

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ

Muhammed TALO

Tez Yöneticisi
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül GÖKHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE BAZI YAKINSAKLIK TÜRRLERİ

Muhammed TALO

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/
oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ayşegül GÖKHAN

Üye : Prof. Dr. Mikail ET

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam; Yrd. Doç. Dr. Ayşegül GÖKHAN'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Muhammed TALO

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER LİSTESİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
GİRİŞ	1
1. GENEL KAVRAMLAR	2
1.1. Temel Tanımlar	2
1.2. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	4
1.3. Çift İndisli Dizilerde Yakınsaklık	6
2. REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE NOKTASAL, DÜZGÜN VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	9
2.1. Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık	9
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık	12
2.3. İstatistiksel Cauchy Dizisi	19
3. REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE KUVVETLİ CESÀRO YAKINSAKLIK VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	22
3.1. Kuvvetli Çift Cesàro Yakınsaklık	22
3.2. Çift Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	25
KAYNAKLAR	28

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$h.h.k$	:	hemen hemen her k
$h.h.(j, k)$	:	hemen hemen her (j, k)
θ	:	Lacunary dizisi
$\xrightarrow{s}$	:	İstatistiksel yakınsaklık
$\xrightarrow{st_2}$	:	Çift istatistiksel yakınsaklık
$\delta(K)$	:	K cümlesinin yoğunluğu
$\delta_2(K)$	:	K cümlesinin çift yoğunluğu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE BAZI YAKINSAKLIK TÜRLEİ

Muhammed TALO

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 28

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Reel Değerli Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinde Noktasal, Düzgün ve İstatistiksel Yakınsaklık verildi.

Üçüncü bölümde; Reel Değerli Çift İndisli Fonksiyon Dizilerinde Kuvvetli Cesàro yakınsaklık ve Lacunary İstatistiksel yakınsaklık verildi.

Anahtar Kelimeler: Çift indisli dizi, Çift indisli fonksiyon dizileri, Çift doğal yoğunluk, Noktasal istatistiksel yakınsaklık, Kuvvetli Cesàro yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME CONVERGENCE TYPES IN DOUBLE SEQUENCES OF REAL-VALUED FUNCTIONS

Muhammed TALO

Firat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

2007, Page: 28

In the first chapter of this thesis that consists of three chapters, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters.

In the second chapter; Pointwise, uniform and statistical convergence for double sequences of real-valued functions are given.

In the third chapter; Strongly Cesàro convergence and Lacunary statistical convergence of double sequences of real-valued functions are given.

Key Words: Double sequence, Functional double sequence, Double natural density, Pointwise statistical convergence, Strongly Cesàro convergence, Lacunary statistical convergence.

GİRİŞ

Reel değerli tek indisli fonksiyon dizilerinde tanımlanan yakınsaklık türleri Analizde çok çalışılan bir konudur. Bu yakınsaklık türlerinden en iyi bilinenler noktasal yakınsaklık ve düzgün yakınsaklıktır. Fakat Analizde çok iyi bilinen bu yakınsaklık türleri; örneğin, $x \in \mathbb{R} - [-1, 1], k=1,2,\dots$ olmak üzere

$$f_k(x) = \begin{cases} (-x)^k, & k \in [3^p, 3^p + p), p = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer haller} \end{cases}$$

gibi noktasal olarak yakınsamayan fonksiyon dizilerinin yakınsaklığını başka tür yakınsaklık modelleri ile karakterize etmek gerekir. Bunun için noktasal yakınsaklıktan daha zayıf olan yakınsaklık türlerine ihtiyaç vardır. Bunlar; istatistiksel yakınsaklık, lacunary yakınsaklık gibi yakınsaklık türleridir. İstatistiksel yakınsaklık ilk kez Fast [4] tarafından verildi. Daha sonra bu yakınsaklık tipi başka araştırmacılar tarafından da çalışılmıştır. Reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklık, A.Gökhan ve M. Güngör [11] tarafından tanımlandı. İstatistiksel yakınsaklık, çift indisli dizilerde Mursaleen ve H. H. Osama Edely [8] tarafından ve daha sonra noktasal istatistiksel yakınsaklık ve düzgün istatistiksel yakınsaklık, reel değerli çift indisli fonksiyon dizilerinde A. Gökhan, M. Güngör ve M. Et [11] tarafından çalışıldı. Çift indisli fonksiyon dizilerinde Lacunary istatistiksel yakınsaklık ise M. Crnjac, F. Čunjaló, H.I.Miller [15] ve daha sonrada Richard. F. Patterson ve Ekrem Savaş [14] tarafından incelenmiştir.

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ 'da A üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların cümlesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \rightarrow F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi veya değişken terimli dizi denir [1].

Tanım 1.1.2. (f_n) dizisinin A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\forall n > n_0$ olduğunda;

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ sayısının olmasıdır [1].

Tanım 1.1.3. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [2].

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 1.1.4. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k 'lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” biçiminde gösterilir [3].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 1.1.5. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir [3].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre;

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için;

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.

Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 1, & k \neq m^2, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x_k = L_1$, $S - \lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 1.1.6. Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım, $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [3].

Teorem 1.1.7. $S - \lim x_k = a$, $S - \lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu takdirde;

- i) $S - \lim cx_k = ca$ dır,
- ii) $S - \lim (x_k + y_k) = a + b$ dir [4].

Teorem 1.1.8. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [3].

1.2. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 1.2.1. $\theta = (k_r)$, pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir. $\theta = (k_r)$ dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir.

Lacunary dizilerinde,

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır [5].

Tanım 1.2.2. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir [4]. Kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi N_θ ile gösterilir. Burada,

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

dır. Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Fridy ve Orhan [6] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ise bu $S_\theta - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ biçiminde gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_θ ile gösterilirse,

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

dır.

1.3. Çift İndisli Dizilerde Yakınsaklık

Tanım 1.3.1. $x = (x_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer $j \rightarrow \infty$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $x_{jk} \rightarrow L$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$ dizisine Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Bu durumda,

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} x_{jk} = L$$

olarak yazarız. Bir çift indisli dizinin yakınsaklığından Pringsheim anlamındaki yakınsaklığı kastederiz [7].

Açıkça $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi Pringsheim anlamında yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki bütün $j, k \geq n_0$ için,

$$|x_{jk} - L| < \varepsilon$$

dur. L limitine çift limit veya x 'in Pringsheim limiti denir [7].

Tanım 1.3.2. $x = (x_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}}$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $p, q, j, k \geq n_0$ olduğunda,

$$|x_{pq} - x_{jk}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisine Cauchy dizisi denir [7].

Teorem 1.3.3. Kompleks terimli (x_{jk}) çift indisli dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır [7].

Tanım 1.3.4. $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\left(\frac{|A(n,m)|}{nm}\right)$ çift indisli dizisi Pringsheim anlamında bir limite sahip ise, A kümesinin bir çift doğal yoğunluğa sahip olduğunu söyleriz ve

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{|A(n,m)|}{nm} = \delta_2(A),$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $A(n, m) = \{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : (j, k) \in A\}$ ve $|A(n, m)|$, $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını gösterir [8].

Ayrıca

$$\delta_2(A^c) = \delta_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N} - A) = 1 - \delta_2(A)$$

olduğu açıktır. Aşikârdır ki $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tüm sonlu alt kümeleri sıfır çift doğal yoğunluğa sahiptir. Bununla birlikte bazı sonsuz alt kümeleri de sıfır yoğunlukludur.

Örnek 1.3.5.

$$A = \{(j, k) : j \in [3^p, 3^p + p) \text{ ve } k \in [3^q, 3^q + q), \quad p, q = 1, 2, \dots\}$$

kümesi sıfır çift doğal yoğunluğa sahiptir.

Burada özellikle sıfır çift doğal yoğunluğa sahip $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 'nin bir alt kümesi ile ilgileneceğiz.

Tanım 1.3.6. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi sıfır yoğunluklu cümle hariç diğer bütün (j, k) lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_{jk}) dizisi hemen hemen her (j, k) için P özelliğini sağlıyor denir ve "h.h.(j, k)" şeklinde gösterilir [8].

Tanım 1.3.7. $x = (x_{jk})$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.(j, k) için;

$$|x_{jk} - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu durumda $st_2 - \lim_{j, k \rightarrow \infty} x_{jk} = L$ şeklinde yazılır [8].

Tanım 1.3.8. $x = (x_{jk})$ bir çift indisli dizi olsun. Eğer;

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = L$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına Cesàro toplanabilir denir [9].

Tanım 1.3.9. $x = (x_{jk})$ bir çift indisli dizi ve p de bir pozitif reel sayı olsun. Eğer,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - L|^p = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir [8].

İstatistiksel yakınsaklık, kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığı gerektirir fakat bunun tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunun tersinin doğru olmadığını gösterir:

Örnek 1.3.10. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi;

$$x_{jk} = \begin{cases} k, & j = 1 \text{ her } k \text{ için} \\ j, & k = 1 \text{ her } j \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada,

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} x_{jk} = 0$$

fakat

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \frac{1}{2} (m^2 + n^2 + m + n - 2)$$

ifadesi sonlu bir limite sahip değildir. Bu yüzden x Cesàro yakınsak değildir. Üstelik kuvvetli p -Cesàro yakınsak da değildir. Fakat,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{m + n - 1}{nm} = 0$$

dır. Yani x , 0 'a istatistiksel yakınsaktır [8].

2. REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE NOKTASAL, DÜZGÜN VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde terimleri reel değerli olan $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizileri ile çalışacağız. Elemanları fonksiyonlar olan çift indisli diziler, tek indisli reel değerli fonksiyon dizilerine benzer şekilde tanımlanır.

Tek indisli dizilerde noktasal istatistiksel yakınsaklık kavramı, A. Gökhan ve M. Güngör [10] tarafından verildi.

2.1. Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık

Tanım 2.1.1. $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir çift indisli dizisi ve $S \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in S$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $j, k > N$ olduğunda,

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(x, \varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa, $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f 'ye noktasal yakınsaktır denir. Sembolik olarak $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ veya $f_{jk} \rightarrow f$ şeklinde gösterilir.

f fonksiyonuna, $\{f_{jk}\}$ dizisinin çift limit fonksiyonu veya Pringsheim limit fonksiyonu denir. Bu durumda $\{f_{jk}\}$ dizisinin S kümesi üzerinde f 'ye noktasal yakınsak olduğunu söyleriz [11].

Teorem 2.1.2. $\{f_{jk}\}$, S kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. S kümesi üzerindeki Pringsheim limit;

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

ise, her $j, k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kesin artan fonksiyonlar olmak üzere S kümesi üzerinde,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_{j(r),k(r)}(x) = f(x)$$

tir [11].

İspat: Her $j, k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kesin artan fonksiyonlar ve $\lim_{r \rightarrow \infty} f_{j(r),k(r)}(x) = f(x)$ fakat $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) \neq f(x)$ olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ ve $N \in \mathbb{N}$ için $j, k > N$ olduğunda,

$$|f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad (2.1.1)$$

dur. Bu durumda $N = 1$ için (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan $j(1)$ ve $k(1)$ sayılarını bulabiliriz yani,

$$|f_{j(1),k(1)}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $j(1), k(1)$ sayıları vardır. $N_2 = \max \{j(1), k(1)\} + 1$ alalım. Böylece,

$$|f_{j(2),k(2)}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $j(2)$ ve $k(2)$ sayılarını bulabiliriz. Bu şekilde devam edilirse,

$$|f_{j(r),k(r)}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $j(r), k(r)$ sayıları bulabiliriz ki bu ise kabulumız ile çelişir. Yani,

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.3. $\{f_{jk}\}$, bir S kümesi üzerinde f 'ye düzgün yakınsak fonksiyonların bir dizisi ise, her $\varepsilon > 0$ için bir $N(= N(\varepsilon))$ sayısı vardır öyle ki $j, k > N$ ve S kümesi üzerindeki bütün x 'ler için,

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dur. S kümesi üzerindeki düzgünlük $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ veya $f_{jk} \rightarrow f$ şeklinde gösterilir [11].

Aşağıdaki teorem herhangi bir $\{f_{jk}\}$ dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığı hakkında bilgi verecektir:

Teorem 2.1.4. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar f ve f_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, \dots$) olsun. Bu taktirde;

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

I üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $c_{jk} = \max_{x \in I} |f_{jk}(x) - f(x)|$

olmak üzere;

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} c_{jk} = 0$$

olmasıdır [11].

İspat: Kabul edelim ki I üzerinde,

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

düzgün yakınsaktır. Her $j, k \in \mathbb{N}$ için $|f_{jk}(x) - f(x)|$, I üzerinde sürekli olduğundan en az bir $x_{jk} \in I$ noktasında mutlak maksimum değere sahiptir. Yani,

$$c_{11} = |f_{11}(x_{11}) - f(x_{11})|, \quad c_{21} = |f_{21}(x_{21}) - f(x_{21})|, \dots$$

olacak şekilde $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}, \dots, x_{21}, \dots, x_{jk}, \dots \in I$ mevcuttur. Böylece,

$$c_{jk} = |f_{jk}(x_{jk}) - f(x_{jk})|, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

yazabiliriz. Düzgün yakınsaklığın tanımından her $\varepsilon > 0$ ve bütün $j, k > N(\varepsilon)$ için;

$$|f_{jk}(x_{jk}) - f(x_{jk})| < \varepsilon$$

dur.

Dolayısıyla,

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} c_{jk} = 0$$

dır.

Açıkça S kümesi üzerindeki aynı f limitine sahip düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklığı gerektirir. Aşağıdaki örnek bunun tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 2.1.5.

$$f_{jk}(x) = \frac{j^2 k^2 x}{1 + j^3 k^3 x^2}, \quad x \in (0, 1)$$

$\{f_{jk}\}$, $f = 0$ 'a noktasal yakınsaktır. Fakat $(0, 1)$ aralığında düzgün yakınsak değildir. Çünkü;

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} c_{jk} = \lim_{j,k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{jk}}{2}$$

yakınsak değildir [11].

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast [4] tarafından verildi. Aynı zamanda birbirinden bağımsız olarak Buck [12] ve Shoenberg [13] tarafından reel ve kompleks terimli diziler için verildi. İstatistiksel yakınsaklık kavramını Mursaleen ve Edely [8] başta olmak üzere birçok kişi tarafından çalıştı.

Tanım 2.2.1. Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f 'ye noktasal istatistiksel yakınsaktır denir [11].

Yani, her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.(j, k)$ için;

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dur. Bu durumda S kümesi üzerinde $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ veya $f_{jk} \xrightarrow{st_2} f$ yazarız. f fonksiyonuna, $\{f_{jk}\}$ fonksiyon dizisinin çift istatistiksel limiti veya Pringsheim istatistiksel limiti denir. Açık ki S kümesi üzerinde $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ ise $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ tir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 2.2.2. $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ olmak üzere;

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} (-x)^{jk}, & j \in [3^p, 3^p + p) \text{ ve } k \in [3^q, 3^q + q) , \ p, q = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her bir (sabit) $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, $j, k = 1, 2, \dots$ için;

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - 0| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \frac{pq(p+1)(q+1)}{4 \cdot 3^{p+q}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$st_2 - \lim f_{jk}(x) = 0$$

dır. Fakat $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x)$ mevcut değildir [11].

Teorem 2.2.3. $\{f_{jk}\}$ ve $\{g_{jk}\}$, S kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların iki çift indisli dizisi olsun. Eğer S kümesi üzerinde $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ ve $st_2 - \lim g_{jk}(x) = g(x)$ ise $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$st_2 - \lim(\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

tir [11].

İspat: Her bir $x \in S$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

$$\begin{aligned} & \lim_{j,k \rightarrow \infty} |\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \\ &= \lim_{j,k \rightarrow \infty} |\alpha(f_{jk}(x) - f(x)) + \beta(g_{jk}(x) - g(x))| \\ &\leq \lim_{j,k \rightarrow \infty} |\alpha| |f_{jk}(x) - f(x)| + \lim_{j,k \rightarrow \infty} |\beta| |g_{jk}(x) - g(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak;

$$st_2 - \lim(\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

tir.

Teorem 2.2.4. S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ fonksiyonların bir çift indisli dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$K_x = \{(j, k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

alt kümesi vardır öyle ki $\delta_2(K_x) = 1$ ve $\lim_{\substack{j,k \rightarrow \infty \\ (j,k) \in K_x}} f_{jk}(x) = f(x)$ tir [11].

İspat: S kümesi üzerinde $st_2 - \lim f_{jk}(x) = f(x)$ olsun. Her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$K_{r,x} = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{r}\}$$

ve

$$M_{r,x} = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{jk}(x) - f(x)| < \frac{1}{r}\} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

olsun. Buradan $\delta_2(K_{r,x}) = 0$ dır. Bununla birlikte,

$$M_{1,x} \supset M_{2,x} \supset \dots \supset M_{i,x} \supset M_{i+1,x} \supset \dots \quad (2.2.1)$$

ve

$$\delta_2(M_{r,x}) = 1, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

olsun.

Şimdi S kümesi üzerinde $(j, k) \in M_{r,x}$ için $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisinin $f(x)$ 'e yakınsadığını göstermeliyiz.

Kabul edelim ki S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi $f(x)$ 'e yakınsamasın. Bu taktirde bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki, sonsuz sayıdaki terimler ve en az bir $x \in S$ 'ler için;

$$|f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

dur.

$$M_{\varepsilon,x} = \{(j, k) : |f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

olsun. $\varepsilon > \frac{1}{r}$ ($r = 1, 2, \dots$) için,

$$\delta_2(M_{\varepsilon,x}) = 0$$

ve (2.2.1) den $M_{r,x} \subset M_{\varepsilon,x}$ dir. Böylece $\delta_2(M_{r,x}) = 0$ olur ki bu da (2.2.2) ile çelişir. Dolayısıyla S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi $f(x)$ 'e yakınsaktır.

Tersine, kabul edelim ki her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$K_x = \{(j, k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

alt kümesi vardır öyle ki $\delta_2(K_x) = 1$ ve $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ tir. Yani bir $N(x, \varepsilon)$ vardır öyle ki her bir (sabit) $x \in S$ ve $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N$ iken,

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dur. Şimdi her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$K_{\varepsilon,x} = \{(j, k) : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(j_{N+1}, k_{N+1}), (j_{N+2}, k_{N+2}), \dots\}$$

dir.

Bu yüzden,

$$\delta_2(K_{\varepsilon,x}) \leq 1 - 1 = 0$$

dır.

Sonuç olarak S kümesi üzerinde, $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi, $f(x)$ 'e noktasal istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 2.2.5. Eğer S kümesi üzerinde $st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ ise bir $\{g_{jk}\}$ dizisi vardır öyle ki her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} g_{jk}(x) = f(x) \text{ ve } \delta_2\{(j,k) : f_{jk}(x) = g_{jk}(x)\} = 1$$

dir. Yani her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.(j,k)$ için;

$$f_{jk}(x) = g_{jk}(x)$$

tir [11].

Tanım 2.2.6. Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S$ için;

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j,k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f 'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır denir [11].

Yani her $x \in S$ ve $h.h.(j,k)$ için;

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.2.3}$$

dur. Bu durumda S kümesi üzerindeki düzgün yakınsaklık,

$$st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x) \text{ veya } f_{jk} \xrightarrow{st_2} f$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.3 'ten düzgün istatistiksel yakınsaklığın tanımı şu şekilde verilebilir:

“ S kümesi üzerinde $f_{jk} \xrightarrow{st_2} f$ 'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, her $x \in S$ için, $\exists K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\delta_2(K) = 1$ ve $\exists(n_0, m_0) \in K$ vardır $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $m_0 = m_0(\varepsilon)$, öyle ki $\forall j > n_0$, $k > m_0$ ve $(j, k) \in K$ için $|f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur.”

Teorem 2.2.7. f ve f_{jk} , $j, k = 1, 2, \dots$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar olsun. I üzerinde $st_2 - \lim_{j, k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ 'e düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_{jk} = \max_{x \in I} |f_{jk}(x) - f(x)| \text{ olmak üzere } st_2 - \lim_{j, k \rightarrow \infty} c_{jk} = 0 \text{ olmasıdır [11].}$$

İspat: İspat teorem 2.2.7 ve Teorem 2.2.4 'e benzer şekilde yapılır. Açık olarak tüm sonlu (j, k) 'lar için (2.2.3) eşitsizliği gerçekleşir. S kümesi üzerindeki düzgün yakınsaklık,

$$\lim_{j, k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

S kümesi üzerindeki istatistiksel yakınsaklığı,

$$st_2 - \lim_{j, k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$$

gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 2.2.8.

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } j = p^2 \text{ ve } k = q^2, \ p, q = 1, 2, \dots \\ (x - \frac{1}{jk})^2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $x \in [-1, 1]$, $j, k = 1, 2, \dots$ olmak üzere $\{f_{jk}\}$, $f(x) = x^2$ 'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır. Çünkü;

$$st_2 - \lim_{j, k \rightarrow \infty} c_{jk} = 0$$

dır [11].

Burada,

$$c_{jk} = \max_{x \in [-1,1]} |f_{jk}(x) - x^2| = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } j = p^2 \text{ ve } k = q^2, \quad p, q = 1, 2, \dots \\ \frac{2}{jk} + \frac{1}{j^2 k^2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Fakat $[-1, 1]$ aralığında $\{f_{jk}\}$ düzgün yakınsak değildir. Çünkü $\lim_{j,k \rightarrow \infty} c_{jk}$ mevcut değildir.

Üstelik S kümesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaklık, aynı f limitine noktasal istatistiksel yakınsaklığı gerektirir. Fakat tersi doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir:

Örnek 2.2.9.

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} 1, & j \in [3^p, 3^p + p), \quad p = 1, 2, \dots, k \in \mathbb{N} \\ \frac{k^2 x}{1 + k^3 x^2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $x \in (0, 1)$, $j, k = 1, 2, \dots$ olmak üzere $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi, $f(x) = 0$ 'a noktasal istatistiksel yakınsaktır. Fakat $\{f_{jk}\}$, teorem 2.2.7 'e göre düzgün istatistiksel yakınsak değildir.

Çünkü,

$$c_{jk} = \max_{x \in (0,1)} |f_{jk}(x) - 0| = \begin{cases} 1, & j \in [3^p, 3^p + p), \quad p = 1, 2, \dots, k \in \mathbb{N} \\ \frac{\sqrt{k}}{2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} c_{jk}$ mevcut değildir [11].

Aşağıdaki sonuçla çalıştığımız yakınsaklık modelleri ile iyi bilinen yakınsaklık modelleri arasındaki ilişki verilebilir:

Sonuç 2.2.10. S kümesi üzerinde,

$$i) \quad \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x) \text{ 'e düzgün yakınsak} \Rightarrow \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x) \\ \Rightarrow st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x) \text{ tir.}$$

ii) $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ düzgün yakınsak $\Rightarrow st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$
düzgün istatistiksel yakınsak $\Rightarrow st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ tir [11].

2.3. İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu bölümde reel değerli çift indisli fonksiyon dizileri için istatistiksel Cauchy dizisini tanımlayıp, istatistiksel olarak benzer bir yapı ortaya koyacağız.

Tanım 2.3.1. Bir S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ bir çift indisli fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $N(= N(\varepsilon))$ ve $M(= M(\varepsilon))$ sayıları mevcut öyle ki $h.h.(j, k)$ ve her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$|f_{jk}(x) - f_{NM}(x)| < \varepsilon$$

ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir. Yani, her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f_{NM}(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır [11].

Teorem 2.3.2. S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ bir çift indisli fonksiyon dizisi olsun. $\{f_{jk}\}$, noktasal istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{f_{jk}\}$, istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [11].

İspat: Kabul edelim ki S kümesi üzerinde $st_2 - \lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $h.h.(j, k)$ için;

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$|f_{NM}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde N ve M sayıları seçilirse $h.h.(j, k)$ için;

$$|f_{jk}(x) - f_{NM}(x)| \leq |f_{jk}(x) - f(x)| + |f_{NM}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Sonuç olarak $\{f_{jk}\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tersine, $\{f_{jk}\}$ istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $h.h.(j, k)$ ve her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$I = [f_{NM}(x) - 1, f_{NM}(x) + 1]$$

olacak şekilde N ve M sayıları seçilirse I bandı $f_{jk}(x)$ 'i kapsar. Her bir (sabit) $x \in S$ için K ve L sayıları seçebiliriz öyle ki;

$$I' = [f_{KL}(x) - \frac{1}{2}, f_{KL}(x) + \frac{1}{2}]$$

bandı $h.h.(j, k)$ için $f_{jk}(x)$ 'i kapsar. Her bir (sabit) $x \in S$ için $I_1 = I \cap I'$ şeklinde gösterirsek $h.h.(j, k)$ için I_1 , $f_{jk}(x)$ 'i kapsar. Her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$\begin{aligned} \{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I \cap I' \} &= \{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I \} \\ &\cup \{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I' \} \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} &\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I \cap I' \}| \\ &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I \}| \\ &+ \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I' \}| = 0 \end{aligned}$$

dır.

Bu yüzden her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.(j, k)$ için, 1 'e eşit veya 1 'den daha az yükseklikteki I_1 kapalı bandı $f_{jk}(x)$ 'i kapsar. Şimdi $N(2)$ ve $M(2)$ sayılarını seçebiliriz.

Öyle ki;

$$I'' = [f_{N(2),M(2)}(x) - \frac{1}{4}, f_{N(2),M(2)}(x) + \frac{1}{4}]$$

bandı $h.h.(j, k)$ için I'' , $f_{jk}(x)$ 'i kapsar, $I_2 = I_1 \cap I''$ olduğu göz önüne alınırsa $h.h.(j, k)$ için I_2 , $f_{jk}(x)$ 'i kapsar. Her bir (sabit) $x \in S$ için I_2 bandı $\frac{1}{2}$ 'ye eşit veya $\frac{1}{2}$ 'den daha küçük yüksekliğe sahiptir. Tümevarım yöntemi ile bu şekilde devam edersek $\{I_p\}_{p=1}^{\infty}$ bir kapalı bant dizisini inşa ederiz. Öyle ki her bir (sabit) p için, $I_p \supseteq I_{p+1}$ dir. Burada I_p nin yüksekliği 2^{1-p} den daha büyük değildir. Her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.(j, k)$ için $f_{jk}(x) \in I_p$ dir. Böylece S kümesi üzerinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu vardır öyle ki;

$$\{f(x)\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} I_p$$

dir. Şimdi S kümesi üzerinde $\{f_{jk}\}$ dizisinin $f(x)$ 'e istatistiksel yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ olarak verilsin, bir q sayısı vardır öyle ki $\varepsilon > 2^{1-q}$ dur. Yukarıdaki yapıdan dolayı her bir (sabit) $x \in S$ ve $h.h.(j, k)$ için $f_{jk}(x) \in I_q$ dur. Her bir (sabit) $x \in S$ için;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : |f_{jk}(x) - f(x)| \geq \varepsilon \}| \\ & \leq \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n \text{ ve } k \leq m : f_{jk}(x) \notin I_q\}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.3.2 'den çift indisli diziler için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.3.3. $\{f_{jk}\}$, S kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. S kümesi üzerinde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) $\{f_{jk}\}$, $f(x)$ 'e noktasal istatistiksel yakınsaktır.
- ii) $\{f_{jk}\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.
- iii) $\{f_{jk}\}$ dizisinin bir $\{g_{jk}\}$ alt dizisi vardır öyle ki $\lim_{j,k \rightarrow \infty} g_{jk}(x) = f(x)$ tir [11].

3. REEL DEĞERLİ ÇİFT İNDİSLİ FONKSİYON DİZİLERİNDE KUVVETLİ CESÀRO YAKINSAKLIK VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde reel değerli çift indisli fonksiyon dizileri için kuvvetli çift Cesàro yakınsaklığı tanımlayacağız. Ayrıca reel değerli çift indisli fonksiyon dizileri için çift lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını vereceğiz.

3.1. Kuvvetli Çift Cesàro Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 $\{f_{jk}\}$, her bir $j, k \in \mathbb{N}$ için f_{jk} fonksiyonları bir $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her bir $x \in S$ için;

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |f_{jk}(x) - f(x)| = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f 'ye S üzerinde kuvvetli çift Cesàro yakınsaktır denir.

Örnek 3.1.2. $f_{jk}(x) = \frac{x}{2^{j+k}}$, $x \in R$ olarak tanımlanan $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi $S = \mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna kuvvetli çift Cesàro yakınsaktır. Gerçekten de;

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \left| \frac{x}{2^{j+k}} \right| &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \left(\begin{aligned} &\frac{|x|}{2^{1+1}} + \frac{|x|}{2^{1+2}} + \dots + \frac{|x|}{2^{1+m}} \\ &+ \frac{|x|}{2^{2+1}} + \frac{|x|}{2^{2+2}} + \dots + \frac{|x|}{2^{2+m}} \\ &\quad \dots + \\ &+ \frac{|x|}{2^{n+1}} + \frac{|x|}{2^{n+2}} + \dots + \frac{|x|}{2^{n+m}} \end{aligned} \right) \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \frac{|x|}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) \\ &\quad + \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \frac{|x|}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \frac{|x|}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \frac{|x|}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) \\
&= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \frac{|x|}{2^2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^m}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\
&= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{|x|}{nm} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.1.3. Eğer S üzerinde tanımlı sınırlı bir $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f 'ye Pringsheim anlamında yakınsak ise $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi f 'ye kuvvetli çift Cesàro yakınsaktır.

İspat: S üzerinde $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x) = f(x)$ olsun. Bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in S$ için $\exists n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $j > n_0$ ve $k > m_0$ için;

$$|f_{jk}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Ayrıca $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisi S üzerinde sınırlı olduğundan her bir $j, k \in \mathbb{N}$ için ve her bir $x \in S$ için $|f_{jk}(x)| < K(x)$ olacak şekilde bir $K(x) \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |f_{jk}(x) - f(x)| \\
&= \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{m_0} |f_{jk}(x) - f(x)| + \frac{1}{nm} \sum_{j=n_0+1}^n \sum_{k=m_0+1}^m |f_{jk}(x) - f(x)| \\
&\quad + \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{k=m_0+1}^m |f_{jk}(x) - f(x)| + \frac{1}{nm} \sum_{j=n_0+1}^n \sum_{k=1}^{m_0} |f_{jk}(x) - f(x)| \\
&< \frac{n_0 m_0 [K(x) + |f(x)|]}{nm} + \frac{(n - n_0)(m - m_0)}{nm} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&\quad + \frac{(m - m_0)n_0 [K(x) + |f(x)|]}{nm} + \frac{(n - n_0)m_0 [K(x) + |f(x)|]}{nm} \\
&< \frac{3m_0 n_0 [K(x) + |f(x)|]}{nm} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Her bir $x \in S$ için $K(x) + |f(x)|$ belli bir sayı olduğundan öyle n_0, m_0 sayıları bulabiliriz ki;

$$\frac{K(x) + |f(x)|}{nm} < \frac{\varepsilon}{6m_0n_0}$$

kalır. O zaman her bir $x \in S$ için $m > m_0$ ve $n > n_0$ kaldığında,

$$\frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |f_{jk}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

kalır ki bu da $\{f_{jk}\}$ çift indisli dizisinin f 'ye kuvvetli çift Cesàro toplanabilir olduğunu gösterir.

Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani $\{f_{jk}\}$ çift indisli fonksiyon dizisi f 'ye S üzerinde kuvvetli çift Cesàro yakınsak olması $\{f_{jk}\}$, çift indisli fonksiyon dizisinin f 'ye S üzerinde yakınsak olmasını gerektirmez. Bunu aşağıdaki örnek ile gösterelim.

Örnek 3.1.4.

$$f_{jk}(x) = \begin{cases} x, & n, m = 1, 2, \dots, \quad i \text{ çift olmak üzere} \quad j = 10^n + i \quad k = 10^m + i \\ -x, & n, m = 1, 2, \dots, \quad i \text{ tek olmak üzere} \quad j = 10^n + i \quad k = 10^m + i \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. Bu çift indisli fonksiyon dizisi için $\lim_{j,k \rightarrow \infty} f_{jk}(x)$ mevcut değildir. Fakat bu dizi $x \in \mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = 0$ 'a kuvvetli çift Cesàro yakınsaktır.

Teorem 3.1.5. $\{f_{jk}\}$ ve $\{g_{jk}\}$, S kümesi üzerinde tanımlı sırasıyla f ve g fonksiyonlarına kuvvetli çift Cesàro yakınsak fonksiyon dizileri olsunlar. Bu taktirde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x))$ dizisi de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 'e kuvvetli çift Cesàro yakınsaktır.

İspat: Her bir $x \in S$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

$$\begin{aligned}
& \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \\
&= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |\alpha(f_{jk}(x) - f(x)) + \beta(g_{jk}(x) - g(x))| \\
&\leq |\alpha| \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |f_{jk}(x) - f(x)| + |\beta| \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |g_{jk}(x) - g(x)| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Böylece $(\alpha f_{jk}(x) + \beta g_{jk}(x))$ dizisinin $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 'e kuvvetli çift Cesàro yakınsak olduğu gösterilir.

3.2. Çift Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. $\theta = \{(k, r)\}$ çift indisli dizi olsun. Bununla birlikte,

$$k_0 = 0 \text{ olmak üzere } r \rightarrow \infty \text{ iken } h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$$

ve

$$\ell_0 = 0 \text{ olmak üzere } s \rightarrow \infty \text{ iken } \bar{h}_s = \ell_s - \ell_{s-1} \rightarrow \infty$$

olacak şekilde tamsayıların iki artan dizisi var ise $\theta = \{(k, r)\}$ çift indisli dizisine çift lacunary dizisi denir. θ tarafından belirtilen aralıklar,

$$I_r = \{(k) : k_{r-1} < k \leq k_r\}$$

$$I_s = \{(\ell) : \ell_{s-1} < \ell \leq \ell_s\}$$

$$I_{r,s} = \{(k, \ell) : k_{r-1} < k \leq k_r \text{ ve } \ell_{s-1} < \ell \leq \ell_s\}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}, \quad \bar{q}_s = \frac{\ell_s}{\ell_{s-1}} \text{ ve } q_{r,s} = q_r \bar{q}_s$$

dir. Bütün çift lacunary dizilerinin kümesi " $N_{\theta_{r,s}}$ " ile gösterilir [14].

Tanım 3.2.2. $\theta = \{k_r\}$ pozitif tamsayıların artan bir lacunary dizisi olsun. Öyle ki;

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$$

dir. Bütün r 'ler için;

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i, j < k_1\} \\ I_2 &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i, j < k_2\} \setminus I_1, \\ &\vdots \\ I_r &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i, j < k_r\} \setminus (I_{r-1} \cup I_{r-2} \cup \dots \cup I_1) \end{aligned}$$

olmak üzere $S = \{s_{ij}\}$ dizisi L 'ye çift lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Öyle ki her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_r|} |\{(i, j) \in I_r : |s_{ij} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır. Bu durumda $s_{ij} \rightarrow L(S_\theta)$ yazılır [15].

Teorem 3.2.3. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere $S = \{s_{ij}\}$ dizisi $s_{ij} \rightarrow L(S_\theta)$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dir öyle ki;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|A \cap I_r|}{|I_r|} = 0$$

ve

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } (i, j) \notin A \text{ ise} \\ 0, & \text{Eğer } (i, j) \in A \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $S(x)$, L 'ye düzgün yakınsak olmasıdır [15].

İspat: Kabul edelim ki $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|A \cap I_r|}{|I_r|} = 0$ ve

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } (i, j) \notin A \text{ ise} \\ 0, & \text{Eğer } (i, j) \in A \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $S(x)$, L 'ye düzgün yakınsaktır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $i, j \geq N_\varepsilon$ ve $(i, j) \notin A$ ise $|s_{ij} - L| < \varepsilon$ dur. Eğer $r > N_\varepsilon$ ise,

$$\frac{1}{|I_r|} |\{(i, j) \in I_r : |s_{ij} - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{|A \cap I_r|}{|I_r|} + \frac{|\{(i, j) \in I_r : i < N_\varepsilon\}| + |\{(i, j) \in I_r : j < N_\varepsilon\}|}{|I_r|}$$

eşitsizliği yeteri kadar büyük bir r sayısından küçüktür. Bu yüzden $s_{ij} \rightarrow L(S_\theta)$ dir.

Tersine, kabul edelim ki $s_{ij} \rightarrow L(S_\theta)$ dir. Bu durumda pozitif tamsayıların tam olarak artan bir $\{r_n\}$ dizisi vardır öyle ki $\forall r \geq r_n$ için;

$$\frac{1}{|I_r|} \left| \left\{ (i, j) \in I_r : |s_{ij} - L| \geq \frac{1}{n} \right\} \right| > \frac{1}{n} \quad (3.2.1)$$

dir.

$$A := \cup_{n=1}^{\infty} \left\{ (i, j) \in \cup_{k=r_n}^{r_{n+1}-1} I_k : |s_{ij} - L| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

olsun. (3.2.1) 'den

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|A \cap I_r|}{|I_r|} = 0$$

dir. Üstelik;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } (i, j) \notin A \text{ ise} \\ 0, & \text{Eğer } (i, j) \in A \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $S(x)$, L 'ye düzgün yakınsaktır.

KAYNAKLAR

1. Balcı, M., 1996, Analiz, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*.
2. Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, *John Wiley & Sons*, New York.
3. Fridy, J.A., 1985, On the Statistical Convergence, *Analysis*, 5, 301-313.
4. Fast, H., 1951, Sur la Convergence Statistique, *Colloq. Math.*, 2, 241-244.
5. Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978, Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37 (3), 508-520.
6. Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993, Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math.*, 160 (1), 43-51.
7. A. Pringsheim, 1900, Zur Theorie der Zweifach Unendlichen Zahlenfolgen, *Math. Ann.*, 53, 289-321.
8. Mursaleen, Osama H.H.Edely, 2003, Statistical Convergence of Double Sequences, *J. Math. Appl.* 288, 223-231.
9. F.Moricz, 1994, Tauberian Theorems for Cesàro Summable Double Sequences, *Studia Math.* 110, 83-96
10. A. Gökhan, M. Güngör, 2002, On Pointwise Convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.* 33 (9), 1379-1384.
11. A. Gökhan, M. Güngör, M. Et, 2007, Statistical Convergence of Double Sequences of Real-Valued Functions, *International Mathematical Forum*, 2, no. 8, 365-374.
12. R.C. Buck, 1953, Generalized Asymptotic Density, *Amer. J. Math.* 75 335-346.
13. I.J. Schoenberg, 1959, The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *Amer. Math. Monthly*, 66, 361-375.
14. Richard. F. Patterson ve Ekrem Savaş, 2005, Lacunary Statistical Convergence of Double Sequences, *Mathematical Communications* 10, 55-61.
15. M. Crnjac, F. Čunjalo, H.I.Miller, 2004, Subsequence Characterizations of Statistical Convergence of Double Sequences, *Radovi Matematicke* Vol. 12, 163-175.

ÖZGEÇMİŞ

1983 Elazığ doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 2001 yılında kazandığım İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 2005'te mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladım.

Muhammed TALO