_2 \neq 0$ (4.1.20) de göz önüne alınırsa $g'(y) = 0$ bulunur.

(ii) Eğer (4.1.20) ifadesinde $\alpha_1' \neq 0$ ve $\beta_2 = 0$ alınırsa $g'(y) = \text{sabit}$ olduğu elde edilir. Burada $\beta_2 = 0$ olduğunda $g'(y) = 0$ olur ki bu ise $K \neq 0$ olmasıyla çelişir.

(iii) $\alpha_1' \beta_2 \neq 0$ alınırsa $\alpha_3' = 0$ olur ki bu ise (4.1.20) ifadesine göre $K \neq 0$ olmasıyla çelişir.

Bu nedenle sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli hiçbir

$$r(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$$

factorable yüzey olmadığını ifade edebiliriz.

(2) Eğer bir S factorable yüzeyinin H ortalama eğriliği sıfırdan farklı bir C sabiti ise

$$H = -\frac{A_1}{2[1+2f(x)f'(x)g(y)g'(y)]^{\frac{3}{2}}} = C \quad (4.1.21)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} A_1 = & f(x)(f'(x))^2(g(y))^2 g''(y) + (f(x))^2 f''(x)g(y)(g'(y))^2 \\ & - 2f(x)(f'(x))^2 g(y)(g'(y))^2 - 2f'(x)g'(y) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\alpha_1 = f(x)f'(x)$, $\alpha_2 = (f(x))^2 f''(x)$ ve $\alpha_3 = f'(x)$ ifadeleri yerine yazılırsa, $H \neq 0$ olması $\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ olmasını gerektirir. (4.1.12) ifadesinde x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & \beta_1(g(y))^3 g'(y)g''(y) + \beta_2(g(y))^2 (g'(y))^3 \\ & + \beta_3 g(y)(g'(y))^2 \beta_4(g(y))^2 g''(y) - 2\alpha_3' g'(y) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

elde edilir. Burada

$$\beta_1 = 2\alpha_1'^2 \alpha_3' - \alpha_1 \alpha_1' \alpha_3$$

$$\beta_2 = 2\alpha_1\alpha_2' - 4\alpha_1^2\alpha_3' + 2\alpha_1\alpha_1'\alpha_3$$

$$\beta_3 = \alpha_2' + 4\alpha_1'\alpha_3 - 6\alpha_1\alpha_3'$$

$$\beta_4 = \alpha_1'\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3'$$

dir. (4.1.22) ifadesinde $p(y) = g'(y)$ alınırsa

$$(g(y))^2 \frac{dp}{dg} (\beta_1 g(y)p(y) + \beta_4) = 2\alpha_3' - \beta_2 (g(y)p(y))^2 - \beta_3 g(y)p(y) \quad (4.1.23)$$

olarak yazılabilir.

(a) Eğer (4.1.23) ifadesinde $\beta_1 g(y)p(y) + \beta_4 = 0$ ise

$$g(y)p(y) = \text{sabit} \quad (4.1.24)$$

yada

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_3' = 0 \quad (4.1.25)$$

elde edilir. (4.1.24) ve (4.1.21) ifadeleri göz önüne alınırsa $g'(y) = 0$ elde edilir. (4.1.25) denklemi çözüldüğünde $f'(x) = 0$ elde edilir ki bu ise $H \neq 0$ olması ile çelişir.

(b) Eğer (4.1.23) ifadesinde $\beta_1 g(y)p(y) + \beta_4 \neq 0$ alınırsa

$$(g(y))^2 \frac{dp}{dg} = \frac{2\alpha_3' - \beta_2 (g(y)p(y))^2 - \beta_3 g(y)p(y)}{\beta_1 g(y)p(y) + \beta_4} \quad (4.1.26)$$

elde edilir. (4.1.26) ifadesinde x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & (\beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2') (g(y)p(y))^3 + (\beta_1 \beta_3' - \beta_1' \beta_3 + \beta_2' \beta_4 - \beta_2 \beta_4') (g(y)p(y))^2 \\ & + (\beta_3' \beta_4 - \beta_3 \beta_4' - 2\alpha_3'' \beta_1 + 2\alpha_3' \beta_1') g(y)p(y) \\ & + 2(\alpha_3' \beta_4' - \alpha_3'' \beta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2' &= 0 \\ \beta_1 \beta_3' - \beta_1' \beta_3 + \beta_2' \beta_4 - \beta_2 \beta_4' &= 0 \\ \beta_3' \beta_4 - \beta_3 \beta_4' - 2\alpha_3'' \beta_1 + 2\alpha_3' \beta_1' &= 0 \\ \alpha_3' \beta_4' - \alpha_3'' \beta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

olur. (4.1.28) denklemi çözüldüğünde

$$f'(x) = 0$$

elde edilir ki bu ise $H = 0$ olması demektir. Bu nedenle sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli hiçbir

$$r(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$$

factorable yüzeyi yoktur.

Teorem 4.4. S , $\mathbb{E}_1^3$ de tip 4 cinsinden bir factorable yüzey olsun.

(1) Eğer S nin K Gauss eğriliği sıfırdan farklı bir C sabiti ise S aşağıdaki yüzeydir yada bu yüzeyin bir açık parçasıdır: $f(y)$ ve $g(z)$;

$$\begin{cases} f(y) = (c_1 y + c_2)^{-1} \\ z = \int \left(\frac{c_1^2 c_3 g(z)}{c_1^2 - c_3 g(z)} - 2c_1 g(y) \right)^{-\frac{1}{2}} dg(z) \end{cases}$$

denklemlerini sağlarlar, burada c_1, c_2, c_3 sabittir.

(2) Eğer S nin H ortalama eğriliği sıfırdan farklı bir C sabiti ise S aşağıdaki yüzeydir ya da bu yüzeyin bir açık parçasıdır: $f(y)$ ve $g(z)$

$$\begin{cases} f(y) = (c_1 y + c_2)^{-1} \\ z = \int \left(\left(\frac{2c_1 c_3 g(z)}{2c_1 - c_3 g(z)} \right)^2 - 2c_1 g(z) \right)^{-\frac{1}{2}} dg(z) \end{cases}$$

denklemlerini sağlarlar, burada c_1, c_2, c_3 sabittir [17].

İspat.

(1) Kabul edelim ki $S: r(y, z) = (f(y)g(z), y, z)$ nin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{f(y)f''(y)g(z)g''(z) - (f'(y)g'(z))^2}{[(f'(y)g'(z))^2 - 2f'(y)g(z)]^2} = C \neq 0 \quad (4.1.29)$$

olsun. (4.1.29) ifadesinde $K \neq 0$ olması $f'(y)g'(z) \neq 0$ olmasını gerektirir.

$\alpha_2 \alpha_3 \neq 0$ olmak üzere $\alpha_1 = f(y)f''(y)$, $\alpha_2 = f'(y)$ ve $\alpha_3 = (f(y))^2$ ifadeleri (4.1.29) da yerine yazılır ve y ye göre türev alınırsa

$$\beta_1(g(z))^2 g''(z) - \beta_2 g(z)(g'(z))^2 g''(z) - \beta_3 (g'(z))^4 = 0 \quad (4.1.30)$$

elde edilir, burada

$$\beta_1 = 2\alpha_1'\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_2'$$

$$\beta_2 = \alpha_1'\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_3'$$

$$\beta_3 = 2\alpha_2\alpha_2'\alpha_3 - 2\alpha_2^2\alpha_3'$$

dir. (4.1.29) ifadesinde $g''(z) \neq 0$ alınırsa $g(z) \neq 0$ elde edilir. O halde (4.1.30) denklemi

$$\beta_1 - \beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} - \beta_3 \left(\frac{(g'(z))^2}{g(z)} \right)^2 \frac{1}{g''(z)} = 0 \quad (4.1.31)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $\beta_3 = 0$ alınırsa Teorem 4.4 ün (1) sonucu elde edilir. Eğer (4.1.31) ifadesinde $\beta_3 \neq 0$ alınırsa

$$\left(\frac{(g'(z))^2}{g(z)} \right)^2 \frac{1}{g''(z)} = - \frac{\beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} - \beta_1}{\beta_3} \quad (4.1.32)$$

elde edilir. (4.1.32) denkleminde y ye göre türev alınırsa

$$(\beta_2'\beta_3 - \beta_2\beta_3') \frac{(g'(z))^2}{g(z)} - (\beta_1'\beta_3 - \beta_1\beta_3') = 0 \quad (4.1.33)$$

yazılabilir. Bu son denklemden

$$\begin{cases} \beta_2'\beta_3 - \beta_2\beta_3' = 0 \\ \beta_1'\beta_3 - \beta_1\beta_3' = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

yada

$$\frac{(g'(z))^2}{g(z)} = \frac{\beta_1'\beta_3 - \beta_1\beta_3'}{\beta_2'\beta_3 - \beta_2\beta_3'} = \text{sabit} \quad (4.1.35)$$

bulunur, burada $\beta_2'\beta_3 - \beta_2\beta_3' \neq 0$ dır.

(4.1.34) ile (4.1.29) birlikte düşünüldüğünde $f'(y) = 0$ olduğu; (4.1.35) ile (4.1.29) birlikte düşünüldüğünde $g'(z) = 0$ olduğu elde edilir. Bunlar $K = 0$ olmasını gerektirirler. Böylece $\beta_3 \neq 0$ olduğunda sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli hiçbir

$$r(y, z) = (f(y)g(z), y, z)$$

factorable yüzeyi yoktur.

(2) Kabul edelim ki S nin H ortalama eğriliği

$$H = -\frac{2f(y)f'(y)g(z)g''(z)+f''(y)g(z)-2f(y)f'(y)(f'(y)g'(z))^2}{2[(f(y)g'(z))^2-2f'(y)g(z)]^{\frac{3}{2}}} = C \neq 0 \quad (4.1.36)$$

olsun. $H \neq 0$ olması $f'(y)g'(z) \neq 0$ olmasını gerektirir.

$$\alpha_1 = f(y)f'(y)$$

$$\alpha_2 = f''(y)$$

$$\alpha_3 = f'(y)$$

$$\alpha_4 = (f(y))^2$$

ifadeleri $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \neq 0$ olmak üzere yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa ve (4.1.36) ifadesinde y ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & (8\alpha'_1\alpha_3 - 12\alpha_1\alpha'_3)(g(z))^2g''(z) - (4\alpha'_1\alpha_4 - 6\alpha_1\alpha'_4)g(z)(g'(z))^2g''(z) \\ & + (4\alpha'_2\alpha_3 - 6\alpha_2\alpha'_3)(g(z))^2 - (2\alpha'_2\alpha_4 - 3\alpha_2\alpha'_4 + 8\alpha'_1\alpha_3 - 12\alpha_1\alpha'_3)g(z)(g'(z)) \\ & + (4\alpha'_1\alpha_4 - 6\alpha_1\alpha'_4)(g'(z))^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

elde edilir. (4.1.37) ifadesinde

$$\beta_1 = 8\alpha'_1\alpha_3 - 12\alpha_1\alpha'_3,$$

$$\beta_2 = 4\alpha'_1\alpha_4 - 6\alpha_1\alpha'_4,$$

$$\beta_3 = 4\alpha'_2\alpha_3 - 6\alpha_2\alpha'_3,$$

$$\beta_4 = 2\alpha'_2\alpha_4 - 3\alpha_2\alpha'_4 + 8\alpha'_1\alpha_3 - 12\alpha_1\alpha'_3$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \beta_1(g(z))^2g''(z) - \beta_2g(z)(g'(z))^2g''(z) + \beta_3(g(z))^2 - \beta_4g(z)(g'(z))^2 + \\ & \beta_2g(z)(g'(z))^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

denklemini yani

$$g''(z)\left(\beta_1 - \beta_2\frac{(g'(z))^2}{g(z)}\right) = -\beta_2\left[\frac{(g'(z))^2}{g(z)}\right]^2 + \beta_4\frac{(g'(z))^2}{g(z)} - \beta_3 \quad (4.1.39)$$

ifadesi elde edilir, burada $g''(z) \neq 0$ dır.

Ayrıca (4.1.36) ifadesinde $g''(z) = 0$ alınırsa $g'(z) = 0$ elde edilir.

(a) Eğer $\beta_1 - \beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} = 0$ ise $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ yada $\frac{(g'(z))^2}{g(z)} = \text{sabit}$ elde edilir. Fakat $\frac{(g'(z))^2}{g(z)} = \text{sabit}$ olduğundan dolayı $g'(z) = 0$ dır. Böylece Teorem 4.4 ün (2) sonucunu elde ederiz.

(b) Eğer

$$g''(z) \left(\beta_1 - \beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} \right)$$

ise (4.1.39) ifadesi

$$g''(z) = \frac{-\beta_2 \left[\frac{(g'(z))^2}{g(z)} \right]^2 + \beta_4 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} - \beta_3}{\beta_1 - \beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)}} \quad (4.1.40)$$

şeklinde yazılabilir. (4.1.40) ifadesinde y ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & (\beta'_1 \beta_2 - \beta_1 \beta'_2 + \beta'_2 \beta_4 - \beta_2 \beta'_4) \left[\frac{(g'(z))^2}{g(z)} \right]^2 - (\beta'_1 \beta_4 - \beta_1 \beta'_4 + \beta'_2 \beta_3 - \\ & \beta_2 \beta'_3) \frac{(g'(z))^2}{g(z)} - (\beta'_1 \beta_3 - \beta_1 \beta'_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{cases} \beta'_1 \beta_2 - \beta_1 \beta'_2 + \beta'_2 \beta_4 - \beta_2 \beta'_4 = 0 \\ \beta'_1 \beta_4 - \beta_1 \beta'_4 + \beta'_2 \beta_3 - \beta_2 \beta'_3 = 0 \\ \beta'_1 \beta_3 - \beta_1 \beta'_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.42)$$

olur, burada $\beta_1 = 0$ olması $\beta_2 = 0$ olmasını gerektirdiğinden dolayı $\beta_1 \beta_2 \neq 0$ olur, bu ise $\beta_1 - \beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} = 0$ olması demektir. Yukarıdaki denklemlerden $\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)' = 0$ elde edilir. $\beta_1 = c_0 \beta_2$ olduğu kabul edilirse; c_0 olmak üzere (4.1.42) ifadesinden $\beta_1 = \beta_2 = 0$ bulunur. Bu nedenle $g''(z) \left(\beta_1 - \beta_2 \frac{(g'(z))^2}{g(z)} = 0 \right) \neq 0$ eşitliğini sağlayan hiçbir factorable yüzey yoktur.

Teorem 4.5. $\mathbb{E}_1^3$ de $H^2 = K \neq 0$ eşitliğini sağlayan tip-3 türünden hiçbir factorable yüzey yoktur [17].

İspat. $H^2 = K \neq 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left[f(x)(f'(x))^2(g(y))^2g''(y) + (f(x))^2f''(x)g(y)(g'(y))^2 - \right. \\ & \left. 2f(x)(f'(x))^2g(y)(g'(y))^2 - 2f'(x)g'(y) \right]^2 + 4[1 + \\ & 2f(x)f'(x)g(y)g'(y)][f(x)f''(x)g(y)g''(y) - (f'(x)g'(y))^2] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

elde edilir.

$$p(x) = f'(x), \quad \alpha_1 = f(x)p(x), \quad \alpha_2 = p(x), \quad \alpha_3 = f(x)\frac{dp}{df}$$

ifadeleri (4.1.43) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left[[\alpha_1\alpha_2(g(y))^2g''(y) + \alpha_1(\alpha_3 - 2\alpha_2)g(y)(g'(y))^2 - 2\alpha_2(g'(y))^2]^2 \right. \\ & \left. + 4[1 + 2\alpha_1g(y)g'(y)][\alpha_2\alpha_3g(y)g''(y) - \alpha_2^2(g'(y))^2] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

elde edilir, burada $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$ dir. $t(y) = g'(y)$ olarak alınırsa (4.1.44) ifadesi

$$\begin{aligned} & \beta_1(g(y))^4(t(y))^2\left(\frac{dt}{dg}\right)^2 + \beta_2(g(y))^2(t(y))^4 + \beta_3(g(y))^3(t(y))^3\frac{dt}{dg} + \\ & \beta_4(g(y))^2(t(y))^2\frac{dt}{dg} - \beta_5g(y)(t(y))^3 + \beta_6g(y)t(y)\frac{dt}{dg} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

olarak yazılabilir, burada

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2^2, \quad \beta_2 = \alpha_1^2(\alpha_3 - 2\alpha_2), \quad \beta_3 = 2\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_3 - 2\alpha_2),$$

$$\beta_4 = 8\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha_2^2, \quad \beta_5 = 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \beta_6 = 4\alpha_2\alpha_3$$

dur. $h = g(y)t(y)$ olarak alındığında (4.1.45) ifadesi

$$\left[(g(y))^2\frac{dt}{dg} \right]^2 (\beta_1h) + \left[(g(y))^2\frac{dt}{dg} \right] (\beta_3h^2\beta_4h + \beta_6) + \beta_2h^3 - \beta_5h^2 = 0 \quad (4.1.46)$$

olarak yazılabilir. (4.1.46) ifadesinde

$$A_1 = \beta_1h, \quad A_2 = \beta_3h^2\beta_4h + \beta_6, \quad A_3 = \beta_2h^3 - \beta_5h^2$$

alınırsa (4.1.46) eşitliği

$$(g(y))^2 \frac{dt}{dg} = \frac{-A_2 + \varepsilon \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}$$

şeklinde yazılır, burada $\varepsilon = \pm 1$ dir. Yukarıdaki denklemde f ye göre türev alınırsa

$$(A_1A'_2 - A'_1A_2)(A'_2A_3 - A_2A'_3) + (A_1A'_3 - A'_1A_3)^2 = 0 \quad (4.1.47)$$

bulunur. Burada $A'_i = \frac{dA_i}{df}$, ($i=1, 2, 3$) dür. Yani

$$[(\beta_1\beta'_3 - \beta'_1\beta_3)h^3 + (\beta_1\beta'_4 - \beta'_1\beta_4)h^2 + (\beta_1\beta'_6 - \beta'_1\beta_6)h][(\beta_2\beta'_3 - \beta'_2\beta_3)h^3 + (\beta_3\beta'_5 - \beta'_3\beta_5 + \beta_2\beta'_4 - \beta'_2\beta_4)h^2 + (\beta_2\beta'_6 - \beta'_2\beta_6 + \beta_4\beta'_5 - \beta'_4\beta_5)h - (\beta_5\beta'_6 - \beta'_5\beta_6)] + [(\beta_1\beta'_2 - \beta'_1\beta_2)h^3 + (\beta'_1\beta_5 - \beta_1\beta'_5)h^2]^2 = 0 \quad (4.1.48)$$

dır, burada $\beta'_i = \frac{d\beta_i}{df}$, ($i = 1, 2, \dots, 6$) dir. (4.1.48) ifadesinde $h \neq \text{sabit}$ alınırsa

$$(\beta_1\beta'_6 - \beta'_1\beta_6)(\beta_5\beta'_6 - \beta'_5\beta_6) = 0$$

elde edilir. $\beta_1\beta_5\beta_6 \neq 0$ olduğunda $\beta_1\beta'_6 - \beta'_1\beta_6 = 0$ yada $\beta'_5\beta_6 - \beta_5\beta'_6 = 0$ olur.

(a) (4.1.43) ifadesinde $\beta_1\beta'_6 - \beta'_1\beta_6 = 0$ ise $f'(x) = 0$ bulunur.

(b) (4.1.43) ifadesinde $\beta'_5\beta_6 - \beta_5\beta'_6 = 0$ ise $f'(x) = 0$ dir. Böylece $h = \text{sabit}$ tir yani $g(y)t(y) = \text{sabit}$ olur. Benzer olarak $f(x)f'(x) = \text{sabit}$ olduğu da elde edilir. (4.1.43) ifadesinde $f'(x)g'(y) = 0$ alınırsa çelişki olur. Sonuç olarak $\mathbb{E}_1^3$ de $H^2 = K \neq 0$

şartını sağlayan hiçbir

$$r(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$$

factorable yüzeyinin olmadığı elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.6. $S: r(y, z) = (x(y, z), y, z) = (f(y)g(z), y, z)$, $\mathbb{E}_1^3$ de tip-4 türünden bir factorable yüzey olsun. Eğer K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği $H^2 = K \neq 0$ şartını sağlarsa S ,

$$x(y, z) = c_1(y + c_2)^{-1} \left(c_3 - \frac{c_1}{2} \left(\frac{z}{c_1} - c_4 \right)^2 \right),$$

şeklinde bir yüzeydir yada bu yüzeyin bir açık parçasıdır, burada c_1, c_2, c_3, c_4 sabittir[17].

İspat. Eğer S yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği $H^2 = K \neq 0$ şartını sağlayacak şekilde alınırsa

$$[2f(y)f'(y)g(z)g''(z) + f''(y)g(z) - 2f(y)f'(y)(g'(z))^2]^2 + 4[f(y)f''(y)g(z)g''(z) - (f'(y)g'(z))^2][f(y)(g'(z))^2 - 2f'(y)g(z)] = 0 \quad (4.1.49)$$

elde edilir. $\alpha_1 = g(z)g''(z)$ ve $\alpha_2 = (g'(z))^2$ bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \beta_1 \left(t(y) \frac{dt}{df} \right)^2 - \beta_2 f(y) (t(y))^2 \frac{dt}{df} + \beta_3 (f(y))^2 (t(y))^2 + \beta_4 (f(y))^3 t(y) \frac{dt}{df} \\ & + \beta_5 (t(y))^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

bulunur, burada

$$t(y) = f'(y), \quad \beta_1 = (g(z))^2,$$

$$\beta_2 = 4(\alpha_1 + \alpha_2)g(z),$$

$$\beta_3 = 4\alpha_1^2 - 8\alpha_1\alpha_2,$$

$$\beta_4 = 4\alpha_1\alpha_2,$$

$$\beta_5 = 8g(z)\alpha_2$$

dir. Yukarıdaki denklemlerden

$$\left(\frac{dt}{f(y)} \right)^2 \left(\beta_1 \frac{t(y)}{(f(y))^2} \right) + \left(\frac{dt}{f(y)} \right) \left(-\beta_2 \frac{t(y)}{(f(y))^2} + \beta_4 \right) + \left(\beta_5 \left(\frac{t(y)}{(f(y))^2} \right)^2 + \beta_3 \frac{t(y)}{(f(y))^2} \right) = 0$$

elde edilir.

(a) $h = \frac{t(y)}{(f(y))^2}$ değeri yerine yazılır ve $h \neq \text{sabit}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & [h(\beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2') + (\beta_1 \beta_4' - \beta_1' \beta_4)][\beta_2 \beta_5' - \beta_2' \beta_5]h^2 + (\beta_2 \beta_3' - \beta_2' \beta_3 + \beta_4' \beta_5 - \\ & \beta_4 \beta_5')h + (\beta_3 \beta_4' - \beta_3' \beta_4) + [(\beta_1 \beta_5' - \beta_1' \beta_5)h^2 + (\beta_1 \beta_3' - \beta_1' \beta_3)h]^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

olur. (4.1.51) ifadesinden $\beta_1 \beta_5' - \beta_1' \beta_5 = 0$ bulunur. Ayrıca (4.1.49) denkleminde $g'(z) = 0$ elde edilir. Böylece $H = K = 0$ olduğu sonucuna varılır.

(b) Eğer $h = C \neq 0$ ise $\frac{t(y)}{(f(y))^2} = \text{sabit}$ olur, burada C bir sabittir. Ayrıca verilen denklem çözüldüğünde

$$f(y) = c_1(y + c_2)^{-1}$$

olarak bulunur. (4.1.49) ile

$$\left[-g(z)g''(z) + \frac{g(z)}{c_1} + (g'(z))^2\right]^2 + [2g(z)g''(z) - (g'(z))^2] \left[(g'(z))^2 + 2\frac{g(z)}{c_1}\right] = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem çözüldüğünde ise

$$g(z) = c_3 - c_1 \left(\frac{z}{c_1} - c_4\right)^2$$

elde edilir yani

$$\begin{cases} f(y) = c_1(y + c_2)^{-1} \\ g(z) = c_3 - c_1 \left(\frac{z}{c_1} - c_4\right)^2 \end{cases}$$

dir. Bu ise Teorem 4.6'nın ispatını tamamlar.

Teorem 4.7. $\mathbb{E}_1^3$ de $aH + bK = 0$ şartını sağlayan tip-3 türünden hiçbir $S: r(x, y) = (x, y, z(x, y))$ factorable yüzeyi yoktur, burada $HK \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ dır [17].

İspat. Eğer S nin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği $aH + bK = 0$ şartını sağlarsa $\frac{H}{K} = -\frac{b}{a} = \text{sabit}$ yani

$$\frac{H_1 H_2}{f(x)f''(x)g(y)g''(y) - (f'(x)g'(y))^2} = -\frac{2b}{a}, \quad (4.1.52)$$

ise, burada

$$\begin{aligned} H_1 &= f(x)(f'(x))^2(g(y))^2 g''(y) + (f(x))^2 f''(x)g(y)(g'(y))^2 \\ &\quad - 2f(x)(f'(x))^2 g(y)(g'(y))^2 - 2f'(x)g'(y) \\ H_2 &= (1 + f(x)f'(x)g(y)g'(y))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dir. Kabul edelim ki burada

$$p(x) = f'(x), \quad \alpha_1 = f(x)p(x), \quad \alpha_2 = p(x), \quad \text{ve} \quad \alpha_3 = f(x)\frac{dp}{df}$$

olsun. Dolayısıyla $K \neq 0$ olması $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \neq 0$ olduğu sonucunu verir. (4.1.52) ifadesinde f ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} &\beta_1(g(y))^3(g''(y))^2 - \beta_2(g(y)g'(y))^2 g''(y) + \beta_3(g(y))^4 g'(y)(g''(y))^2 + \\ &\beta_4(g(y)g'(y))^3 g''(y) + \beta_5 g(y)(g'(y))^4 - \beta_6(g(y))^2(g'(y))^5 + \\ &\beta_7 g(y)g'(y)g''(y) - \beta_8(g'(y))^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.53)$$

elde edilir, burada

$$\beta_1 = \alpha_2^2(\alpha'_1 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha'_3)$$

$$\beta_2 = \alpha'_1 \alpha_2^3 - \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha'_2 - \alpha'_1 \alpha_2 \alpha_3^2 + 4\alpha'_1 \alpha_2^2 \alpha'_3 + \alpha_1 \alpha'_2 \alpha_3^2 - 6\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha'_3$$

$$\beta_3 = 3\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2^2 \alpha_3 - 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha'_3$$

$$\beta_4 = 3\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2 \alpha_3^2 - 6\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2^2 \alpha_3 - 2\alpha_1 \alpha'_2 \alpha_3^2 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha'_3 - 3\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2^3 + 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha'_2$$

$$\beta_5 = -4\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha'_2 + 2\alpha'_1 \alpha_2^2 \alpha_3 - 2\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha'_3 - \alpha'_1 \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_1 \alpha'_2 \alpha_3^2 + 2\alpha'_1 \alpha_2^3$$

$$\beta_6 = 3\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2^2 \alpha_3 + 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha'_3 - 6\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2^3 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha'_2 - 4\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha'_2 \alpha_3$$

$$\beta_7 = 2\alpha_2^2 \alpha_3'$$

$$\beta_8 = 2\alpha_2^2 \alpha'_2$$

$$\alpha'_i = \frac{d\alpha_i}{df} \quad (i = 1, 2, 3)$$

dir. $t(y) = g'(y)$ olarak alınırsa, (4.1.52) ifadesi

$$\left[(g(y))^2 \frac{dt}{dg} \right]^2 (\beta_1 + \beta_3 g(y)t(y)) + \left[(g(y))^2 \frac{dt}{dg} \right] [\beta_7 - \beta_2 g(y)t(y) + \beta_4 (g(y)t(y))^2] + [-\beta_8 g(y)t(y) + \beta_5 (g(y)t(y))^2 - \beta_6 (g(y)t(y))^3] = 0$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.5 de kullanılan yöntem ile

$$\begin{aligned} & \left[(\beta'_3 \beta_4 - \beta_3 \beta'_4)(g(y)t(y))^3 + (\beta'_1 \beta_4 - \beta_1 \beta'_4 + \beta'_2 \beta_3 - \beta_2 \beta'_3)(g(y)t(y))^2 + \right. \\ & (\beta_1 \beta'_2 - \beta'_1 \beta_2 + \beta'_3 \beta_7 - \beta_3 \beta'_7)g(y)t(y) - (\beta_1 \beta'_7 - \beta'_1 \beta_7) \left. \right] \times \left[(\beta'_4 \beta_6 - \right. \\ & \beta_4 \beta'_6)(g(y)t(y))^5 + (\beta_2 \beta'_6 - \beta'_2 \beta_6 + \beta_4 \beta'_5 - \beta'_4 \beta_5)(g(y)t(y))^4 + (\beta_6 \beta'_7 - \beta'_6 \beta_7 + \\ & \beta'_2 \beta_5 - \beta_2 \beta'_5 + \beta'_4 \beta_8 - \beta_4 \beta'_8)(g(y)t(y))^3 + (\beta'_5 \beta_7 - \beta_5 \beta'_7 + \beta_2 \beta'_8 - \\ & \beta'_2 \beta_8)(g(y)t(y))^2 - (\beta_7 \beta'_8 - \beta'_7 \beta_8)g(y)t(y) \left. \right] \times \left[(\beta_3 \beta'_6 - \beta'_3 \beta_6)(g(y)t(y))^4 + \right. \\ & (\beta'_3 \beta_5 - \beta_3 \beta'_5 + \beta_1 \beta'_6 - \beta'_1 \beta_6)(g(y)t(y))^3 + (\beta'_1 \beta_5 - \beta_1 \beta'_5 + \beta_3 \beta'_8 - \\ & \beta'_3 \beta_8)(g(y)t(y))^2 + (\beta_1 \beta'_8 - \beta'_1 \beta_8 g(y)t(y)) \left. \right] = 0 \quad (4.1.54) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden

$$(\beta_1 \beta'_7 - \beta'_1 \beta_7)(\beta_7 \beta'_8 - \beta'_7 \beta_8) = 0 \quad (4.1.55)$$

elde edilir. $\beta_1 \neq 0$ dir. Eğer $\beta_1 = 0$ olursa yukarıdaki denklemde $(g(y)t(y))^2$ katsayısının sıfırdan farklı olduğu elde edilir. O halde $\beta_7 \neq 0$ ve $\beta_8 \neq 0$ dir. Eğer $\beta_7 = 0$ olursa $f'(x) = 0$ ve $\beta_7 \neq 0$ dan $\beta_8 \neq 0$ olduğu bulunur. $\beta_1 \beta_7 \beta_8 \neq 0$ olduğundan dolayı $f' = 0$ elde edilir ki bu (4.1.55) den $K = 0$ olması demektir.

Teorem 4.8. $S: r(y, z) = (x(y, z), y, z) = (f(y)g(z), y, z) \in \mathbb{E}_1^3$ de tip-4 türünden bir factorable yüzey olsun. Eğer S nin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği $aH + bK = 0, HK \neq 0, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ şartını sağlarsa S ,

$$f(y) = c_1(y + c_2)^{-1}$$

veya

$$z = \int \left[2c_3^2(g(z))^2 \left(-\frac{2}{c_1} - \frac{2bc_3}{a|c_1|} \right) g(z) + \left(2\varepsilon c_3(g(z))^2 - \frac{2bc_3}{a|c_1|} g(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} dg,$$

şeklinde bir yüzeydir yada bu yüzeyin bir açık parçasıdır, burada $\varepsilon = \pm 1, c_1, c_2, c_3$ sabittir [17].

İspat. Eğer S nin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği $aH + bK = 0$ şartını sağlarsa

$$\begin{aligned} -\frac{2b}{a} &= \frac{2f(y)f'(y)g(z)g''(z) + f''(y)g(z) - 2f(y)f'(y)(g'(z))^2}{f(y)f''(y)g(z)g''(z) - (f'(z)g'(z))^2} \\ &\quad \times [(f(y)g'(z))^2 - 2f'(y)g(z)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.1.56)$$

bulunur. (4.1.56) ifadesinde g ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \beta_1(f(y)f'(y))^2 f''(y) - \beta_2 f(y)(f'(y))^4 + \beta_3(f(y))^4 f'(y)f''(y) + \beta_4(f(y)f'(y))^3 + \\ \beta_5 f(y)f'(y)(f''(y))^2 - \beta_6(f'(y))^3 f''(y) - \beta_7(f(y))^3 (f''(y))^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

elde edilir, burada

$$\beta_1 = -2\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2'\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1'\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_2'\alpha_3,$$

$$\beta_2 = 4\alpha_1\alpha_2'\alpha_3 + 2\alpha_2^2 - 4\alpha_1'\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2,$$

$$\beta_3 = \alpha_1^2\alpha_2' - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_2' + 2\alpha_1'\alpha_2^2,$$

$$\beta_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_2' - 2\alpha_1'\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_2',$$

$$\beta_5 = 2\alpha_1'\alpha_3^2 - 3\alpha_1\alpha_3,$$

$$\beta_6 = 2\alpha_2'\alpha_3^2 - 3\alpha_2\alpha_3,$$

$$\beta_7 = \alpha_1'\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2'\alpha_3,$$

$$\alpha_1 = g(z)g''(z),$$

$$\alpha_2 = (g'(z))^2,$$

$$\alpha_3 = g(z),$$

$$\alpha'_i = \frac{d\alpha_i}{dg}$$

dir. $t(y) = f'(y)$ olarak alınırsa

$$\left(\frac{dt}{df}\right)^2 \left(\beta_5 \frac{t(y)}{(f(y))^2} - \beta_7\right) + \frac{dt}{df} \left(-\beta_6 \left(\frac{t(y)}{(f(y))^2}\right)^2 + \beta_1 \frac{t(y)}{(f(y))^2} + \beta_3\right) - \beta_2 \left(\frac{t(y)}{(f(y))^2}\right)^2 + \beta_4 \frac{t(y)}{(f(y))^2} = 0 \quad (4.1.58)$$

bulunur. $h = \frac{t(y)}{(f(y))^2}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &[h^3(\beta_5\beta'_6 - \beta'_5\beta_6) + h^2(\beta_6\beta'_7 - \beta'_6\beta_7 + \beta_1\beta'_5 - \beta'_1\beta_5) + h(\beta'_1\beta_7 - \beta_1\beta'_7 + \beta_3\beta'_5 - \\ &\beta'_3\beta_5) - (\beta_3\beta'_7 - \beta'_3\beta_7)][h^4(\beta'_2\beta_6 - \beta_2\beta'_6) + h^3(\beta'_1\beta_2 - \beta_1\beta'_2 + \beta_4\beta'_6 - \beta'_4\beta_6) + \\ &h^2(\beta_2\beta'_3 - \beta'_2\beta_3 + \beta_1\beta'_4 - \beta'_1\beta_4) + h(\beta_3\beta'_4 - \beta'_3\beta_4)] + [h^3(\beta'_2\beta_5 - \beta_2\beta'_5) + \\ &h^2(\beta_4\beta'_5 - \beta'_4\beta_5 + \beta_2\beta'_7 - \beta'_2\beta_7) + h(\beta'_4\beta_7 - \beta_4\beta'_7)]^2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde $h \neq \text{sabit}$ ise $(\beta_3\beta'_7 - \beta'_3\beta_7)(\beta_3\beta'_4 - \beta'_3\beta_4) = 0$ olur.

(a) Eğer $(\beta_3\beta'_7 - \beta'_3\beta_7) = 0$ ise $g(z) = c_1(y + c_2)^{c_3}$ elde edilir. Ayrıca (4.1.56) ifadesinden $c_1 = 0$ yani $g'(z) = 0$ elde edilir.

(b) Eğer $\beta_3\beta'_4 - \beta'_3\beta_4 = 0$ ise $\frac{g(z)}{(g'(z))^2} = \text{sabit}$ olur. Dolayısıyla (4.1.56) ifadesinden

$g'(z) = 0$ bulunur. Böylece $h = \text{sabit}$ olmasından dolayı $\frac{g(z)}{(g'(z))^2} = \text{sabit}$ olur.

$\frac{g(z)}{(g'(z))^2} = \text{sabit}$ denklemi çözüldüğünde $f(y) = c_1(y + c_2)^{-1}$ elde edilir.

$f(y) = c_1(y + c_2)^{-1}$ ve (4.1.57) ifadesi birlikte düşünülürse

$$z = \int \left[2c_3^2 (g(z))^2 \left(-\frac{2}{c_1} - \frac{2bc_3}{a|c_1|} \right) g(z) + \left(2\epsilon c_3 (g(z))^2 - \frac{2bc_3}{a|c_1|} g(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} dg$$

elde edilir.

5. G_3^1 PSEUDO GALİLEAN UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER

Tanım 5.1. G_3^1 Pseudo-Galilean uzayında bir M^2 yüzeyi lokal olarak

$$r(u_1, u_2) := (u_1, u_2, f_1(u_1) f_2(u_2)), \quad (5.1.1)$$

$$r(u_1, u_3) := (u_1, f_1(u_1) f_3(u_3), u_3) \quad (5.1.2)$$

ya da

$$r(u_2, u_3) := (f_2(u_2) f_3(u_3), u_2, u_3) \quad (5.1.3)$$

şeklinde yazılabiliyorsa factorable yüzey olarak adlandırılır, burada f_i ler tüm $i \in \{1, 2, 3\}$ için tek değişkenli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (5.1.1), (5.1.2.) ve (5.1.3) ifadeleri ile verilen yüzeylere, sırasıyla, birinci tip, ikinci tip ve üçüncü tip factorable yüzeyler adı verilir [18].

5.1. G_3^1 Pseudo-Galilean Uzayında Sıfır Gauss Eğrilikli Factorable Yüzeyler

G_3^1 pseudo-Galilean uzayında, sırasıyla, birinci, ikinci ve üçüncü tip factorable yüzeyleri gözönüne alalım. Bu durumda G_3^1 pseudo-Galilean uzayında sıfır Gauss eğrilğine sahip olan factorable yüzeyler için tam anlamıyla bir sınıflandırma veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1.1. M^2 , G_3^1 pseudo-Galilean uzayında sıfır Gauss eğrilikli bir factorable yüzey olsun. Eğer M^2 birinci tip bir factorable yüzey (sırasıyla ikinci tip ve üçüncü tip) ise bu yüzey için aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir [18]:

(a) f_1, f_2 den en az biri (sırasıyla f_1, f_3 ve f_2, f_3) sabit bir fonsiyondur.

(b) $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ dir, burada $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i \in \{1, 2\}$ (sırasıyla $i \in \{1, 3\}$ ve $i \in \{2, 3\}$) dir.

(c) $f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i) \xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$ dir, burada $\alpha_i \neq 0, 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1$, $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ dir (sırasıyla $i \in \{1, 3\}$ ve $i \in \{2, 3\}$ dür).

Tersine, (a) - (c) durumlarındaki şartları sağlayan factorable yüzeyler sıfır Gauss eğrilğine sahiptir.

İspat. Teorem ikinci ve üçüncü tip factorable yüzeyler için de aşağıdaki yöntem kullanılarak ispatlanabileceği için sadece birinci tip factorable yüzey için ispat yapıldı.

M^2 , G_3^1 pseudo-Galilean uzayında birinci tip bir factorable yüzey olsun. Bu durumda M^2 nin birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları

$$\begin{cases} g_1 = 1, g_2 = 0 \\ h_{11} = -(f_1' f_2')^2, h_{12} = -(f_1 f_2) f_1' f_2', h_{22} = 1 - (f_1 f_2')^2 \\ N = \frac{(0, f_1 f_2', 1)}{W} \\ L_{11} = -\frac{\varepsilon}{W} (f_1'' f_2'), L_{12} = -\frac{\varepsilon}{W} (f_1' f_2''), L_{22} = -\frac{\varepsilon}{W} (f_1 f_2'') \end{cases} \quad (5.1.4)$$

şeklinde elde edilir, burada $f_i' = \frac{df_i}{du_i}$, $f_i'' = \frac{d^2 f_i}{du_i^2}$, $i \in \{1, 2\}$ ve $W = \sqrt{|1 - (f_1 f_2')^2|}$ dir. M^2 factorable yüzeyinin Gauss eğriliğinin

$$K = \frac{\varepsilon}{W^4} [(f_1'' f_2'') f_1 f_2 - (f_1' f_2')^2] \quad (5.1.5)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi M^2 yüzeyinin sıfır Gauss eğriliğine sahip olduğunu kabul edelim. Bu ise doğrudan f_1 ya da f_2 nin (a) durumunu veren sabit fonksiyon olduğunu verir. f_1 ve f_2 sabit olmayan fonksiyonlar ise (5.1.5) eşitliği göz önüne alınırsa

$$(f_1'' f_2'') f_1 f_2 - (f_1' f_2')^2 = 0 \quad (5.1.6)$$

elde edilir. f_i'' , $i \in \{1, 2\}$ sıfır olamayacağı için (5.1.6) denklemi

$$\frac{f_1'' f_1}{(f_1')^2} - \frac{(f_2')^2}{f_2'' f_2} = 0 \quad (5.1.7)$$

olarak yazılabilir. Böylece (5.1.7) denklemi aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar:

$$\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = \alpha_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (5.1.8)$$

burada $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1$ dir. (5.1.8) denklemi aşağıdaki Bernoulli adi diferansiyel denkleminde indirgenebilir:

$$f_i' - \beta_i f_i^{\alpha_i} = 0, \quad \beta_i \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (5.1.9)$$

$\alpha_i = 1, i \in \{1, 2\}$ için, (5.1.9) adi diferensiyel denkleminin çözümünden (b) durumunu veren

$$f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{1, 2\}$$

fonksiyonu elde edilir.

$\alpha_i \neq 1, i \in \{1, 2\}$ ise (5.1.9) adi diferensiyel denkleminin çözümünden (c) durumunu veren

$$f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i)\xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$$

fonksiyonu elde edilir, burada $i \in \{1, 2\}$ için $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1$, $\xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dir.

Tersine (a)-(c) durumlarındaki gibi verilen tüm factorable yüzeylerin sıfır Gauss eğriliğine sahip olduğu temel hesaplamalar ile elde edilebilir.

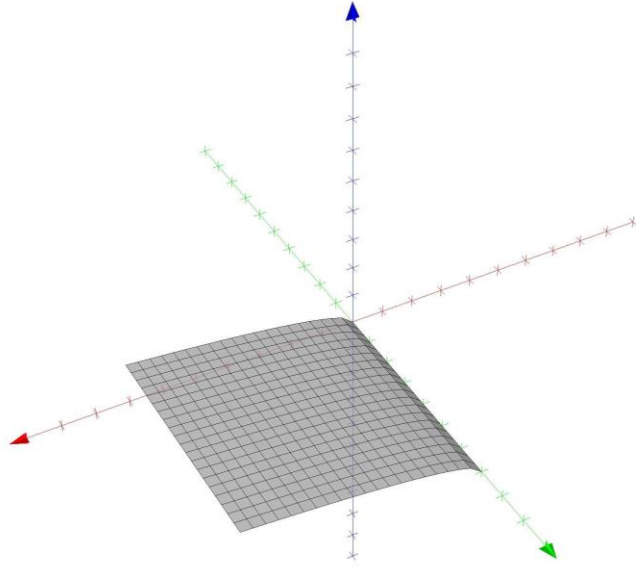
Örnek 5.1.1. M^2 yüzeyi, G_3^1 pseudo-Galilean uzayında sıfır Gauss eğriliğine sahip olan birinci tip bir factorable yüzey olsun. Teorem 5.1.1 in (a)-(c) durumlarındaki gibi tanımlanmış,

$$u_3 = 0.5 (u_1)^{0.5}$$

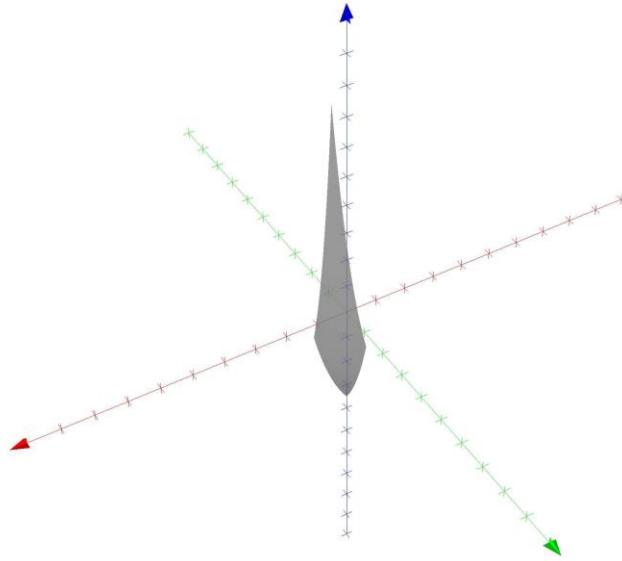
$$u_3 = 1.5 \exp(u_1 + u_2) - 5 \text{ ve}$$

$$u_3 = -0.25(u_1)^{-1}(u_2)^2$$

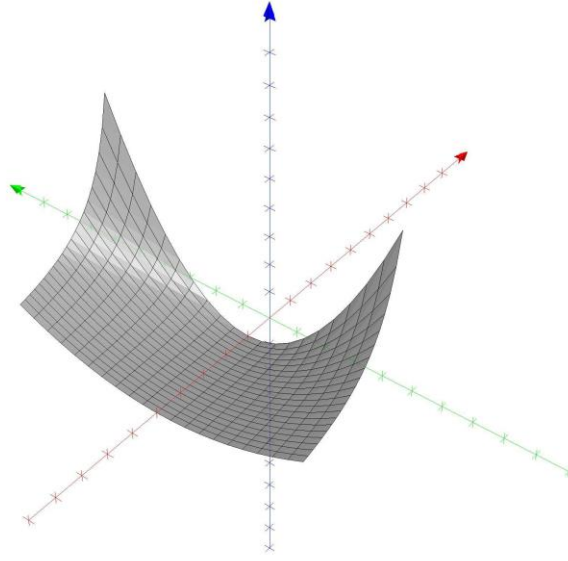
parametrizasyonları gözönüne alınırsa bu yüzeylerin grafikleri, sırasıyla, Şekil 5.1, Şekil 5.2 ve Şekil 5.3 deki gibi verilebilir [18].



Şekil 5.1. $u_3 = 0.5 (u_1)^{0.5}$ parametrizasyonuna sahip sıfır Gauss eğrilikli factorable yüzey



Şekil 5.2. $u_3 = 1.5 \exp(u_1 + u_2) - 5$ parametrizasyonuna sahip sıfır Gauss eğrilikli factorable yüzey



Şekil 5.3. $u_3 = -0.25 (u_1)^{-1} (u_2)^2$ parametrizasyonuna sahip sıfır Gauss eğrilikli factorable yüzey

5.2. G_3^1 Pseudo - Galilean Uzayında Minimal Factorable Yüzeyler

Bu bölümde G_3^1 pseudo-Galilean uzayında bir factorable yüzeyin minimal olması ile ilgili genel bir sınıflandırma vereceğiz.

Teorem 5.2.1. M^2 , G_3^1 de bir factorable yüzey olsun. M^2 nin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır [18]:

- (a) M^2 birinci tip yüzey olduğunda f_2 lineer bir fonksiyondur.
- (b) M^2 ikinci tip yüzey olduğunda f_3 lineer bir fonksiyondur.
- (c) M^2 üçüncü tip yüzey olduğunda aşağıdaki üç durumdan biri geçerlidir:

(c.i) f_2 ve f_3 den en az biri sabit bir fonksiyondur.

(c.ii) $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ dir, burada $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{2,3\}$.

(c.iii) $f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i)\xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$ dir, burada $\alpha_i \neq 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_2 + \alpha_3 = 2$

$\xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{2,3\}$ dir.

İspat. M^2 birinci tip bir factorable yüzey olsun yani (5.1.1) ifadesi ile parametrize edilmiş olsun. (5.1.4) ifadesi göz önüne alınırsa M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\varepsilon}{2W^3} [f_1 f_2''] \quad (5.2.1)$$

şeklinde elde edilir. (5.2.1) denkleminde göre M^2 nin minimal factorable yüzey olması için gerek ve yeter şart f_2 nin lineer bir fonksiyon olmasıdır. Benzer şekilde ikinci tip bir factorable yüzey minimal olması için gerek ve yeter şart f_3 ün lineer bir fonksiyon olmasıdır. Bu durum kolayca gösterilebilir.

Bu ise (a) ve (b) durumunun sağlandığını ifade eder.

Şimdi M^2 yüzeyi üçüncü tip bir factorable yüzey olsun. O halde M^2 yüzeyinin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} g_1 = f_2' f_3, & g_2 = f_2 f_3', & h_{11} = 1, h_{22} = -1, \\ N = \frac{(0, f_2' f_3, -f_2 f_3')}{W} \\ L_{11} = -\frac{\varepsilon}{W} (f_2'' f_3), & L_{12} = -\frac{\varepsilon}{W} (f_2' f_3'), & L_{22} = -\frac{\varepsilon}{W} (f_2 f_3'') \end{cases} \quad (5.2.2)$$

şeklindedir. Burada $W = \sqrt{|f_2' f_3 - f_2 f_3'|}$ dir. (5.2.2) deki ifadelerden M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2W^3} [(f_2 f_3')^2 f_2'' f_3 - 2(f_2' f_3')^2 (f_2 f_3) + (f_2' f_3)^2 f_2 f_3''] = 0 \quad (5.2.3)$$

olmasını gerektirir. f_2 ve f_3 fonksiyonlarından biri sabit bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitlik sağlanır. Bu ise (c.i) durumunun ispatını verir. Aksi halde

$$\frac{f_2'' f_2}{(f_2')^2} + \frac{f_3'' f_3}{(f_3')^2} = 2 \quad (5.2.4)$$

sonucu elde edilir. İspatın geri kalan kısmı için iki durum söz konusudur.

Durum 1. $i \in \{2,3\}$ için $\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = 1$ olsun.

Bu durumda $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{2,3\}$ için $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ olduğu elde edilir ki bu da (c.ii) durumunun ispatını tamamlar.

Durum 2. $i \in \{2,3\}$ için $\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} \neq 1$ olsun. (5.2.4) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = \alpha_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \neq 1, i \in \{2,3\} \quad (5.2.5)$$

ifadesi elde edilir bu durumda $\alpha_2 + \alpha_3 = 2$ dir. (5.2.5) ifadesindeki adi diferansiyel denklemi çözülürse

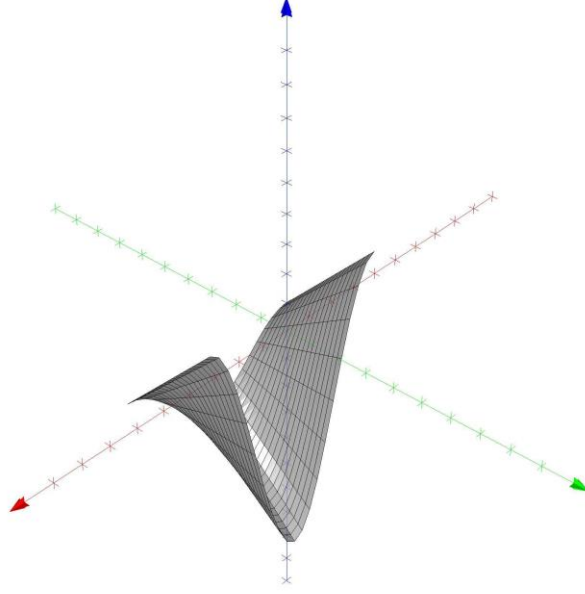
$$f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i) \xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$$

elde edilir ki, burada $\xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{2,3\}$ dür. Bu ise (c.iii) durumunun ispatını verir.

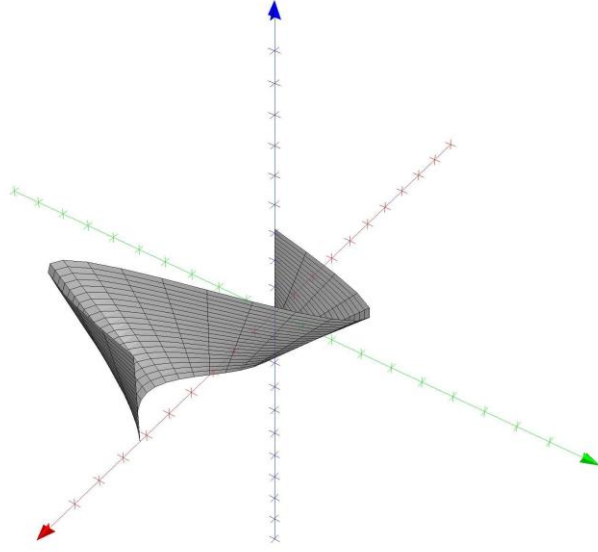
Tersine (a)-(c.iii) durumlarında verilen tüm factorable yüzeylerin minimal olduğu temel hesaplamalar ile açıkça görülebilir.

Örnek 5.2.1. M^2, G_3^1 pseudo-Galilean uzayında minimal bir factorable yüzey olsun. Teorem 5.2.1 in (a), (b) ve (c.iii) durumlarındaki gibi verilen $u_3 = \cos(u_1)(u_2 + 1)$,

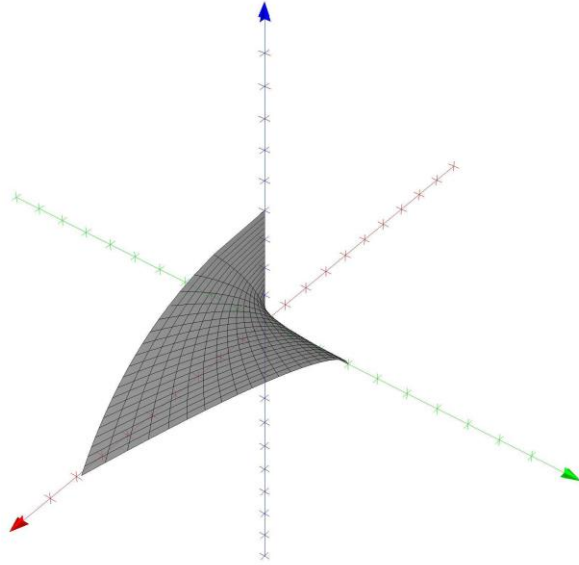
$u_2 = \sin(u_1) (u_3 + 1)$ ve $u_1 = (2u_2)^{0.5} (\frac{2}{3}u_3)^{1.5}$ parametrizasyonlarına sahip fonksiyonlar gözününe alınırsa, sırasıyla, Şekil 5.4, Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 elde edilir [18].



Şekil 5.4. $u_3 = \cos(u_1) (u_2 + 1)$ parametrizasyonuna sahip birinci tip minimal factorable yüzey



Şekil 5.5. $u_2 = \sin(u_1)(u_3 + 1)$ parametrizasyonuna sahip ikinci tip minimal factorable yüzey



Şekil 5.6. $u_1 = (2u_2)^{0.5}(\frac{2}{3}u_3)^{1.5}$ parametrizasyonuna sahip üçüncü tip minimal factorable yüzey

3- boyutlu uzayda amalgamatik eğrilik, verilen herhangi bir yüzeyin asli eğriliklerinin harmonik oranıdır yani Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğinin oranıdır. Bu

nedenle f_1 in bir lineer fonksiyon olması özel durumunda $K/H = \text{sabit} \neq 0$ oranına sahip birinci ve ikinci tür factorable yüzeyleri analiz edebiliriz. Bu nedenle M^2 birinci tip bir factorable yüzey olsun. $f_1(u_1) = \alpha_1 u_1 + \beta_1$ fonksiyonu göz önüne alınırsa Teorem (5.2.1) den dolayı f_2 lineer fonksiyon olamaz. O halde (5.1.5) ve (5.2.1) ifadelerinden M^2 yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğinin oranı

$$\frac{K}{H} = \frac{1}{2W} \frac{\alpha_1^2 (f_2')^2}{(\alpha_1 u_1 + \beta_1) f_2''}$$

şeklindedir. Kabul edelim ki $\frac{K}{H} = \lambda = \text{sabit}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2W} \frac{\alpha_1^2 (f_2')^2}{(\alpha_1 u_1 + \beta_1) f_2''} = \lambda \quad (5.2.6)$$

elde edilir. (5.2.6) ifadesinde u_1 e göre kısmi türev alınırsa

$$|1 - (f_1 f_2')^2| + (f_1 f_2')^2 = 0 \quad (5.2.7)$$

sonucu bulunur. Eğer M^2 yüzeyi timelike ise $(f_1 f_2')^2 - 1 < 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Aksi takdirde (5.2.7) ifadesi

$$(\alpha_1 u_1 + \beta_1)^2 (f_2')^2 = \frac{1}{2} \quad (5.2.8)$$

olmasını gerektirir. (5.2.8) ifadesinde tekrar u_1 e göre kısmi türev alınırsa

$$\alpha_1 (\alpha_1 u_1 + \beta_1) (f_2')^2 = 0$$

elde edilir ki bu mümkün değildir. Bu ise G_3^1 pseudo-Galilean $\frac{K}{H} = \text{sabit} \neq 0$ oranını sağlayan birinci tip bir factorable yüzeyin olmadığını gösterir. Benzer şekilde bu şartı sağlayan ikinci tip factorable yüzeylerin olmadığı söylenebilir. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.2.2. Factorable yüzey tanımında verilen f_1 lineer bir fonksiyon olsun. Bu durumda G_3^1 pseudo-Galilean uzayında $\frac{K}{H} = \text{sabit} \neq 0$ oranını sağlayan birinci ve ikinci tip bir factorable yüzey yoktur [18].

6. G_3 GALİLEAN UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER

Tanım 6.1. M^2, G_3 Galilean uzayında bir yüzey olsun. M^2 yüzeyi lokal olarak

$$r(u_1, u_2) := (u_1, u_2, f_1(u_1) f_2(u_2)), \quad (6.1.1)$$

$$r(u_1, u_3) := (u_1, f_1(u_1) f_3(u_3), u_3), \quad (6.1.2)$$

ya da

$$r(u_2, u_3) := (f_2(u_2) f_3(u_3), u_2, u_3) \quad (6.1.3)$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu yüzey factorable yüzey olarak adlandırılır, burada f_i ler tüm $i \in \{1,2,3\}$ için tek değişkenli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. (6.1.1), (6.1.2) ve (6.1.3) ifadeleri ile verilen yüzeylere sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip factorable yüzey adı verilir.

6.1. G_3 Galilean Uzayında Sıfır Gauss Eğrilikli Factorable Yüzeyler

Bu bölümde G_3 Galilean uzayında bir M^2 yüzeyinin Gauss eğriliği hesaplanarak genel bir sınıflandırma yapıldı.

Teorem 6.1.1. M^2, G_3 Galilean uzayında sıfır Gauss eğrilikli bir factorable yüzey olsun. Eğer M^2 yüzeyi birinci tip bir factorable yüzey (sırasıyla ikinci tip ve üçüncü tip) ise bu yüzey için aşağıdaki durumlardan biri sağlanır.

(a) f_1 ve f_2 den en az biri (sırasıyla f_1, f_3 ve f_2, f_3) sabit bir foksiyondur,

(b) $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ dir, burada $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i \in \{1, 2\}$ (sırasıyla $i \in \{1, 3\}$ ve $i \in \{2, 3\}$ dir,

(c) $f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i) \xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$ dir, burada $\alpha_i \neq 0, 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1, \xi_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ dir (sırasıyla $i \in \{1, 3\}$ ve $i \in \{2, 3\}$) dür.

Tersine, (a)-(c) durumlarındaki şartları sağlayan factorable yüzeyler sıfır Gauss eğriliğine sahiptir.

İspat. M^2 , G_3 Galilean uzayında birinci tip bir factorable yüzey olsun. O halde M^2 nin birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları (2.4.1) ve (2.4.4) ifadelerinden

$$\begin{cases} g_1 = 1, g_2 = 0 \\ h_{11}=(f_1' f_2')^2, h_{12}=(f_1 f_2)f_1' f_2', h_{22}=1+(f_1 f_2')^2 \\ N_1=\frac{(0,-f_1 f_2',1)}{W} \\ L_{11} = \frac{1}{W_1} (f_1'' f_2'), L_{12} = \frac{1}{W_1} (f_1' f_2''), L_{22} = \frac{1}{W_1} (f_1 f_2'') \end{cases} \quad (6.1.4)$$

şeklinde elde edilir, burada $f_i' = \frac{df_i}{du_i}$, $f_i'' = \frac{d^2 f_i}{du_i^2}$, $i \in \{1,2\}$ ve $W_1 = \sqrt{|1 + (f_1 f_2')^2|}$ dir. M^2 yüzeyinin Gauss eğriliği (2.4.5) ifadesinden

$$K = \frac{1}{W^4} [(f_1'' f_2'') f_1 f_2 - (f_1' f_2')^2] \quad (6.1.5)$$

şeklinde hesaplanır.

Burada M^2 yüzeyinin sıfır Gauss eğriliğine sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda doğrudan f_1 ya da f_2 nin (a) durumunu veren sabit fonksiyon olduğu görülür. f_1 ve f_2 sabit olmayan fonksiyonlar ise (6.1.5) ifadesine göre

$$(f_1'' f_2'') f_1 f_2 - (f_1' f_2')^2 = 0 \quad (6.1.6)$$

elde edilir. f_i'' , $i \in \{1,2\}$ sıfır olamayacağı için (6.1.6) denklemi

$$\frac{f_1'' f_1}{(f_1')^2} - \frac{(f_2')^2}{f_2'' f_2} = 0 \quad (6.1.7)$$

olarak yazılabilir. Böylece (6.1.7) denklemi aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar:

$$\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = \alpha_i, i \in \{1,2\}, \quad (6.1.8)$$

burada, $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1$ dir. (6.1.8) denklemi aşağıdaki Bernoulli adi diferansiyel denkleminde indirgenebilir:

$$f_i' - \beta_i f_i^{\alpha_i} = 0, \beta_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{1,2\}, \quad (6.1.9)$$

burada, $\alpha_i = 1$, $i \in \{1,2\}$ için, (6.1.9) adi diferansiyel denklemi çözülürse (b) durumunu sağlayan

$$f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{1, 2\}$$

fonksiyonu elde edilir.

$\alpha_i \neq 1, i \in \{1, 2\}$ olduğu göz önüne alınırsa (6.1.9) adi diferansiyel denkleminin çözümünden (c) durumunu veren

$$f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i)\xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$$

ifadesi elde edilir, burada $i \in \{1, 2\}$ için $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1, \xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dir.

M^2 , ikinci tip factorable yüzey olsun. Bu durumda M^2 yüzeyinin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları (2.4.1) ve (2.4.4) ifadelerinden

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = 1, g_2 = 0 \\ h_{11} = (f_1' f_3')^2, h_{12} = (f_1 f_3) f_1' f_3', h_{22} = 1 + (f_1 f_3')^2 \\ N = \frac{(0, -1, f_1 f_3')}{W} \\ L_{11} = \frac{1}{W} (-f_1'' f_3'), L_{12} = \frac{1}{W} (-f_1' f_3''), L_{22} = \frac{1}{W} (-f_1 f_3'') \end{array} \right. \quad (6.1.10)$$

olarak elde edilir ve burada $W_2 = \sqrt{|1 + (f_1 f_3')^2|}$ şeklindedir. Dolayısıyla da M^2 yüzeyinin Gauss eğriliği (2.4.5) göz önüne alınırsa

$$K = \frac{1}{W^4} [(f_1'' f_3'') f_1 f_3 - (f_1' f_3')^2] \quad (6.1.11)$$

şeklinde bulunur.

M^2 yüzeyinin sıfır Gauss eğriliğine sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda f_1 ya da f_3 ün sabit bir fonksiyon olduğu sonucu kolayca elde edilir ki bu ise (a) durumunun ispatını verir. Eğer f_1 ve f_3 ün sabit bir fonksiyon olmadığı kabul edilirse, bu durum

$$(f_1'' f_3'') f_1 f_3 - (f_1' f_3')^2 = 0 \quad (6.1.12)$$

olmasını gerektirir. $f_i'', i \in \{1, 3\}$ fonksiyonları sıfır olamayacağı için (6.1.11) denklemini

$$\frac{f_1'' f_1}{(f_1')^2} - \frac{(f_3')^2}{f_3'' f_3} = 0 \quad (6.1.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemden

$$\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = \alpha_i, i \in \{1,2\} \quad (6.1.14)$$

yazılabilir, burada $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1$ dir. (6.1.13) denkleminde

$$f_i' - \beta_i f_i^{\alpha_i} = 0, \beta_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{1,3\} \quad (6.1.15)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir ki burada $\alpha_i = 1, i \in \{1,3\}$ için, bu adi diferansiyel denkleminin çözümü ile (b) ifadesini sağlayan

$$f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{1,3\}$$

fonksiyonu bulunur.

Eğer $\alpha_i \neq 1, i \in \{1,3\}$ ise bu durumda da (6.1.15) adi diferansiyel denkleminin çözümü ile (c) durumunu veren

$$f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i) \xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$$

fonksiyonu elde edilir, burada $i \in \{1,3\}$ için $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1, \xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dir.

M^2 yüzeyinin üçüncü tip factorable yüzey olması durumunda ise, M^2 yüzeyinin birinci ve ikinci tip factorable yüzey olması durumlarında yapılan ispata benzer şekilde (a)-(c) durumları elde edilir.

Tersine (a)-(c) durumlarındaki gibi verilen tüm factorable yüzeylerin sıfır Gauss eğriliğine sahip olduğu temel hesaplamalar ile elde edilir.

6.2. G_3 Galilean Uzayında Minimal Factorable Yüzeyler

Son olarak bu bölümde G_3 Galilean uzayında minimal factorable yüzeyler için genel bir sınıflandırma verildi.

Teorem 6.2.1. M^2 , G_3 Galilean uzayında bir factorable yüzey olsun. M^2 yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

- (a) M^2 birinci tip yüzey olduğunda f_2 lineer bir fonksiyondur.
- (b) M^2 ikinci tip yüzey olduğunda f_3 lineer bir fonksiyondur.
- (c) M^2 üçüncü tip yüzey olduğunda aşağıdaki üç durumdan biri geçerlidir:
 - (c.i) f_2 ve f_3 den en az biri sabit bir fonksiyondur
 - (c.ii) $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ dir, burada $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{2, 3\}$ dür.
 - (c.iii) $f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i)\xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$ dir, burada $\alpha_i \neq 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_2 + \alpha_3 = 2$ $\xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{2, 3\}$ dür.

İspat. M^2 , Galilean uzayında birinci tip bir factorable yüzey olsun yani (6.1.1) ifadesi ile parametrize edilmiş olsun. M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği (6.1.4) ifadesi göz önüne alınırsa

$$H = \frac{1}{2W^3} [f_1 f_2''] \quad (6.2.1)$$

şeklinde elde edilir. (6.2.1) denkleminde göre M^2 nin minimal factorable yüzey olması için gerek ve yeter şart f_2 nin lineer bir fonksiyon olmasıdır.

Şimdi M^2 yüzeyinin ikinci tip bir factorable yüzey olduğunu kabul edelim. Bu durumda M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği (2.4.5) ifadesinden

$$H = -\frac{1}{2W^3} [f_1 f_3''] \quad (6.2.2)$$

olarak elde edilir. (6.2.2) ifadesine göre, M^2 nin minimal factorable yüzey olması için gerek ve yeter şart f_3 ün lineer bir fonksiyon olmasıdır.

Şimdi M^2 yüzeyinin üçüncü tip bir factorable yüzey oluşunu gözönüne alalım. Bu durumda M^2 yüzeyinin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} g_1 = f_2' f_3, & g_2 = f_2 f_3', & h_{11} = 1, h_{22} = -1, \\ N = \frac{(0, -f_2' f_3, -f_2 f_3')}{W} \\ L_{11} = \frac{1}{W} (f_2'' f_3), & L_{12} = \frac{1}{W} (f_2' f_3'), & L_{22} = \frac{1}{W} (f_2 f_3'') \end{cases} \quad (6.2.3)$$

olarak elde edilir. Burada $W = \sqrt{|f_2' f_3 + f_2 f_3'|}$ dir. (6.2.3) göz önüne alınırsa M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2W^3} [(f_2 f_3')^2 f_2'' f_3 - 2(f_2' f_3')^2 (f_2 f_3) + (f_2' f_3)^2 f_2 f_3''] = 0$$

şeklinde bulunur. f_2 ve f_3 fonksiyonlarından biri sabit bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitlik sağlanır. Bu ise (c.i) durumunun ispatını verir. Aksi halde

$$\frac{f_2'' f_2}{(f_2')^2} + \frac{f_3'' f_3}{(f_3')^2} = 2 \quad (6.2.4)$$

sonucu elde edilir. İspatın geri kalan kısmı için iki durum söz konusudur.

Durum 1. $i \in \{2,3\}$ için $\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = 1$ olsun.

Bu durumda $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, $i \in \{2,3\}$ için $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ olduğu elde edilir ki bu da (c.ii) durumunun ispatını tamamlar.

Durum 2. $i \in \{2,3\}$ için $\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} \neq 1$ olsun. (6.2.4) eşitliğinden,

$$\frac{f_i'' f_i}{(f_i')^2} = \alpha_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \neq 1, i \in \{2,3\} \quad (6.2.5)$$

ifadesini elde ederiz ki buradan $\alpha_2 + \alpha_3 = 2$ dir. (6.2.5) adi diferensiyel denklemi çözülürse

$$f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i) \xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$$

olduğu elde edilir, burada $\xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{2,3\}$ dır. Bu da (c.iii) durumunun ispatını tamamlar.

Teorem 6.2.2. 3- boyutlu Galilean uzayı G_3 de $\frac{K}{H} = \text{sabit} \neq 0$ oranını sağlayan birinci ve ikinci tip bir factorable yüzey yoktur.

İspat. f_1 in bir lineer fonksiyon olması özel durumunda $K/H = \text{sabit} \neq 0$ oranına sahip birinci ve ikinci tür factorable yüzeyleri analiz edebiliriz. Bu nedenle, M^2 yüzeyi birinci tip bir factorable yüzey olsun. $f_1(u_1) = \alpha_1 u_1 + \beta_1$ alarak Teorem (6.2.1) den dolayı f_2 lineer fonksiyon olamaz. O halde (6.1.5) ve (6.2.1) ifadelerinden M^2 yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğinin oranı

$$\frac{K}{H} = \frac{1}{2W} \frac{\alpha_1^2 (f_2')^2}{(\alpha_1 u_1 + \beta_1) f_2''}$$

şeklindedir. Kabul edelim ki $\frac{K}{H} = \lambda = \text{sabit}$ olsun. O halde

$$\frac{1}{2W} \frac{\alpha_1^2 (f_2')^2}{(\alpha_1 u_1 + \beta_1) f_2''} = \lambda \quad (6.2.6)$$

elde edilir. (6.2.6) ifadesinin u_1 e göre kısmi türevi alınırsa

$$(\alpha_1 u_1 + \beta_1)^2 (f_2')^2 = \frac{1}{2} \quad (6.2.7)$$

bulunur. (6.2.7) ifadesinin tekrar u_1 e göre kısmi türevi alınırsa

$$\alpha_1 (\alpha_1 u_1 + \beta_1) (f_2')^2 = 0$$

elde edilir ki bu durum mümkün değildir. Bu ise G_3 Galilean uzayında $\frac{K}{H} = \text{sabit} \neq 0$ oranını sağlayan birinci tip bir factorable yüzeyin olmadığını verir.

M^2 yüzeyi ikinci tip bir factorable yüzey olsun. Teorem (6.2.1) den dolayı f_3 lineer fonksiyon olamaz. O halde (6.1.11) ve (6.2.2) ifadelerinden M^2 yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğinin oranı

$$\frac{K}{H} = -\frac{1}{2W} \frac{\alpha_1^2 (f_3')^2}{(\alpha_1 u_1 + \beta_1) f_3''}$$

olarak hesaplanır. Burada kabul edelim ki $\frac{K}{H} = \lambda = \text{sabit}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2W} \frac{\alpha_1^2 (f_3')^2}{(\alpha_1 u_1 + \beta_1) f_3''} = \lambda \quad (6.2.7)$$

elde edilir. (6.2.7) ifadesinin u_1 e göre kısmi türevi alınır

$$(\alpha_1 u_1 + \beta_1)^2 (f_3')^2 = \frac{1}{2} \quad (6.2.8)$$

bulunur. (6.2.8) ifadesinin tekrar u_1 e göre kısmi türevi alınarak

$$\alpha_1 (\alpha_1 u_1 + \beta_1) (f_3')^2 = 0$$

bulunur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla G_3 Galilean uzayında $\frac{K}{H} = \text{sabit} \neq 0$ oranını sağlayan ikinci tip bir factorable yüzeyin olmadığını söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2.
- [2] Sabuncuoğlu, A., 2001, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.
- [3] O'Neil , B., 1983, Semi Riemannian Geometry, Academic Press Newyork.
- [4] Graves, L.K., 1979, Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces, Tranactions of the Ame. Math. Soc., V. 252.
- [5] Kamışima, Y., 1993, Completeness of Lorentz Manifolds of Constant Curvature Admitting Killing Vector Fields. J. Differential Geometry, 37 , pp 569-601.
- [6] Ergin, A. A., Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1989.
- [7] Bektaş, M., n-boyutlu Lorentz Uzayı L^n de Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğrilikler, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 1995.
- [8] Ergüt, M., Aydın, A.P. and Bildik, N. The Geometry of The Canonical Relative System and One-Parameter Motions In 2-Dimensional Lorentzian Space The Journal of Fırat Univ., 3(1), pp 113-122.
- [9] Ekmekçi, N., Lorentz Manifoldları üzerinde eğilim çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1991.
- [10] Magid, M.A., 1991, Timelike Surfaces In Lorentz 3-Space With Prescribed Mean Curvature and Gauss Map, Hokkaido Mathematical Journal V.19 pp 447-464.
- [11] Divjak, B., 1998, Curves in Pseudo Galilean Geometry, Anneles Univ. Sci. Budapest, 41, 117-128.
- [12] Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., 2003, Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo Galilean Spaces, Acta Math. Hungar., 98(3), 203-215.

- [13] Sipus Z. M., and Divjak B., Surfaces of constant curvature in the pseudo -Galilean space, Int. J. Math. Sci. 2012, Art ID375264, 28pp.
- [14] Kamenarović, I., 1991, Existence Theorems for Ruled Surfaces in The Galilean Spaces G_3 , Rad HAZU. Mat. 456, 10, 183-196.
- [15] Bekkar, M. and Senoussi, B., Factorable surfaces in the three-dimensional Euclidean and Lorentzian spaces satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, J. Geom. 103 (2012), 17-29.
- [16] Yu, Y. and Liu, H., The factorable minimal surfaces, Proceedings of The Eleventh International Workshop on Diff. Geom. 11 (2007), 33-39.
- [17] Meng, H. and Liu, H., Factorable surfaces in Minkowski space, Bull. Korean Math. Soc. 46(1) (2009), 155-169.
- [18] Aydın, M. E., Öğrenmiş, A. O. and Ergüt, M., Classification of Factorable Surfaces in the Pseudo-Galilean Space, Glasnik Matematički, 50(70) 2015, 429-439.
- [19] Yoon, D.W., Surfaces of revolution in the three dimensional pseudo-Galilean space, Glas. Mat. Ser. III 48(2) (2013), 415-428.
- [20] Divjak, B. and Sipus, Z. M., Some special surfaces in the pseudo Galilan-space, Acta Math. Hungar. 118 (2008), 209-226.
- [21] Divjak, B. and Sipus, Z. M., Minding isometries of ruled surfaces in pseudo-Galilan space, J. Geom. 77 (2003), 35-47.
- [22] Dede, M., Tubular surfaces in Galilean space, Math. Commun. 18(1) (2013), 209-217.
- [23] Karacan, M. K. and Tuncer, Y., Tubular surfaces of Weingarten types in Galilean and Pseudo-Galilean, Bull. Math. Anal. Appl. 5(2) (2013), 87-100.
- [24] Öğrenmiş, A.O., Ergüt, M. and Bektaş, M., On the helices in the Galilean Space $\mathbb{G}^3$, Iranian Journal of Science & Technology A 31(A2) (2007), 177 181.
- [25] Öğrenmiş, A. O. and Ergüt, M., On the Gauss map of ruled surfaces of type II in 3-dimensional pseudo-Galilean space, Bol. Soc. Para. Mat. 31(1) (2013).
- [26] Sipus, Z. M., Ruled Weingarten Surface in the Galilean Space, Period. Math. Hungar. 56 (2008), 213-225.

- [27] Sipus, Z. M. and Divjak, B., Translation surfaces in the Galilean Space, Glas. Mat. Ser. III 46(2) (2011), 455-469.
- [28] Yoon, D. W., Surfaces of revolution in the three dimensional pseudo-Galilean space, Glas. Mat. Ser.III 48(2) (2013), 415-428.



ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Elazığ'ın Maden ilçesinde doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2014 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2016 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım. Halen de aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

Ayla ERDUR