

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PÜRÜZSÜZ VE PÜRÜZLÜ DÜZLEM LEVHA ÜZERİNDE YER
ÇEKİMİ ETKİSİYLE AKIŞKAN FİLMİ HAREKETİNİN
İNCELENMESİ**

Hüseyin ÇAMUR

**DOKTORA TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

96349

ELAZIĞ

2000

TC.YT.
DOK.

96349
96349

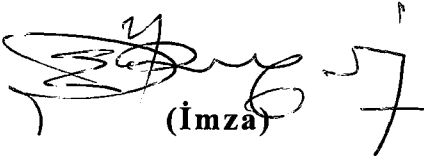
T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PÜRÜZSÜZ VE PÜRÜZLÜ DÜZLEM LEVHA ÜZERİNDE YER
ÇEKİMİ ETKİSİYLE AKIŞKAN FİLMİ HAREKETİNİN
İNCELENMESİ**

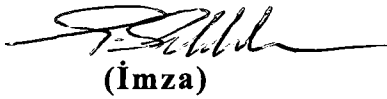
HÜSEYİN ÇAMUR

**DOKTORA TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

Bu tez, 17/11/2020. Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile Başarılı / ~~Başarısız~~ Olarak
Değerlendirilmiştir.


(İmza)

Danışman


(İmza)


(İmza)

Prof. Dr. Ömer E.PEREMECİ Prof. Dr. Kazım PIHTILI Yrd.Doç.Dr.Ahmet BİLGİL

ÖZET

Doktora Tezi

**PÜRÜZSÜZ VE PÜRÜZLÜ DÜZLEM LEVHA ÜZERİNDE YER ÇEKİMİ
ETKİSİYLE AKIŞKAN FİLMİ HAREKETİNİN İNCELENMESİ**

Hüseyin ÇAMUR

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Müh. Anabilim Dalı

2000, Sayfa : 142

Eğimli düzlem üzerinde yerçekimi kuvveti sayesinde ince bir akışkan tabakasının hareketi ve kavite içerisindeki akım gelişmesi incelenmiştir. İki boyutlu zamana bağlı laminar, sıkışamaz eğimli düzlem üzerinde serbest yüzeyli akım için fiziksel problem, matematiksel model olarak tanımlanmakta ve bu model Navier- Stokes, süreklilik, kinematik ve dinamik sınır şartı denklemleri ile belirlenmiştir. Hareket ve süreklilik denklemleri sonlu hacimler yöntemi (SHY) ile ve kartezyen koordinat sisteminde çözülmüştür. Serbest yüzeyli akım zamana bağlı laminar, izotermal iki boyutlu sıkışamaz akım olarak kabul edilmektedir. Bu akıma etki eden boyutsuz kontrol parametreleri Reynolds, Froude ve Weber sayılarıdır. İzotermal olmayan akımlar için Rayleigh ve Prandtl sayıları enerji denkleminde ek boyutsuz parametreler olarak gözönünde bulundurulması gerekmektedir. Kavite probleminde ise yalnız Reynolds sayısı önem taşımaktadır.

Serbest yüzeyli akım hareketinin incelenmesinde uygulanan SMAC (Simplified Mark-and-Cell Method) yöntemin ana çekirdeğini oluşturan SIMPLE (Semi Implicit Pressure Link Equations) algoritması ayrıklaştırılmış denklemlerin çözümlenmesi için kullanılmaktadır.

Kullanılan sayısal yöntemin doğruluğunu test etmek için hız profili sonuçları farklı Reynolds sayıları için mevcut olan kavite problemi seçilmiştir (Ghia ve diğ., 1982). Yöntemden elde edilen sonuçlar literatürde verilen sonuçlarla iyi uyum sağlamaktadır.

*Çözümlerin kararlılığı, grid sayıları, tolerans ve problemin iyi vaz edilmesi de test edilmiştir.

İki boyutlu zamana bağlı sıkışamaz eğimli düzlem üzerinde yer çekimi kuvveti sayesinde akım hareketi değişik açılar için sayısal yöntemler sayesinde çözümlenmiştir. Bu yöntemle, kontrol parametrelerin akım hareketi üzerindeki etkileri incelenmiştir ve sonuç olarak hız ve film kalınlığı profilleri farklı α açıları, Reynolds ve Froude sayıları için elde edilmiştir.

Ayrıca, levha üzerine belirli mesafede yerleştirilen dikdörtgen elemanlarla örtülü (pürüzlü) eğimli düzlem üzerinde ince film tabakası halinde hareket eden akım karakterleri de incelenmiştir.

Bu çalışmada serbest yüzeyli akımın karakterlerinin, film kalınlığının ve hızın ölçülmesi için bir deney seti önerilmektedir.

ANAHTAR KELİMELE: Serbest yüzeyli akım, düşey akım, serbest düşey akım, yer çekimi akımı.

ABSTRACT

Ph.D Thesis

**THE INVESTIGATION OF FLUID FILM MOVEMENT DUE TO GRAVITY
ALONG AN INCLINED SMOOTH AND ROUGH PLATES**

Hüseyin ÇAMUR

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mechanical Engineering

2000, Page: 142

A thin layer of a fluid flow along an inclined flat plate under the gravitational forces is investigated. Also the flow developments in a rectangular cavity is considered.

For the physical problems of the free surface flow along an inclined plate the mathematical model consisting of Navier-Stokes, the continuity as well as the kinematic and dynamic boundary conditions is developed. Momentum and the continuity equations are solved using the finite volume method (FVM) in a cartesian coordinate system. The controlling dimensionless parameters are identified through the normalization. The flow is assumed to be two-dimensional, unsteady, laminar, incompressible and isothermal. The parameters that control this flow are Reynolds, Froude and Weber numbers. If the flow is not isothermal Rayleigh and Prandtl numbers occurring in the energy equation should also be considered as additional dimensionless parameters, whereas for the flow in a cavity Reynolds number is the only controlling parameter.

The discretized equations are solved using SIMPLE (Semi Implicit Pressure Link Equations) algorithm which is the base of the SMAC (Simplified Mark-and-Cell) method applied for the investigation of this flow characteristics.

In order to test the accuracy of the numerical method used the cavity problem is selected for which the numerical results concerning velocity distribution profiles for

different Reynolds numbers are given (Ghia., et. al. 1982). It can be observed that the results of the present method used are in good agreement with those given in the literature.

The determination of the solution method used is tested by three different aspects, namely the mesh sizes, tolerance and being a well-posed problem.

The characteristics of two-dimensional, incompressible, laminar and unsteady free surface flow of a fluid film moving downwards over an inclined plate due to gravity for different inclined angles, Reynolds and Froude numbers are investigated and as a result the velocity profiles and film thicknesses are obtained.

The flow characteristics of the inclined plate for a thin layer film with the surface roughness like a rectangular element attached on the plate surface with fixed distances is also investigated.

Also, in this study a set-up for determination of the free surface flow characteristics, film thickness and velocity measurements, is proposed.

KEY WORDS: Free surface flow, vertical flow, free falling flow, gravitational flow.

TEŞEKKÜR

Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti'nde başlatmış olduğum doktora çalışmam tez aşamasında iken Fırat Üniversitesi'nde devam edebilmem için teveccüh gösterip kabul eden ve tüm sorumluluğu üstlenen ve çalışmalarım boyunca her türlü yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ö. Erkin PEREMECİ' ye sonsuz teşekkürlerimi iletmeyi bir borç bilirim. Ayrıca mensubu bulunduğum Lefke Avrupa Üniversitesi'nde doktora tezime başladığım günden itibaren maddi ve manevi yönden beni destekleyen Vakıf Yönetim Kurulunun ayrı ayrı tüm üyelerine ve Lefke Avrupa Üniversitesi Rektörü Sayın hocam Prof. Dr. Mesut AYAN'a özellikle beni teşvik ve yönlendirmesinden dolayı sonsuz minnet ve saygılarımı ifade etmeyi bir borç bilirim.

Hüseyin ÇAMUR

Makina Yüksek Mühendisi

ÖZET
ABSTRACT

TEŞEKKÜR
İÇİNDEKİLER
ŞEKİLLER LİSTESİ
TABLolar LİSTESİ
SİMGELER LİSTESİ
KISALTMALAR LİSTESİ

Sayfa

1.	GİRİŞ	1
1.1.	Serbest Yüzeyli Akımların Tanımı	2
1.2.	Serbest Yüzeyli Akımların Kullanım Alanları	3
1.3.	Serbest Yüzeyli Akımın Analizi	4
1.3.1.	Fiziksel İnceleme	4
1.3.2.	Matematiksel Model	4
1.3.3.	Sınır Şartları	5
1.3.3.1.	Kinematik Sınır Şartı	6
1.3.3.2.	Dinamik Sınır Şartı	11
1.4.	Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması	16
1.4.1.	Navier – Stokes Denklemleri	16
1.4.2.	Sınır Şartları	18
1.4.3.	Boyutsuz Parametreler	18
1.4.3.1.	Reynolds Sayısı	18
1.4.3.2.	Froude Sayısı	19
1.4.3.3.	Weber Sayısı	19
2.	SAYISAL YÖNTEMİN OLUŞTURULMASI	20
2.1.	Ayrıklaştırılmış Denklemlerin Sonlu Hacimler Yöntemi ile Çıkarılması	21
2.1.1.	Daimi Bir Boyutlu Akım Denklemi	23

2.1.1.1. Merkezi Farklar Yöntemi	24
2.1.1.2. Upwind Farklar Yöntemi	26
2.1.1.3. Karma Farklar Yöntemi	29
2.1.1.4. Üs-Kurallı Farklar Yöntemi	30
2.1.1.5. Yöntemlerin Özeti	31
2.1.2. Daimi İki Boyutlu Akım Denklemi	33
2.1.3. Zamana Bağlı İki Boyutlu Akım Denklemi	37
 3. İKİ BOYUTLU AKIM ALANININ HESAPLANMASINDA BASINÇ-HIZ BAĞINTISI VE YÖNTEME ETKİLERİ	 40
3.1. Zamandan Bağımsız İki Boyutlu Akım Alanının Hesaplanması	 41
3.1.1. Basınç Gradyanı Denklemleri	41
3.1.2. Hareket Denklemleri	43
3.1.3. SIMPLE Algoritması	48
3.2. Zamana Bağlı İki Boyutlu Akım Alanının Hesaplanması	56
3.2.1. Hareket Denklemleri	56
3.2.2. SIMPLE Algoritması	57
 4. YÖNTEMİN DENENMESİ	 59
4.1. Kavite Problemi	60
4.2. Girdaplılık ve Akım Fonksiyonu	66
4.2.1. Girdaplılık Transport Denklemi ve Akım Fonksiyonun Türetilmesi	 66
4.2.2. Girdaplılık Transport Denklemi ve Akım Fonksiyonun Ayrıklaştırılması	 67
4.2.3. Kavite Probleminde Girdaplılık ve Akım Çizgilerinin Hesaplanması	69
 5. PÜRÜZSÜZ VE PÜRÜZLÜ EĞİMLİ LEVHA DÜZLEM ÜZERİNDE AKIŞKAN HAREKETİNİN İNCELENMESİ	 75
5.1. Hız Bileşenlerinin Hesaplanması	79

5.2.	Film Kalınlığının Hesaplanması	79
5.3.	Dikdörtgen Elemanlarla Örtülü (Pürüzlü) Levhanın Film Kalınlığına Etkisi	79
5.4.	Çözümün Kararlılığı	99
5.5.	Sonuçların Değerlendirilmesi	102
6.	EĞİMLİ LEVHA ÜZERİNDE AKIŞKAN KARAKTERİNİN DENEYSEL OLARAK BELİRLENMESİ İÇİN DENEY ÖNERİSİ	106
6.1.	Deney Setinin Sistem Blok Şeması	106
6.2.	Film Kalınlığının Ölçülmesi	108
6.3.	Hızın Ölçülmesi	108

KAYNAKLAR

EKLER

- Ek1. Pürüzsüz, Düşey Bir Levha Üzerinde Serbest Yüzeyli Akımın Hız Profiline Analitik Olarak Hesaplanması
- Ek2. Karma Farklar Yöntemi
- Ek3. Üs – Kurallı Farklar Yöntemi
- Ek4. Üç – Köşegenel Matris Yöntemi (Çoleski Yöntemi)
- Ek5. Elde Edilen Çözümlerin Listesi
- Ek6. Programlar

ŞEKİLLER LİSTESİ**Sayfa**

Şekil 1.1.1.	Serbest yüzeyli akışkan, geometri ve koordinat sistemi.....	3
Şekil 1.3.3.1.1.	Serbest yüzeyli akışkan ve hız potansiyel bileşenleri	6
Şekil 1.3.3.1.2.	Zamana bağlı konteyner içerisinde serbest yüzeyli akım.....	7
Şekil 1.3.3.1.3.	Serbest yüzeyde tanımlanan iki koordinat sistemi arasındaki ilişki	10
Şekil 1.3.3.2.1.	Serbest yüzeye etki eden basınçlar	12
Şekil 1.3.3.2.2.	Serbest yüzey ve potansiyel fonksiyonun düşey yönde zamana göre değişimi	13
Şekil 2.1.1.1.	Bir boyutlu akım problemi için grid noktaları	23
Şekil 2.1.1.2.1.	Upwind yöntemine göre pozitif yöndeki akım	27
Şekil 2.1.1.2.2.	Upwind yöntemine göre negatif yöndeki akım	27
Şekil 2.1.2.1.	İki boyutlu akım için kontrol hacmi	34
Şekil 3.1.1.1.	Tüm değişkenler için tanımlanan kontrol hacimleri	42
Şekil 3.1.2.1.	u-hız bileşenleri için kontrol hacmi	44
Şekil 3.1.2.2.	w-hız bileşenleri için kontrol hacmi	47
Şekil 3.1.3.1.	Zamandan bağımsız laminer sıkışamaz iki boyutlu akım için SIMPLE akış şeması	55
Şekil 3.2.2.1.	Zamana bağlı laminer sıkışamaz iki boyutlu akım için SIMPLE akış şeması	58
Şekil 4.1.1.	Kavite, geometri ve grid sayıları	60
Şekil 4.1.2.	Re=100 ve atalet kuvvetleri sıfır için u*-hız bileşeni profili	62
Şekil 4.1.3.	Re=400 ve atalet kuvvetleri sıfır için u*-hız bileşeni profili	62
Şekil 4.1.4.	Re=1000 ve atalet kuvvetleri sıfır için u*-hız bileşeni profili	62
Şekil 4.1.5.	Re=3200 ve atalet kuvvetleri sıfır için u*-hız bileşeni profili	62
Şekil 4.1.6.	Re=100 için u*-hız bileşeni profili	63
Şekil 4.1.7.	Re=400 için u*-hız bileşeni profili	63
Şekil 4.1.8.	Re=1000 için u*-hız bileşeni profili	63
Şekil 4.1.9.	Re=3200 için u*-hız bileşeni profili	63
Şekil 4.1.10.	Re=5000 için u*-hız bileşeni profili	64
Şekil 4.1.11.	Re=100 ve farklı yöntemler için u*-hız bileşeni profili	64

Şekil 4.1.12.	Re=1000 ve farklı yöntemler için u^* -hız bileşeni profili	64
Şekil 4.1.13.	Re=3200 ve farklı yöntemler için u^* -hız bileşeni profili	64
Şekil 4.1.14.	Farklı Re sayıları için w^* -hız bileşeni profili	65
Şekil 4.1.15.	Farklı Re sayıları için basınç dağılımı	65
Şekil 4.2.3.1.	Girdaphlık - akım çizgilerini hesaplamak için akım şeması	71
Şekil 4.2.3.2.	Re=100 için u^* -hız bileşeni profili	72
Şekil 4.2.3.3.	Re=400 için u^* -hız bileşeni profili	72
Şekil 4.2.3.4.	Re=1000 için u^* -hız bileşeni profili	72
Şekil 4.2.3.5.	Re=3200 için u^* -hız bileşeni profili	72
Şekil 4.2.3.6.	Re=100 için kavite içerisindeki akım çizgileri	73
Şekil 4.2.3.7.	Re=400 için kavite içerisindeki akım çizgileri	73
Şekil 4.2.3.8.	Re=1000 için kavite içerisindeki akım çizgileri	74
Şekil 4.2.3.9.	Re=3200 için kavite içerisindeki akım çizgileri	74
Şekil 5.1.	SMAC yöntemi akım şeması	76
Şekil 5.2.	Olası w -hız bileşeni durumları	78
Şekil 5.3.1.	Dikdörtgen Elemanlarla Örtülü (Pürüzlü) Levha	79
Şekil 5.1.1.	Re=5, Fr=0.91287 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	81
Şekil 5.1.2.	Re=5, Fr=0.91287 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u -hız bileşeni profili	81
Şekil 5.1.3.	Re=5, Fr=1.08559 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	81
Şekil 5.1.4.	Re=5, Fr=1.08559 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u -hız bileşeni profili	81
Şekil 5.1.5.	Re=5, Fr=1.20140 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	82
Şekil 5.1.6.	Re=5, Fr=1.20140 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u -hız bileşeni profili	82
Şekil 5.1.7.	Re=5, Fr=1.29099 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	82
Şekil 5.1.8.	Re=5, Fr=1.29099 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u -hız bileşeni profili	82

Şekil 5.1.9.	Re=9, Fr=1.22474 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	83
Şekil 5.1.10.	Re=9, Fr=1.22474 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	83
Şekil 5.1.11.	Re=9, Fr=1.45647 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	83
Şekil 5.1.12.	Re=9, Fr=1.45647 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	83
Şekil 5.1.13.	Re=9, Fr=1.61185 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	84
Şekil 5.1.14.	Re=9, Fr=1.61185 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	84
Şekil 5.1.15.	Re=9, Fr=1.73205 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	84
Şekil 5.1.16.	Re=9, Fr=1.73205 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	84
Şekil 5.1.17.	Re=10, Fr=1.29099 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	85
Şekil 5.1.18.	Re=10, Fr=1.29099 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	85
Şekil 5.1.19.	Re=10, Fr=1.53525 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	85
Şekil 5.1.20.	Re=10, Fr=1.53525 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	85
Şekil 5.1.21.	Re=10, Fr=1.69904 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	86
Şekil 5.1.22.	Re=10, Fr=1.69904 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	86
Şekil 5.1.23.	Re=10, Fr=1.82574 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	86
Şekil 5.1.24.	Re=10, Fr=1.82574 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde	

	farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	86
Şekil 5.1.25.	Re=15, Fr=1.58113 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	87
Şekil 5.1.26.	Re=15, Fr=1.58113 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	87
Şekil 5.1.27.	Re=15, Fr=1.88030 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	87
Şekil 5.1.28.	Re=15, Fr=1.88030 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	87
Şekil 5.1.29.	Re=15, Fr=2.08089 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	88
Şekil 5.1.30.	Re=15, Fr=2.08089 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	88
Şekil 5.1.31.	Re=15, Fr=2.23606 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	88
Şekil 5.1.32.	Re=15, Fr=2.23606 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	88
Şekil 5.1.33.	Re=20, Fr=1.82574 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	89
Şekil 5.1.34.	Re=20, Fr=1.82574 ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	89
Şekil 5.1.35.	Re=20, Fr=2.17118 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	89
Şekil 5.1.36.	Re=20, Fr=2.17118 ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	89
Şekil 5.1.37.	Re=20, Fr=2.40281 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	90
Şekil 5.1.38.	Re=20, Fr=2.40281 ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	90
Şekil 5.1.39.	Re=20, Fr=2.58198 ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	90

Şekil 5.1.40. $Re=20$, $Fr=2.58198$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	90
Şekil 5.1.41. $Re=25$, $Fr=2.04124$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	91
Şekil 5.1.42. $Re=25$, $Fr=2.04124$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	91
Şekil 5.1.43. $Re=25$, $Fr=2.42745$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	91
Şekil 5.1.44. $Re=25$, $Fr=2.42745$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	91
Şekil 5.1.45. $Re=25$, $Fr=2.68642$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	92
Şekil 5.1.46. $Re=25$, $Fr=2.68642$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	92
Şekil 5.1.47. $Re=25$, $Fr=2.88675$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* -hız bileşeni profili	92
Şekil 5.1.48. $Re=25$, $Fr=2.288675$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u-hız bileşeni profili	92
Şekil 5.2.1. $Re=5$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ...	93
Şekil 5.2.2. $Re=8$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ...	93
Şekil 5.2.3. $Re=9$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ...	93
Şekil 5.2.4. $Re=10$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ..	93
Şekil 5.2.5. $Re=11$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ..	94
Şekil 5.2.6. $Re=15$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ..	94
Şekil 5.2.7. $Re=20$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ..	94
Şekil 5.2.8. $Re=25$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı ..	94
Şekil 5.2.9. Ortalama $Re=5$ 'e göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	95
Şekil 5.2.10. Ortalama $Re=8$ 'e göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	95

Şekil 5.2.11. Ortalama $Re=9$ 'a göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	95
Şekil 5.2.12. Ortalama $Re=10$ 'a göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	95
Şekil 5.2.13. Ortalama $Re=11$ 'e göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	96
Şekil 5.2.14. Ortalama $Re=15$ 'e göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	96
Şekil 5.2.15. Ortalama $Re=20$ 'e göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim.....	96
Şekil 5.2.16. Ortalama $Re=25$ 'e göre farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim	96
Şekil 5.3.2. $Re=5$ ve $Fr=1.20140$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	97
Şekil 5.3.3. $Re=5$, $Fr=20140$ ve $K=2$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	97
Şekil 5.3.4. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $K=3$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	97
Şekil 5.3.5. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $K=4$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	97
Şekil 5.3.6. $Re=10$, $Fr=1.69904$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	98
Şekil 5.3.7. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $K=2$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	98
Şekil 5.3.8. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $K=3$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	98
Şekil 5.3.9. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $K=4$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı	98
Şekil 5.4.1. ϕ 'nin zamana göre değişimi	99
Şekil 5.4.2. Farklı grid sayıları için u^* -hız bileşeni profili ($Re=100$).....	101
Şekil 5.4.3. $Re=5$ ve farklı açılar için u -hız bileşeni profili.....	101
Şekil 5.4.4. $Re=5$ ve farklı açılar için η^* film kalınlığı.....	101
Şekil 6.1.1. Basitleştirilmiş şematik ölçü sistemi	106

TABLolar LİSTESİ**Sayfa**

Tablo 2.1.1.5.1. Farklar yöntemlerine göre komşu katsayıların tanımı.....	32
Tablo 2.1.2.1. $A(Pe)$ 'nin farklar yöntemlerine göre formülleri	37
Tablo 4.1.1. Kavite probleminde kullanılan sınır şartları	60
Tablo 4.2.2.1. Terim I, II ve III'ün tanımı	68
Tablo 4.2.3.1. Girdap-akım çizgileri için sınır şartları	69



SİMGELER LİSTESİ

Simgeler

A	: Kontrol hacmi alanı	[mm ²]
a_{nb}	: Kontrol hacmi etrafındaki komşu katsayılar	-
b	: Kaynak teriminin sabit kısmı	-
D	: Difüzyon iletkenliği	[kg/s]
e	: Güç	[V]
e	: P ile E arasındaki kontrol hacmi yüzü	-
E	: Pozitif x-yönündeki komşu ana grid noktası, (i.e., P' nin doğusunda)	-
F	: Akım şiddeti, konveksiyon şiddeti, akım debi	[kg/s]
g	: Yer çekimi ivmesi,	[m/s ²]
Fr	: Froude Sayısı	-
f	: Frekans	[1/s]
H	: Kavite yüksekliği	[m]
I_0	: Cam levha üzerindeki sıvıya intikal eden lazer ışınlarının gücü	- [L]
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	: x-, y-, z-yönünde birim vektörleri	-
J	: Akı	[kg.m/s ²]
K	: Dikdörtgen elemanın kalınlığı	-
L	: Kavite uzunluğu	[m]
M	: z-ekseni yönündeki toplam grid sayısı	-
n	: Normal doğrultuda birim vektör	-
n	: Dışa doğru yönelmiş akım hızı ve birim vektörü	-
n	: P ile N arasındaki kontrol hacmi yüzü	-
n	: İterasyon sayısı	-
N	: Pozitif z-yönündeki komşu ana grid noktası, (i.e., P' nin kuzeyinde)	-
N	: x-ekseni yönündeki toplam grid sayısı	-
P	: Basınç	[Pa]
P	: Kontrol hacmi merkez grid noktası	-

Pe	: Peclet sayısı	-
q	: Dışa doğru yönelmiş akım hızı ve birim vektörü	-
R	: Eğrilik yarıçapı	[mm]
Re	: Reynolds sayısı	-
s	: P ile S arasındaki kontrol hacmi yüzü	-
s	: Teğetsel doğrultuda birim vektör	-
S	: Kaynak terimi	
S	: Negatif z-yönündeki komşu ana grid noktası, (i.e., P' nin güneyinde)	-
S_c	: Lineer kaynak teriminin sabit kısmı	-
S_p	: Lineer kaynak terimindeki bağımlı değişkenin katsayısı	-
S_u	: x-ekseni doğrultusundaki kaynak terimi	-
S_w	: z-ekseni doğrultusundaki kaynak terimi	-
t	: Zaman	[s]
u, v, w	: Hız bileşenleri	[m/s]
$\vec{U}$	: Hız bileşeni	[m/s]
u_{nb}	: u-kontrol hacmi etrafındaki hızlar	[m/s]
u_o	: Referans hızı	[m/s]
w_{nb}	: w-kontrol hacmi etrafındaki hızlar	[m/s]
x, y, z	: Kartezyen koordinatları	-
w	: P ile W arasındaki kontrol hacmi yüzü	-
W	: Negatif x-yönündeki komşu ana grid noktası, (i.e., P' nin batısında)	-
We	: Weber sayısı	-
α	: Levha ile x-ekseni arasındaki açı	[°]
α	: Anderrelaksasyon katsayısı	-
α_o	: İncelen lazer ışınlarının katsayısı	-
$\delta_{u,x}$	: u-kontrol hacminde iki grid noktası arasındaki uzunluk	[mm]
$\delta_{w,z}$	: w-kontrol hacminde iki grid noktası arasındaki uzunluk	[mm]
ε	: Relatif hata	-
Δx	: u-kontrol hacminin uzunluğu	[mm]

Δz	: w-kontrol hacminin uzunluğu	[mm]
Δt	: zaman adımı	[s]
γ	: Serbest yüzeyin eğimi	[$^{\circ}$]
∇	: Nabla operatörü	-
η	: Serbest yüzey ile levha arasındaki film kalınlığı	[mm]
η_0	: Ortalama film kalınlığı	[mm]
λ	: Dalga uzunluğu	[mm]
μ	: Dinamik viskozite	[kg/m.s]
σ	: Yüzey gerilim katsayısı	[N/m]
ν	: Kinematik viskozite	[m ² /s]
ρ	: Yoğunluk	[kg/m ³]
ϕ	: Potansiyel fonksiyon	[m ² /s]
ϕ	: Genel diferansiyel denkleminde yer alan sözkonusu bağımlı değişken	-
ψ	: Akım çizgileri fonksiyonu	[m ² /s]
ω	: Girdap	[1/s]

Üst İndisler

*	: Boyutsuz
*	: Başlangıç değerleri
o	: Eski değerler
'	: Düzeltimi
n	: İterasyon sayısı
new	: Yeni değerler

Alt İndisler

p	: basınç hami
u	: u-kontrol hacmi
w	: w-kontrol hacmi
x	: x-yönündeki bileşen
y	: y-yönündeki bileşen
z	: z-yönündeki bileşen

KISALTMALAR LİSTESİ

AMP	: Amplifikatör
Mod	: Modölatör
Demod	: Demodölatör
ADÇ	: Analog Dijital Çevirici
PC	: Bilgisayar
FSM	: Foto Sensör Matris



1. GİRİŞ

Bu tezin konusu bazı serbest yüzeyli akımlar ve bunlarla ilgili temel matematiksel modellerdir. Burada ele alacağımız serbest yüzeyli akım, eğimli pürüzsüz ve pürüzlü bir düzlem üzerinde ince tabaka halinde akan akışkandan oluşmaktadır. Serbest yüzeyli akımları ve kullanma alanları tanımlanmış, matematiksel denklemler, Navier-Stokes denklemleri, genel olarak yazılıp sınıflandırılmıştır.

Navier-Stokes ve sınır şartı denklemlerinin eğimli düzlem üzerinde serbest yüzeyli akışlar için türetilmesi, boyutsuzlaştırılması ve bu denklemlerden elde edilen genel boyutsuz parametrelerin Reynolds ve Froude sayıları belirlenip etkileri incelenmiştir.

Elde edilen bu denklemler sayısal yöntemler sayesinde çözümleneceğinden dolayı ayrıklaştırılmıştır. Bu nedenle bazı ayrıklaştırma yöntemleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu yöntemlerden, bilimde en fazla kullanılan ve bu tip akım problemleri için ekzakt çözüme çok yakın sonuçlar veren sonlu hacimler yöntemi kullanılarak diferansiyel denklemler, süreklilik ve hareket denklemler, zamandan bağımsız ve zamana bağlı sıkışamaz laminar iki boyutlu akım için cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Hareket denklemleri basınç gradyanlarını içerdiklerinden ve SIMPLE (Semi Implicit Pressure Link Equations) algoritması basınç ve hız ilişkileri arasında bir bağıntı kurduğundan dolayı, türetilen bu cebirsel denklemlerin çözümü SIMPLE algoritması sayesinde neticelendirilmiştir. Cebirsel denklemler, bir denklemler sistemi oluşturduğu için bu denklemler üç-köşegenel matris (Coleski Yöntemi) ve Gauss-Seidel yöntemiyle ifade edilmiştir. Serbest yüzeyli akımlar için Gauss-Seidel yöntemi, kavite problemi için ise üç-köşegenel matris yöntemi kullanılmıştır. Sonuç olarak SIMPLE algoritmasını kullanarak kavite için hız bileşenleri ve basınç profilleri ve serbest yüzeyli akımlar için serbest yüzey üzerindeki akışkanın hareketini, hız bileşeni profilleri ve film kalınlığı, SMAC (simplified marker-and-cell method) yöntemi kullanarak incelenmiştir. Bu yöntemin özünü yine SIMPLE algoritması oluşturmaktadır. Bununla birlikte, eğimli düzlem üzerine yerleştirilmiş dikdörtgen elemanların film kalınlığına olan etkileri incelenmiştir ve girdap-akım çizgileri de kavite içerisinde hesaplanmıştır.

Bu çalışma altı ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür araştırması ve matematiksel modeli tanımlayan denklemlerin türetilmesi verilmiştir. İkinci bölümde

bir ve iki boyutlu akım için denklemler bazı farklar yöntemlerini kullanarak ayrıklaştırılmıştır. Üçüncü bölümde süreklilik ve komple Navier-Stokes denklemleri sonlu hacimler yöntemi ile ayrıklaştırılmıştır. Ayrıca üçüncü bölümde SIMPLE algoritması, denklemlerin bilgisayar çözümü yöntemi ve hesaplama yöntemi detaylı olarak açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ise yöntem kavite problemi için denenmiştir. Beşinci bölümde serbest yüzeyli akımların hareketi SMAC yöntemi sayesinde incelenmiş ve sayısal sonuçların tartışması yapılmıştır. Altıncı ve son bölümde serbest yüzeyli akım hareketinin incelenmesi için bir deney seti önerilmiştir.

1.1. Serbest Yüzeyli Akımların Tanımı

Serbest yüzeyli akımlar yer çekimi kuvveti sayesinde ve bir eğim doğrultusunda açık kanallarda oluşur. Serbest yüzeyli akımlar aynı zamanda “yer çekimi” akımları olarak da adlandırılırlar (Liggett, A.J., 1994).

Açık kanallardan, örneğin, nehirler, ırmaklar , yapay kanallar, tüneller ve tamamen sıvı ile dolu olmayan borular bu serbest yüzeyli akışlar kategorisine girmektedir, kısacası atmosferik basınç ile temas eden serbest yüzeyli akımları kapsamaktadır.

Eğimli düzlem üzerinde yer çekimi yönüne akan serbest yüzeyli akımın hızı yer çekimi kuvvetinin ve düzlemin eğim açısına bağlı olarak değişmektedir.

Bu fenomen Reynolds, Weber ve Froude sayıları ile temsil edilebilmektedir. Genel çalışılacak ortam izotermal kabul edildiğinde diğer boyutsuz parametrelerin, Rayleigh ve Prandtl sayılarının, etkisi sözkonusu değildir.

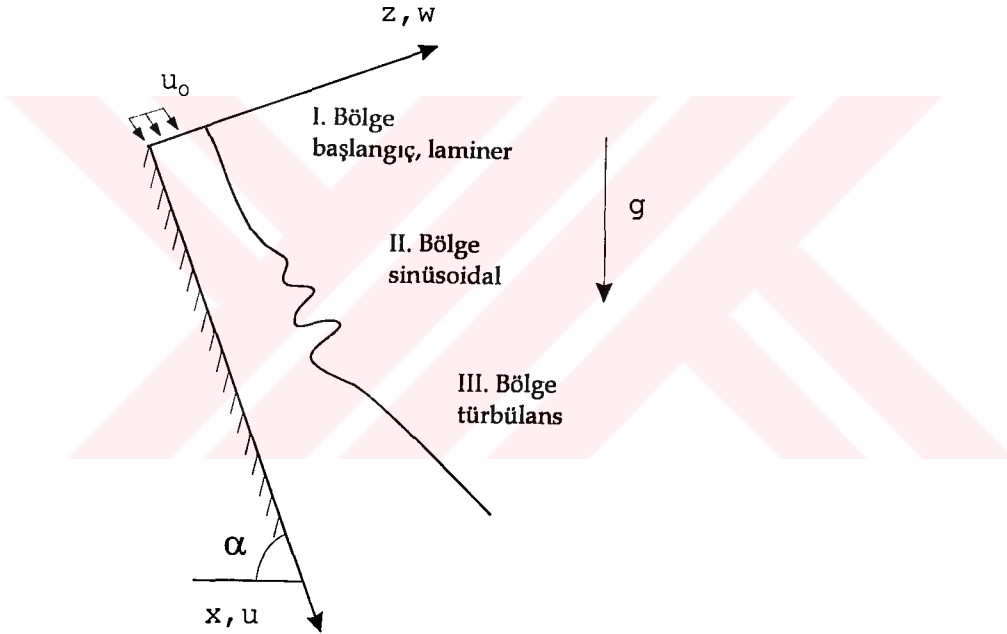
Şekil 1.1.1. eğimli düzlem üzerinde yer çekimi etkisinden doğan serbest yüzeyli bir akışkan için, geometri ve koordinat sistemini göstermektedir.

Kapitza (1949), deneysel olarak düşey bir levha üzerinde ince tabakalı bir sıvı akımını küçük Reynolds sayıları için incelemiş ve akım her ne kadar laminar ise de, akım yüzeyinin belli bir noktadan sonra dalgalandığını belirtmektedir. Bundan dolayı, çalışmalarının neticesini düşey levha üzerinde serbest yüzey akışkan profilinin üç bölümden oluştuğunu göstermiştir (Şekil 1.1.1.). Birinci kısım; başlangıç bölümü olarak adlandırılır ve de bu bölgede akım laminar ve pürüzsüzdür. İkinci kısım ise; dalgalı olduğundan sinüsoidal olarak adlandırılır. Bu bölgedeki akım iki boyutlu ve sanki-daimidir (quasi-steady). Üçüncü kısımda; akım türbülanslı olduğundan dolayı üç boyutludur.

Serbest yüzeyli akımlarda en büyük zorluk, serbest yüzey profilinin zamana bağlı olarak yerinin sürekli değişmesidir. Buna bağlı olarak sınır şartlarının da değişmesi doğaldır.

Bilindiği gibi, genel olarak serbest yüzeyli akımlar, yer çekimi kuvveti ve serbest yüzeyde basınç farkından dolayı oluşan yüzey gerilimin etkisi altında hareket etmektedir. Bu kuvvetlerin etki etmesi halinde ikinci ve üçüncü bölgelerde (Şekil 1.1.1.) serbest akım yüzeyi dalgalı hale dönüşmektedir.

Eğimli bir düzlem üzerinde incelediğimiz serbest yüzeyli akımları Navier-Stokes denklemleri ile tanımlamak mümkündür. Ancak, bu denklemlerin basitleştirilmiş şekli her ne kadar lineer ise de, kullanılan kinematik ve dinamik denklemlerden oluşan sınır şartları lineer olmadığından, bu denklemlerin çözümü güçleşmektedir.



Şekil 1.1.1. Serbest yüzeyli akışkan, geometri ve koordinat sistemi

1.2. Serbest Yüzeyli Akımların Kullanım Alanları

Serbest yüzeyli akımlar genel olarak doğada ve endüstrinin bir çok alanında da görülmektedir. Bu alanların bazıları:

Nehirler ve açık yüzeyli kanallar, kanalizasyon boruları, rezervuarlar, yarık ve çatlakların enjekte yolu ile doldurulması ve/veya izolasyonların yapılması, deniz dalgaların kıyıya yansımaları, gemilere ve mendereklere olan etkileri, tam dolmamış hareket halindeki sıvı taşıyan tankerler, soğutma ve damıtma bacaları ve dolu savaklar.

1.3. Serbest Yüzeyli Akımın Analizi

Bu bölümde serbest yüzeyli akımların fiziksel tanımı ve fiziksel problemi çözebilmek için matematiksel modeller ve sınır şartı denklemlerin elde edilişi incelenecektir.

1.3.1. Fiziksel İnceleme

Şekil 1.1.1.'de ayrıntılı bir şekilde verildiği gibi serbest yüzeyli akışkanın koordinat sistemini ve geometriye olan bağımlılığını göstermektedir. Yer çekimi kuvveti pozitif x- yönüne doğru etki etmektedir. Serbest yüzeyde ise basınç farkından dolayı yüzey gerilimin etkisi serbest yüzeydeki akımın dalgalanmasında gözlenmektedir. Yer çekimi kuvveti ve yüzey gerilim parametreleri, hız ve basınç dağılımında etkilerini göstermektedir.

Bundan dolayı akım rejimi daha önceden belirtildiği üzere üç ana bölgeden oluşmaktadır: (1) Başlangıç (laminer), (2) Sinüsoidal ve (3) Türbülans.

Kapitza (1949), yine kritik debinin sıvı yüzeyinde dalgalar oluşturduğunu göstermiştir. Eğer debi kritik olandan küçük ise serbest yüzeyde dalga rejimi gelişmez.

Kapitza (1949), çok küçük Reynolds sayıları ($Re=5-10$) için 250mm uzunluğunda ve 35mm çapında camdan yapılmış bir boru üzerinde aşağıya doğru akan sıvının dalga amplitüdünü, hızlarını, dalga uzunluğunu ve sıvı filmin kalınlığını ölçmüştür. Yapılan deneylerde dalga rejimlerini kontrol edebilmek için sıvı kontrollü olarak kullanıldı (debi aralıklı olarak pompalandı). Dalga rejimleri sırası ile iki kısımdan oluşmaktadır, periodik ve tek dalga. Ama, yukarıda açıklanan deneyler yalnız periodik dalgalı akımlar için yapılmıştır.

1.3.2. Matematiksel Model

Şekil 1.1.1.'de serbest yüzeyli akışkanın fiziksel problemi sırası ile süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri ile zamana bağlı sıkışamaz laminer akım için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \dots \dots \dots (1.1)$$

İki boyutlu akım için $i=1$ ve 2 değerlerini almaktadır. Bir diğer ifade ile bu akım x-z koordinat sisteminde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(1.2)$$

Aynı işlem tensörel olarak zamana bağlı momentum denklemleri için de yazılabilir:

($i=1$ ve $k=1, 2$ için x-ekseni yönündeki ve $i=2, k=1, 2$ için de z-ekseni yönündeki momentum denklemi elde edilir.)

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_k u_i)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + g_i \dots\dots\dots(1.3)$$

Veya momentum denklemleri x- ve z-ekseni yönlerine göre sırası ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g \sin \alpha \dots\dots\dots(1.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \cos \alpha \dots\dots\dots(1.5)$$

Yukarıda verilen denklemler lineer olmadıklarından dolayı genel analitik çözümleri bilinmemektedir. Atalet terimleri ihmal edildiği an, yaklaşık çözümler elde etmek mümkün olabilir.

Süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerini kullanarak pürüzsüz düşey bir levha üzerinde akan bir akımın hız profili yapılan varsayımlar sayesinde analitik olarak hesaplanmıştır. Bu çözüm ekler kısmında (Ek.1) verilmiştir.

1.3.3. Sınır Şartları

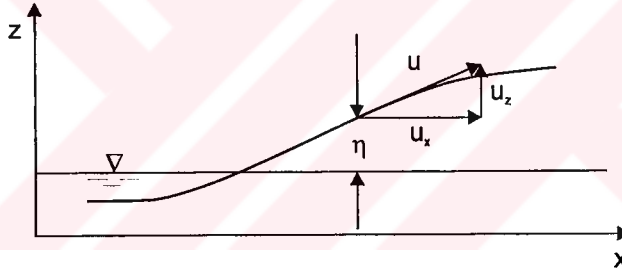
Bir önceki bölümde Navier-Stokes denklemleri ile tanımlanan serbest yüzeyli fenomenler iki yönden gayri-lineer karakter göstermektedir. Birincisi esas denklemlerin kendileri, ikincisi ise fiziksel problemi içeren denklemleri çözebilmek için serbest yüzeyde uygulanan sınır şartlarını tanımlayan denklemlerdir.

Bölüm 1.3.2.'de tanımlanan süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerin çözümü bir takım sınır şartlarını ön şart olarak koşmaktadır, aksi halde bu denklemlerin çözümü mümkün değildir. Bu denklemlerde iki boyutlu akım için üç bilinmeyen, u , w , ve P yer almaktadır. Bunlara ilâveten Şekil 1.3.3.1.1.'de görüleceği gibi levha ile akımın serbest yüzeyi arasındaki mesafeyi gösteren parametre $\eta(x, t)$ ve serbest yüzey üzerinde her noktada değişen açı γ 'dan oluşmaktadır.

Buna göre denklemler toplam beş bilinmeyenden (u , w , P , $\eta(x, t)$ ve γ) oluşurken, mevcut olan üç denkleme, süreklilik ve Navier–Stokes, iki de sınır şartı denklemlerinin çıkarılıp ilâve edilmesi gerekmektedir ki; bilinmeyenlerin sayısı ile denklemlerin sayısı eşit olup bu denklemlerin çözümü mümkün olabilsin. Bu bilinmeyen iki parametre η ve γ sınır şartlarını oluşturan kinematik ve dinamik sınır şartlarından elde edilmektedir. Bu sınır şartlarının tanımı ve türetilmesi ayrıntılı bir şekilde aşağıda verilmiştir.

1.3.3.1. Kinematik Sınır Şartı

Şekil 1.3.3.1.1. zamandan bağımsız iki boyutlu akışkanı göstermektedir.



Şekil 1.3.3.1.1. Serbest yüzeyli akışkan ve hız potansiyel bileşenleri

Kinematik sınır şartını serbest yüzeyde elde ederken yüzeyin gerçek bir yüzey olması gerekmektedir (Liggett, A.J., 1994). Şekil 1.3.3.1.1.'e göre serbest yüzeyde tanımlanan her noktadaki eğim, düşey hız bileşenin (u_z) yatay hız bileşeninin (u_x) oranına eşit olması gerekmektedir. Buna göre, serbest yüzey üzerinde her noktadaki hız vektörü yüzeye teğet olmaktadır.

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{u_z}{u_x} \dots\dots\dots(1.6)$$

veya

$$u_z = u_x \frac{d\eta}{dx} \dots\dots\dots(1.7)$$

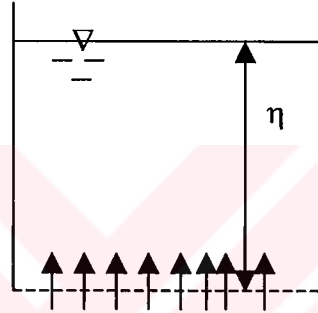
η serbest yüzey ile x-ekseni arasındaki mesafeyi göstermekte ve z-ekseni ise serbest yüzeye diktir.

(1.7) denklemi üç boyutlu bir sistem için geliştirilip kısmi türevler göz önünde bulundurularak yazılırsa:

$$u_z = u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \dots\dots\dots (1.8a)$$

denklemini elde edilir.

Yukarıdaki (1.8a) denklemi zamana bağlı bir akım için ifade etmek mümkündür. Bundan dolayı (Şekil 1.3.3.1.2.) zamana bağlı bir konteyner içerisinde aşağıdan yukarıya doğru artan serbest yüzeyli bir akımı göstermektedir.



Şekil 1.3.3.1.2. Zamana bağlı konteyner içerisinde serbest yüzeyli akım

Akım düşey doğrultuda zamana bağlı olarak artmaktadır ve bu artış oranı

$$u_z = \frac{d\eta}{dt} \dots\dots\dots (1.8b)$$

denklemini ile ifade edilmektedir (Liggett, A.J., 1994).

Şimdi ise zamandan bağımsız (1.8a) ve zamana bağlı (1.8b) denklemlerin (terimlerin) birleşmesinden z-ekseni yönündeki hız bileşeni (u_z) üç boyutlu bir sistem için son şeklini aşağıdaki gibi almaktadır:

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \dots\dots\dots (1.9)$$

Yukarıda tanımlanan (1.9) denklemi yalnız ve yalnız serbest yüzeyli akımlarda kullanıldığından, sınır şartı olarak uygulanır. η ve hızlar bağımlı değişkenler olduğundan dolayı (1.9) denklemi lineer bir denklem değildir.

Kinematik sınır şartının elde edilmesi için bir diğer yaklaşım ise serbest yüzey üzerindeki bir sıvı taneciğinin her zaman serbest yüzey üzerinde kalması öngörülmektedir (Liggett, A.J., 1994). Serbest yüzey $z=\eta(x, y, t)$ denklemi ile tanımlanır. Serbest yüzeye dik olan hız bileşeni o noktadaki serbest yüzeyin hareketine eşit olmaktadır (White, F.M., 1991). Bu fiziksel açıklama ise matematiksel olarak $D(z-\eta)/Dt=0$ şeklinde ifade edilir (Currie, I.G., 1982). D/Dt toplam türev olarak adlandırılır ve

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece serbest yüzey akımın hareketi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\frac{D(z-\eta)}{Dt} = \underbrace{-\frac{\partial \eta}{\partial t}}_I + \underbrace{u_x \frac{\partial(z-\eta)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(z-\eta)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(z-\eta)}{\partial z}}_{II} = 0 \dots \dots \dots (1.10a)$$

Serbest yüzey üzerindeki sıvı taneciğinin toplam hızı zamana ve mekana bağlı olmak üzere sırası ile yersel (I) ve konvektif (II) hız olarak iki kısımdan oluşmaktadır. (1.10a) denklemi Nabla operatörü ve hız vektörü kullanarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{D}{Dt}(z-\eta) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(z-\eta) = 0 \dots \dots \dots (1.10b)$$

Potansiyel teoriyi kullanarak sıkışamaz ve irrotasyonel bir akım için potansiyel fonksiyonun (ϕ 'nin) bileşenleri, $u_x = \partial\phi/\partial x$, $u_y = \partial\phi/\partial y$ ve $u_z = \partial\phi/\partial z$, hız vektörü ve Nabla operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \dots \dots \dots (1.11)$$

Nabla operatörü

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \dots \dots \dots (1.12)$$

(1.11) ve (1.12) denklemleri (1.10b) denklemine yerlerine konursa:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \left(\frac{\partial(z-\eta)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(z-\eta)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(z-\eta)}{\partial z} \vec{k} \right) = 0 \dots\dots\dots(1.13)$$

veya

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial(z-\eta)}{\partial x} + u_y \frac{\partial(z-\eta)}{\partial y} + u_z \frac{\partial(z-\eta)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(1.14)$$

veya parantezler açılıp başka bir şekilde düzenlenirse:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial z}{\partial x} - u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_y \frac{\partial z}{\partial y} - u_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + u_z \frac{\partial z}{\partial z} - u_z \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(1.15)$$

denklemini elde edilir.

η yalnız x, y ve t'nin bir fonksiyonu olduğu için, $\partial \eta / \partial z = 0$ ve diğer sadeleşmeleri de katarsak $\partial z / \partial x = \partial z / \partial y = 0$, (1.15) denklemi aşağıdaki şeklini alır:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + u_z = 0 \dots\dots\dots(1.16)$$

Yukarıdaki denklem iki boyutlu bir akım için yazılırsa ($y=0$):

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_z = 0 \dots\dots\dots(1.17)$$

veya (1.17) denklemi u_z 'ye göre düzenlenirse:

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots(1.18)$$

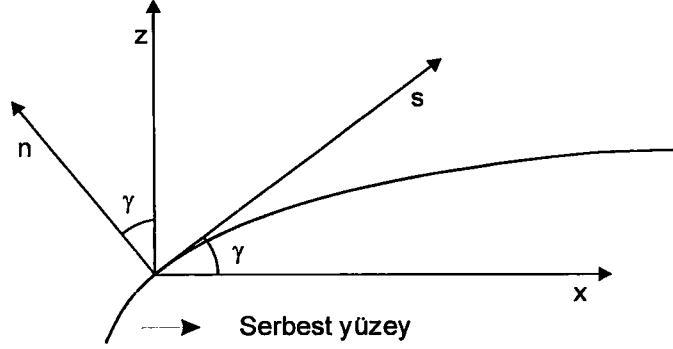
denklemini elde edilir.

Potansiyel teoride tanımlanan hız bileşenlerini, $u_x = \partial \phi / \partial x$ ve $u_z = \partial \phi / \partial z$ yukarıdaki (1.18) denklemde yerine konursa:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots(1.19)$$

denklemini elde edilir.

Serbest yüzeyli akımda akım yüzeyinin şekli ve yeri sürekli değiştiğinden dolayı, yüzeye dik ve teğetsel olan bir koordinat sistemi ile çalışmak daha uygun olacağı düşünülmüştür . Şekil 1.3.3.1.3. böyle bir durumu göstermektedir.



Şekil 1.3.3.1.3. Serbest yüzeyde tanımlanan iki koordinat sistemi arasındaki ilişki

n- normal ve s- ise teğetsel koordinatları, γ ise serbest yüzeyin (x-, z-) düzlemi ile yaptığı açığı tanımlar.

Şekil 1.3.3.1.3.'deki geometri kullanılırsa, potansiyel fonksiyonun x ve z'ye göre türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \sin \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \gamma \dots \dots \dots (1.20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \gamma \dots \dots \dots (1.21)$$

(1.20) ve (1.21) denklemleri (1.19) denkleminde yerlerine konursa:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \gamma = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos \gamma \dots \dots \dots (1.22)$$

veya

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \gamma - \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sin \gamma \dots \dots \dots (1.23)$$

denklemleri elde edilir.

Şekil 1.3.3.1.1.'e göre $\tan \gamma = d\eta/dx$ şeklinde ifade edilip (1.23) denkleminde yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(\cos \gamma + \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial s} (\sin \gamma - \sin \gamma) \dots \dots \dots (1.24)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki sadeleşme ($\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$) ve ikinci terim yok olduğu zaman, $\partial \eta / \partial t$ 'nin son şekli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \dots \dots \dots (1.25)$$

(1.25) denklemi serbest yüzeyin zamana bağlı olarak nasıl hareket ettiğini göstermektedir, bu da kinematik sınır şartını ifade etmektedir.

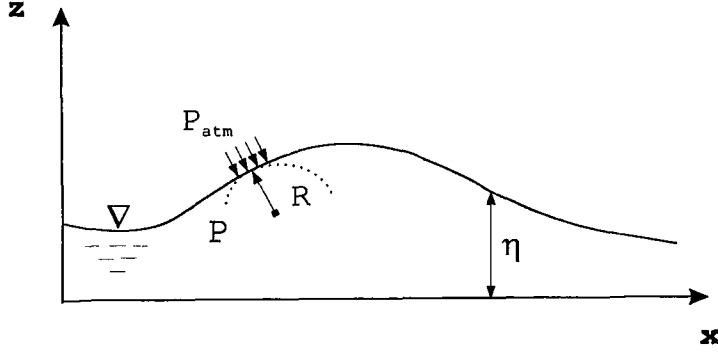
Diğer bir sınır şartı ise akımın hareket yönündeki potansiyel fonksiyonun birinci dereceden normal türevi ($\partial \phi / \partial n$) levha kenarları boyunca aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = q(x, t) \dots \dots \dots (1.26)$$

q ve n dışa doğru yönlenmiş akım hızı ve birim vektörüdür ve her ikisi de levha yüzeyine diktir.

1.3.3.2. Dinamik Sınır Şartı

Serbest yüzeyli akımlarda dinamik sınır şartı ikinci sınır şartı olarak bilinmektedir. Şekil 1.3.3.2.1. serbest yüzeye etki eden basınçları göstermektedir. Her ne kadar serbest yüzeydeki basınç sabit olarak kabul edilse de, genel anlamda serbest yüzeyde oluşan yüzey gerilimlerden basınç farklılıkları doğmaktadır.



Şekil 1.3.3.2.1. Serbest yüzeye etki eden basınçlar

Bu basınçlar atmosferik basınç P_{atm} , serbest yüzey boyunca etki eden sıvı basıncı $P=P(x, \eta)$ ve yüzey gerilimden oluşan basınç σ/R olup , aşağıdaki basınç dengesi denklemini oluşturmaktadırlar:

$$P_{atm}=P+\sigma/R \text{ veya}$$

$$P_{atm}-P=\sigma/R$$

P_{atm} : atmosfer basıncı

P : sıvı basıncı

σ : yüzey gerilim katsayısı ve

R : eğrilik yarıçapı.

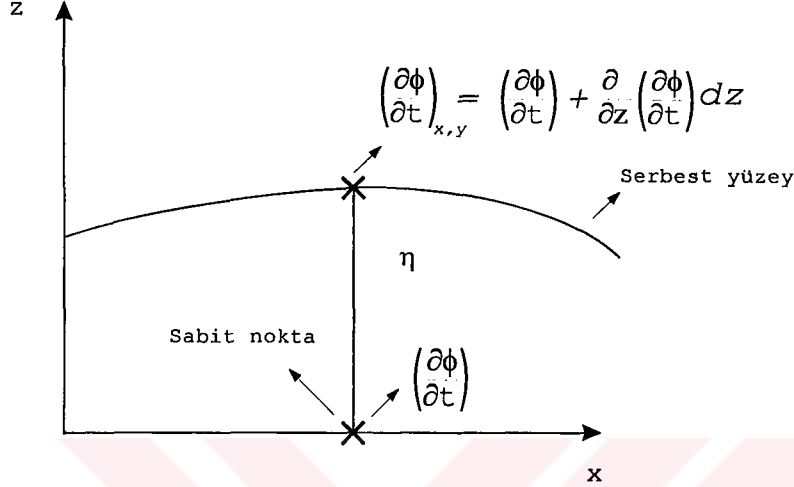
Açık kanal problemlerinde serbest yüzey çok az deforme olduğundan yüzey gerilim etkileri ihmal edilebilir. Böylelikle sınır şart denklemi de basitleştirilmiş şeklini alır ve atmosferik basınç ile sıvının basıncı denge durumunda olmaktadır, $P_{atm}=P$.

Bu kısa önbilgiden sonra serbest yüzeyli akımlarda ikinci sınır şartı olarak bilinen dinamik sınır şartı, serbest yüzeyde normal gerilmelerin sürekliliğini sağlamakta ve türetilmesinin odak noktası Bernoulli denklemi ile aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{1}{R} = \text{sabit} \dots \dots \dots (1.27)$$

(1.27) denkleminde $i=1$ ve 2 değerlerini almakta ve serbest yüzeyde ikinci sınır şartı denklemi olarak kullanılır. Yine bu denklemde η hızlar gibi bilinmeyen bir

parametredir. Genelde, Bernoulli denklemi serbest yüzey üzerinde ve serbest yüzeye dik olan yönde hareket eden bir noktadaki zamana göre potansiyel fonksiyondaki toplam değişimi $(\partial\phi/\partial t)_{x,y}$ ifade etmek için yazılmıştır. Şekil 1.3.3.2.2. serbest yüzeyi ve potansiyel fonksiyonun serbest yüzeye dik olan yönde (z-ekseni boyunca) zamana göre değişimini göstermektedir.



Şekil 1.3.3.2.2. Serbest yüzey ve potansiyel fonksiyonun düşey yönde zamana göre değişimi

η boyunca $\partial\phi/\partial t$ artmakta ve yeni değerini $(\partial\phi/\partial t)_{x,y}$ olarak almaktadır, başka bir ifade ile $(\partial\phi/\partial t)_{x,y}$ sabit noktadaki $(\partial\phi/\partial t)$ ve η (z-ekseni) boyunca $(\partial\phi/\partial t)$ 'deki artışın $(\partial/\partial z)(\partial\phi/\partial t)dz$ toplamından oluşmakta (Şekil 1.3.3.2.2.) ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (1.28). Bu artışın $(\partial/\partial z)(\partial\phi/\partial t)dz$ ve potansiyel fonksiyondaki toplam değişimin $(\partial\phi/\partial t)_{x,y}$ türetilmesi aşağıda gösterilmektedir.

$$(\partial\phi/\partial t)_{x,y} = (\partial\phi/\partial t) + (\partial\phi/\partial t)' \text{deki } \eta \text{ boyunca olan artış} \dots\dots\dots (1.28)$$

x ve y alt indisleri potansiyel fonksiyonun türevleri alınırken x- ve y-doğrultusunda sabit tutulduğunu gösterirken, z-ekseni boyunca değişmektedir. $(\partial\phi/\partial t)$ 'deki η boyunca olan artış z-ekseni boyunca ($z = \eta$) entegre edilirse ve $u_z = dz/dt$ bağıntısı da kullanılırsa (1.29) denklemi elde edilir.

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) dz = \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) u_z dt \dots\dots\dots (1.29)$$

Yine aşağıdaki kısmi türev özelliği (1.30) denklemi ve hız bağıntısı (1.31) denklemi (1.29) denkleminde yerlerine konulursa, (1.32) denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (1.30)$$

ve

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots \dots \dots (1.31)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} dt \dots \dots \dots (1.32)$$

veya aşağıdaki gibi düzenlenirse:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dt \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots \dots \dots (1.33)$$

denklemi elde edilir.

$\partial \phi / \partial z$ terimin değerini bulabilmek için yalnız düşey yöndeki artış gözönünde bulundurulması gerekmektedir, böylelikle x ve y sabit tutulduklarından dolayı, o yönlerdeki kısmi türevler sıfır olmaktadır.

$\partial \phi / \partial z$ teriminin x, y ve t'ye göre kısmi türevleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$d \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial(\partial \phi / \partial z)}{\partial t} dt + \underbrace{\frac{\partial(\partial \phi / \partial z)}{\partial x} dx}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial(\partial \phi / \partial z)}{\partial y} dy}_{=0} \dots \dots \dots (1.34)$$

veya

$$d \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial(\partial \phi / \partial z)}{\partial t} dt \dots \dots \dots (1.35)$$

(1.35) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenirse:

$$\frac{d \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{dt} = \frac{\partial(\partial \phi / \partial z)}{\partial t} \dots \dots \dots (1.36)$$

denklemi elde edilir.

(1.36) denklemi (1.33) denkleminde yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dt \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots(1.37)$$

(1.37) denklemi $\partial\phi/\partial t$ 'deki η boyunca olan artışı ifade etmekte ve (1.28) denkleminde yerine konursa:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x,y} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots(1.38)$$

veya yukardaki denklem $\partial\phi/\partial t$ 'ye göre çözülürse:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x,y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots(1.39)$$

denklemi elde edilir.

Yukarıdaki (1.39) denklem hareket eden serbest yüzeyli akımlarda uygulanmak için tanımlanmıştır ve potansiyel fonksiyonun ϕ 'nin z-ekseni boyunca zamana göre toplam değişimini göstermektedir.

(1.39) denklemi (1.27) denkleminde yerine konursa (1.40) denklemi elde edilmektedir:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x,y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{1}{R} = 0 \dots\dots\dots(1.40)$$

$\partial\phi/\partial z$ ve $\partial\eta/\partial t$ 'nin eşit olduğu denklemler sırası ile (1.21) ve (1.25), (1.40) denkleminde yerlerine konursa ve aşağıdaki iki koordinat sistemi (x-, y- kartezyen ve s-, n- koordinat sistemleri) arasındaki hız ilişkileri (1.41) kullanılırsa, (1.42) denklemi elde edilir.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^2 \dots\dots\dots(1.41)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x,y} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \gamma + \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial n} \sin \gamma \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{1}{R} = 0 \dots\dots\dots(1.42)$$

Yukarıdaki denklem $(\partial\phi/\partial t)_{x,y}$ ' ye göre çözülürse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x,y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\tan\gamma - g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{1}{R} \dots\dots\dots(1.43)$$

veya aşağıdaki gibi düzenlenirse:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x,y} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi}{\partial s}\frac{\partial\phi}{\partial n}\tan\gamma\right] - g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{1}{R} \dots\dots\dots(1.44)$$

denklemini elde edilir.

(1.44) denklemi bir çok problemde olduğu gibi s-n koordinat sisteminde tanımlanmış olup potansiyel fonksiyondaki toplam değişimi hesaplamak için kullanılmaktadır.

1.4. Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Akışkanın fiziğini karakterize etmek ve kontrol parametrelerini belirlemek için kullanılan diferansiyel ve sınır şartı denklemlerinin normalize edilmesi gerekmektedir. Bir sonraki bölümlerde bu denklemlerin boyutsuzlaştırılması gösterilmektedir.

1.4.1. Navier – Stokes Denklemleri

Navier – Stokes denklemlerini boyutsuz olarak yazabilmek için aşağıda tanımlanan boyutsuz parametrelerden faydalanılması gerekmektedir¹.

u_0 referans hızını ve serbest yüzey akımlarda $u_0 = g\eta_0^2 \sin\alpha / 3\nu$ olarak tanımlanmaktadır, η_0 karakteristik uzunluğu belirlemekte ve levha üzerindeki akışkanın ortalama film kalınlığı olarak bilinmektedir.

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad w^* = \frac{w}{u_0}, \quad x^* = \frac{x}{\eta_0}, \quad z^* = \frac{z}{\eta_0}, \quad t^* = \frac{tu_0}{\eta_0}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad Fr = \frac{u_0}{\sqrt{\eta_0 \cdot g}}, \quad Re = \frac{u_0 \eta_0}{\nu}, \quad We^2 = \frac{\rho u_0^2 \eta_0}{\sigma}$$

¹ Yıldız işareti kullanılan parametrenin boyutsuz olduğunu göstermektedir.

Eğimli bir düzlemde serbest yüzeyli sıkışamaz akışkanların hareketini içeren iki boyutlu süreklilik ve Navier– Stokes denklemleri boyutlu olarak yeniden yazılırsa:

Süreklilik:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(1.45)$$

ve momentum denklemleri:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g \cdot \sin \alpha \dots\dots\dots(1.46)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \cdot \cos \alpha \dots\dots\dots(1.47)$$

elde edilir.

Tanımlanan boyutsuz parametreler yukarıdaki denklemlerde sırası ile kullanılırsa:

Süreklilik:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \dots\dots\dots(1.48)$$

Momentum denklemleri:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{1}{Fr^2} \cdot \sin \alpha \dots\dots\dots(1.49)$$

ve

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{Fr^2} \cdot \cos \alpha \dots\dots\dots(1.50)$$

olarak elde edilir.

1.4.2. Sınır Şartları

Bölüm 1.4.1’de Süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerinin boyutsuz olarak türetilmesi gösterilmiştir. Benzeri bir yöntem ile serbest yüzeydeki akım için tanımlanan ve yalnız serbest yüzeyli akımlarda kullanılan sınır şartı denklemleri için boyutsuz parametreler: $\phi^* = \phi/u_o \cdot \eta_o$, $\eta^* = \eta/\eta_o$, $n^* = n/\eta_o$, $s^* = s/\eta_o$, $R^* = R/\eta_o$, kullanılarak aşağıdaki gibi boyutsuz olarak ifade edilebilirler:

Kinematik Sınır Şartı :

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} \dots \dots \dots (1.51)$$

Levha kenarları boyunca sınır şartı ise:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} = q^*(x^*, t^*) \dots \dots \dots (1.52)$$

ve Dinamik Sınır Şartı:

$$\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \right)_{x,y} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial s^*} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi^*}{\partial s^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} \tan \gamma \right] - \frac{\eta^*}{Fr^2} - \frac{1}{We^2} \frac{1}{R^*} \dots \dots \dots (1.53)$$

1.4.3. Boyutsuz Parametreler

Momentum denklemlerinde ortaya çıkan boyutsuz parametreler, Reynolds ve Froude sayıları, aynı zamanda serbest yüzeyli akımlarda kontrol parametreleri olarak da bilinmektedir ve Weber sayısı yalnız dinamik sınır şartı denkleminde yer almaktadır. Özellikle, Froude sayısı yalnız serbest yüzeyli akımlarda kullanılır ve de akımın fiziği ile ilgili önemli bir faktördür.

1.4.3.1. Reynolds Sayısı

Genel olarak Reynolds sayısı atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranıdır. $Re \ll 1$ ise viskoz kuvvetler atalet kuvvetlerinden çok büyük olup, atalet kuvvetleri problemde ihmal edilebilir. Atalet kuvvetlerinin ihmal edilmesi problemde çıkan sonuçları önemli bir derecede etkilemiyor. Diğer bir olasılık, eğer $Re \gg 1$ ise atalet kuvvetleri viskoz kuvvetlere göre daha fazla önem taşımaktadır.

1.4.3.2. Froude Sayısı

Serbest yüzeyli akımlarda yer çekimi kuvveti, akımı etkilediğinden dolayı büyük önem taşımaktadır. Bu etki boyutsuz parametre olarak tanımlanan Froude sayısı ile belirlenmektedir. Froude sayısı genel olarak atalet kuvvetlerin yer çekimi kuvvetine oranı olarak tanımlanmaktadır.

1.4.3.3. Weber Sayısı

Serbest yüzeyli akımlarda kullanılan diğer bir boyutsuz parametre ise Weber sayısıdır. Weber sayısı atalet kuvvetlerin yüzey gerilim kuvvetlerine oranı olarak tanımlanır ve yüzey gerilim etkilerini karakterize etmektedir. Yüzey gerilim katsayısı çok küçük olduğu için, Weber sayısı çok büyümekte ve de bulunduğu denklemde paydada yer aldığı için bulunduğu terim ihmal edilebilmektedir.



2. SAYISAL YÖNTEMİN OLUŞTURULMASI

Fiziksel problem matematiksel model olarak tanımlanırken matematiksel modelin özünü süreklilik, Navier-Stokes ve sınır şartı denklemleri oluşturmaktadır. Bu denklemler sayısal metodlar yardımıyla çözümleneceğinden dolayı bunlar boyutsuz olarak türetilmektedirler.

Bu çalışmada kullanılması öngörülen sayısal yöntem sonlu hacimler yöntemidir. Bu metotta süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri sonlu hacimler yöntemi ile lineer cebirsel denklemler olarak ayrıklaştırılıp SIMPLE algoritması ile çözümlenmektedir.

Sayısal metodları kullanırken hesap bölgesi, kesişen yatay ve düşey hatlar sistemi ile küçük alanlara veya elemanlara veya hücrelere ayrılmaktadır. Bu küçük alanlar kontrol hacmi veya hücre hacmi olarak adlandırılmaktadır. Bu çizgilerin kesiştikleri yerlere grid noktaları denilmektedir. Çözülmesi gereken diferansiyel denklemler sayısal metodlarla her grid noktası için ayrıklaştırılıp cebirsel denklemlere dönüştürülmektedir.

Diferansiyel denklemleri cebirsel denklemler olarak türetilirken bağımlı değişkenlerin² grid noktaları arasında nasıl değişeceği konusunda varsayımlarda bulunmak gerekli olmaktadır.

Genel olarak parçalı profil kullanılmaktadır ki, elemandaki temsili değişken ϕ 'nin değişimi yalnız küçük bir bölge üzerindeki grid noktalarında tanımlanmaktadır. Böylelikle her küçük bölge veya eleman için ayrı bir profil varsayımı yapılabilmektedir. Herhangi bir noktadaki ϕ değişimi hakkında yalnızca o noktayı içeren grid elemanı (modül) ile sınırlı kabuller yapılabilmektedir.

Ayrıklaştırılmış denklemler herhangi bir grup grid noktaları için tanımlanan cebirsel ilişkilerdir. Böyle bir denklem, bağımlı değişkeni içeren diferansiyel denklemlerinden türetilmekte ve aynı fiziksel bilgileri içermektedir. Bağımlı değişkenin bir grid noktasındaki değeri yalnız komşu grid noktalarındaki bağımlı değişkenin dağılımını etkilemektedir.

² Bağımlı değişken ϕ genel diferansiyel denkleminde yer alan temsili değişken olup, yerine u ve w konulursa sırası ile x- ve z-ekseni doğrultusundaki hareket denklemleri elde edilmektedir.

Belirli bir akım bölgesindeki grid noktalarının sayısı çok arttığı zaman, ayrıklaştırılmış denklemlerin çözümü diferansiyel denklemlerin ekzakt çözümüne yaklaşması beklenmektedir.

Herhangi bir diferansiyel denklemin çözümü için kullanılan uygun ayrıklaştırılmış denklem hiçbir zaman tek değildir. Her ne kadar da farklı ayrıklaştırılmış denklem çeşitleri mevcut ise de hepsinin yaklaşık aynı sonucu vermesi beklenmektedir.

Ayrıklaştırılmış denklemler arasındaki farklar profil varsayımlarından ve de ayrıklaştırılmış denklemlerin elde edilmesinde kullanılan metodların farklılıklarından kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılmasında sonlu hacimler yöntemi kullanılmıştır.

2.1. Ayrıklaştırılmış Denklemlerin Sonlu Hacimler Yöntemi İle Çıkarılması

Sonlu hacimler yöntemi hesap alanının birbiri ile kesişmeyen birçok kontrol hacimlerine bölünmesini öngörmektedir. Kontrol hacminin etrafında grid noktaları tanımlanmaktadır. Çözülmesi gereken diferansiyel denklemler her kontrol hacmi için entegre edilmektedir. Grid noktaları arasında yer alan bağımlı değişkendeki değişimi tanımlayan parçalı profiller arzu edilen integralleri değerlendirip çözmek için kullanılmaktadır.

Bir grup grid noktası için tanımlanan ve bağımlı değişkenin değerlerini içeren integrallerin sonucu ayrıklaştırılmış cebirsel denklemlerdir.

Her kontrol hacmi üzerinde ϕ 'nin integrasyonu yapılır. Bu integrasyonun yürütülebilmesi için her kontrol hacmi içerisinde geçerli olmak üzere ϕ yerine parçalı sürekli bir fonksiyon konulabilir.

Sonlu farklar yöntemini kullanırken diferansiyel denklemlerinde yeralan birinci ve ikinci dereceden türev terimleri yerine temsili değişkene bağlı terimler konulmaktadır.

Sonlu hacimler yönteminde ise mevcut diferansiyel denklem her kontrol hacmi üzerinde entegre edilmektedir ve kullanılan alt ve üst sınırlara göre değerlendirilmektedir. Böylece her iki yöntemdeki diferansiyel denklemler, cebirsel denklemler olarak ifade edilmektedir. Sonlu farklar metodunda varolan serbestlik aslında birinci ve ikinci mertebeden türevleri hesaplarken ihmal edilen yüksek mertebedeki terimlerden dolayıdır. Sonlu hacimler metodunda ise kontrol hacmi yüzlerinde bağımlı değişkeni tanımlamak için parçalı profiller kullanılmaktadır.

Genel olarak sayısal algoritma üç adımdan oluşmaktadır:

- Akımı (fiziksel problemi) tanımlayan diferansiyel denklemlerin her kontrol hacmi için entegre edilmesi,
- Diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılıp cebirsel denklemler şeklinde ifade edilmesi ve
- İteratif metodlarla cebirsel denklemlerin çözümlenmesi.

Cebirsel denklemler sistemini çözmek için çözüm prosedürü olarak bilimde en fazla kullanılan ve diğer metodlara nazaran çok hızlı yakınsak olan üç-köşegenel matris ve Gauss – Seidel yöntemi kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, sonlu hacimler yöntemini kullanarak bir boyutlu akım problemi ayrıklaştırıldıktan sonra, iki boyutlu denklemlere geçiş yapılacaktır. Denklemlerin ayrıklaştırılmasında bazı farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bir sonraki adımda ise iki boyutlu konvektif-difüzyon denklemine zamana bağlı terimi de katarak bu durum için de ayrıklaştırma denklemleri elde edilecektir. Son olarak basınç gradyanlarını da dikkate alarak tüm denklemler iki boyutlu akım için ayrıklaştırılıp elde edilen bu cebirsel denklemler SIMPLE algoritması ile çözümlenecektir. SIMPLE algoritması SMAC metodunda kullanılan ve yöntemin ana çekirdeğini oluşturduğu için ayrıntılı bir şekilde incelenmelidir.

Zamana bağlı sıkışamaz iki boyutlu akım problemi için süreklilik ve hareket denklemi (genel diferansiyel denklemi) aşağıdaki gibi ifade edilmektedirler:

Süreklilik:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(2.1)$$

Hareket denklemi (genel diferansiyel denklemi):

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w \phi)}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + S \dots\dots\dots(2.2)$$

S kaynak terimini ifade etmektedir.

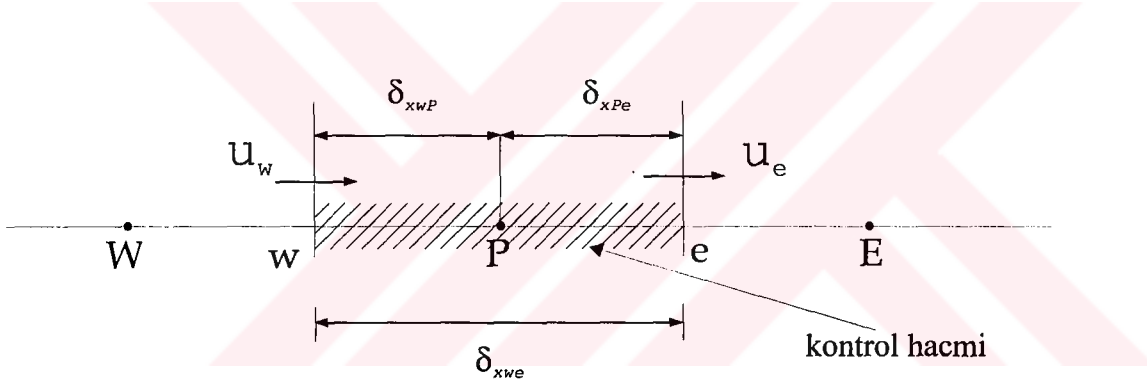
2.1.1. Daimi Bir Boyutlu Akım Denklemi

Zamandan bağımsız sıkışamaz bir boyutlu akım problemi için sırası ile süreklilik ve momentum denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \dots \dots \dots (2.3)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{d\phi}{dx} \right) \dots \dots \dots (2.4)$$

Bu denklemleri ayırklaştırmak için Şekil 2.1.1.1.'deki üç grid noktası kullanılabilir. P grid doğrusu üzerinde yer alan bir noktayı ve W ile E noktalarının orta noktasında yer almaktadır. W ise P noktasının batısındaki ve E'de P noktasının doğusundaki bir noktayı göstermektedir. w ve e sırası ile batı ve doğu kontrol hacmi yüzlerini belirtmektedir. e, P ile E, w ise W ile P noktalarının tam ortalarında olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 2.1.1.1. Bir boyutlu akım problemi için grid noktaları

(2.4) denklemi kontrol hacmi sınırları arasında (w'den e'ye kadar) entegre edilip değerlendirilirse, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{d\phi}{dx} \right) dx \dots \dots \dots (2.5)$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left(\mu \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\mu \frac{d\phi}{dx} \right)_w \dots \dots \dots (2.6)$$

Yukarıdaki denklemi daha uygun bir şekilde ifade etmek ve basitleştirmek için iki değişkeni, F ve D, burada tanımlamak gerekmektedir. $F = \rho u A$ ve $D = \mu A / \delta x$ şeklinde tanımlanıp, F akım veya konveksiyon şiddeti veya kütleli debi ve D ise difüzyon iletkenliği olarak adlandırılmaktadır. D ve F aynı birimlere sahip olup, D her zaman pozitifdir; F akım yönüne bağlı olduğundan negatif veya pozitif değerler alabilir. F ve D değişkenleri kontrol hacmi yüzlerinde aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$F_w = (\rho u A)_w, F_e = (\rho u A)_e$$

$$D_w = \mu_w A / \delta x_{WP} \text{ ve } D_e = \mu_e A / \delta x_{PE}$$

Bir boyutlu akım için $A = A_e = A_w = 1$. Yeni tanımlanan semboller ayrıklaştırılmış denklemlerde yerlerine konursa (2.7) denklemi

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \dots \dots \dots (2.7)$$

elde edilir.

Benzeri bir yaklaşımla süreklilik denklemi de kontrol hacmi sınırları arasında entegre edilirse ve tanımlanan semboller kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\int_w^e \frac{d}{dx} (\rho u) dx = (\rho u)_e - (\rho u)_w \dots \dots \dots (2.8)$$

ve

$$F_e - F_w = 0 \dots \dots \dots (2.9)$$

(2.7) denklem ve kontrol hacmi yüzlerindeki temsili değişkenler (ϕ_e ve ϕ_w) farklı yöntemler yardımıyla çözümlenebilmektedir. Tüm yöntemler kontrol hacmi yüzlerinde (e ve w) tanımlanan sözkonusu ϕ_e ve ϕ_w 'nin değerlerine ihtiyaç duymaktadır. Bu yöntemler aşağıda ayrıntılı bir şekilde incelenmektedir.

2.1.1.1. Merkezi Farklar Yöntemi

Bu yöntem (2.7) denklemindeki eşitliğin sağ tarafında bulunan kontrol hacmi yüzlerindeki difüzyon terimlerini ifade etmek ve denklemlerin sol tarafında yer alan

kontrol hacmi yüzlerindeki konvektif terimlerin değerlerini hesaplamak için kullanılmıştır. Üniform grid noktaları için kontrol hacmi yüzlerindeki değerler (ϕ_e ve ϕ_w) aşağıdaki gibi tanımlanmakta ve buradaki işlemler için lineer interpolasyon denenmiştir.

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \dots \dots \dots (2.10)$$

ve

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \dots \dots \dots (2.11)$$

1/2 faktörü kontrol hacmi yüzleri (Şekil 2.1.1.1.) her iki ana noktaları (W-P, P-E) ortasında kabul edildiği varsayımından kaynaklanmaktadır. ϕ_e ve ϕ_w değerleri (2.7) denkleminde yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{F_e}{2}(\phi_E + \phi_P) - \frac{F_w}{2}(\phi_P + \phi_W) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \dots \dots \dots (2.12)$$

(2.12) denklemi başka bir şekilde düzenlenirse, (2.13) denklemi elde edilir:

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

veya

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \dots \dots \dots (2.13)$$

ϕ_E ve ϕ_W 'nin katsayıları sırası ile a_W ve a_E olarak teşhis edilirken merkezi farklar yöntemi genel olarak bir boyutlu akım denklemi için aşağıdaki gibi ayrıklaştırılmıştır:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \dots \dots \dots (2.14)$$

Ayrıklaştırılmış denklemde yer alan komşu katsayılar a_W , a_E ve merkez katsayısı a_P aşağıdaki tabloda verilmiştir.

a_w	a_E	a_P
$D_w + F_w/2$	$D_e - F_e/2$	$a_w + a_E + (F_e - F_w)$

Bir boyutlu akım denklemini çözmek için ayrıklaştırılmış (2.14) denklemin tüm grid noktaları için yazılması gerekmektedir. Bu da bir takım cebirsel denklemlerin ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bu cebirsel denklemlerin çözümleri grid noktalarında sözkonusu değişkendeki ϕ 'nin dağılımını vermektedirler.

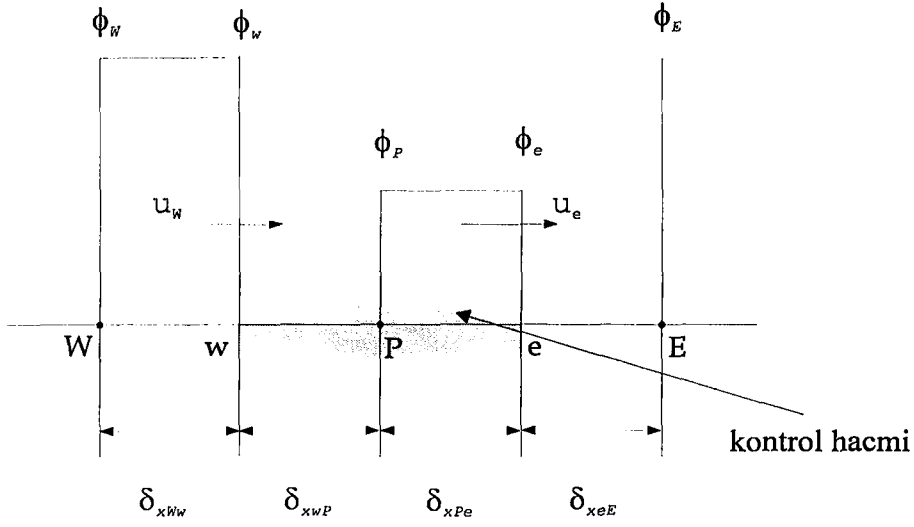
2.1.1.2. Upwind Farklar Yöntemi

Bu yönteme aynı zamanda “**verici kontrol hacmi**” yöntemi de denilmektedir. Merkezi farklar yöntemin en büyük noksanlığı akım yönünü teşhis etme yeteneğinin olmayışıdır. Merkezi farklar yönteminde batı kontrol hacmi yüzündeki ϕ_w her zaman her iki değer tarafından ϕ_P ve ϕ_E etkilenmektedir. Halbuki batıdan doğuya doğru akan kuvvetli bir konvektif akımda, kontrol hacmi yüzünün batısı (w) batı noktasından (W), P noktasına göre, daha fazla etkilenmektedir. Bundan dolayı merkezi farklar yönteminde yapılan ifade böyle bir akım için uygun değildir.

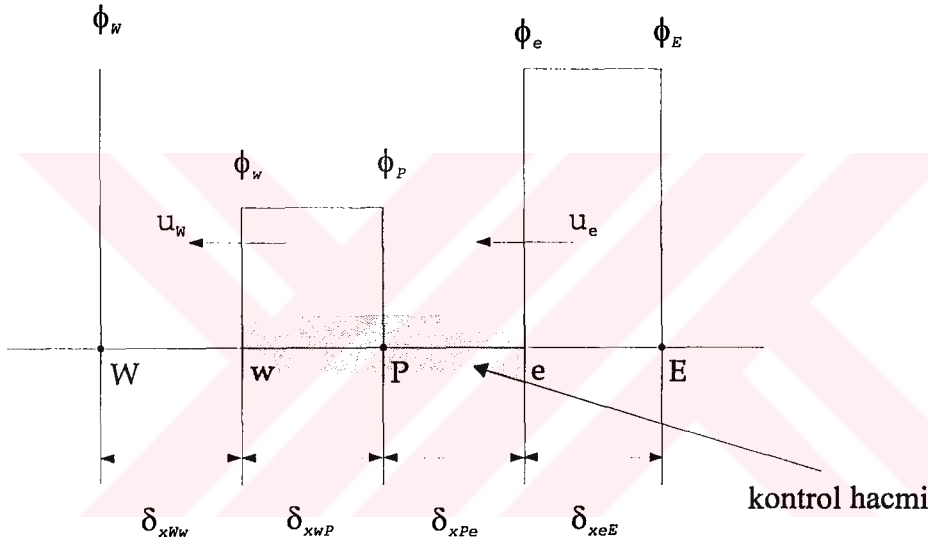
Upwind farklar yönteminde kontrol hacmi yüzlerindeki temsili değişken değerleri hesaplanırken akım yönü de dikkate alınmalıdır. Kontrol hacmi yüzündeki konvektif değer ana nokta üzerindeki yukarı akım değerine eşit olarak alınır.

Şekil 2.1.1.2.1. ve 2.1.1.2.2. sırası ile akımın pozitif (batıdan doğuya) ve negatif (doğudan batıya) yönde, kontrol hacmi yüzlerindeki ϕ ile ana noktalarda kullanılan ϕ değerlerini göstermektedir.

Akım pozitif yönde olduğu zaman kontrol hacmi yüzlerindeki hızlar ($u_w > 0$, $u_e > 0$) sıfırdan büyük ve bunlara bağlı olan akım şiddetleri ($F_e > 0$, $F_w > 0$) pozitif olmalıdır. Buna göre upwind farklar yönteminde, Şekil 2.1.1.2.1.' de görüldüğü gibi,



Şekil 2.1.1.2.1. Upwind yöntemine göre pozitif yöndeki akım



Şekil 2.1.1.2.2. Upwind yöntemine göre negatif yöndeki akım

$$\phi_w = \phi_W \dots \dots \dots (2.15a)$$

ve

$$\phi_e = \phi_P \dots \dots \dots (2.15b)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Yukarıdaki bu özellikler (2.7) denkleminde yerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \dots \dots \dots (2.16)$$

(2.16) denklemi başka bir şekilde aşağıdaki gibi düzenlenirse:

$$(D_w + D_e + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \dots \dots \dots (2.17)$$

veya

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \dots \dots \dots (2.18)$$

denklemi elde edilir.

Akım negatif yönde ise kontrol hacmi yüzündeki hızlar u_w ve u_e ($u_e < 0$, $u_w < 0$) sıfırdan küçük ve bunlara bağlı olan akım şiddetleri F_w ve F_e ($F_e < 0$, $F_w < 0$) de negatif olmaktadır. Kontrol hacmi yüzlerindeki değerler ise ϕ_w ve ϕ_e Şekil 2.1.1.2.2.'e göre aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\phi_w = \phi_P \dots \dots \dots (2.19a)$$

ve

$$\phi_e = \phi_E \dots \dots \dots (2.19b)$$

Bu değerler (2.7) denkleminde yerlerine konulursa:

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \dots \dots \dots (2.20)$$

veya

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_e - F_e) \phi_E \dots \dots \dots (2.21)$$

denklemi elde edilmektedir.

Ana noktalarındaki temsili değişken (ϕ_w ve ϕ_e) katsayıları sırası ile a_w ve a_e olarak teşhis edilip, (2.18) ve (2.21) ayrıklaştırılmış denklemler genel formunda aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \dots \dots \dots (2.22)$$

a_p merkez katsayısı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

P noktası için komşu katsayılar (a_w ve a_e) pozitif ve negatif akımlar için aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	a_w	a_e
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0, F_e < 0$	D_w	$D_e - F_e$

Yukarıdaki özellikler upwind farklar yönteminde komşu katsayılar için her iki akım çeşidini (yönünü) kapsayacak şekilde maksimum notasyonunu kullanarak aşağıdaki gibi verilebilirler:

a_w	a_e
$D_w + \max[F_w, 0]$	$D_e + \max[0, -F_e]$

2.1.1.3. Karma Farklar Yöntemi

Karma farklar yöntemi merkezi ve upwind farklar yöntemlerin birleşiminden oluşmaktadır. Merkezi farklar yöntemi ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri için hassas olup küçük Peclet sayıları ($Pe < 2$) için kullanılmaktadır. Peclet sayısı genel olarak akım şiddetinin F , difüzyon iletkenliğine D oranı olarak tanımlanmaktadır. Upwind farklar yöntemi ise birinci mertebeden diferansiyel denklemleri için hassas sonuçlar verirken, büyük Peclet sayıları ($Pe \geq 2$) için uygulanmaktadır. Bir boyutlu konvektif-difüzyon problemi için geliştirilip ayrıklaştırılan denklem, akı denge denklemi olarak da ifade edilebilir. Karma farklar yöntemi, her kontrol hacmi yüzünden geçen net akıyı değerlendirmek için yersel Peclet sayısına bağlı parçalı formülleri kullanmaktadır. Peclet sayısı kontrol hacmi yüzlerinde hesaplanmaktadır. Örneğin, kontrol hacminin batı yüzündeki Peclet sayısı:

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\mu_w / \delta x_{WP}} \dots \dots \dots (2.23)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Karma farklar formülü kontrol hacminin batı yüzünden geçen ve birim alana düşen net akı farklı Peclet sayıları için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Patanker, 1980):

$$J_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_p \right] \quad -2 < Pe_w < 2 \dots \dots \dots (2.24a)$$

$$J_w = F_w \phi_w \quad Pe_w \geq 2 \dots \dots \dots (2.24b)$$

$$J_w = F_w \phi_p \quad Pe_w \leq -2 \dots \dots \dots (2.24c)$$

Bu denklemlerden de görüldüğü gibi konvektif-difüzyon probleminde küçük Peclet sayıları için merkezi farklar metodu kullanılırken, Peclet sayısı $|Pe| > 2$ olduğu zaman konvektif değerleri önem kazanmakta ve difüzyon değerleri sıfır olmaktadır. Genel olarak ayrıklaştırılmış denklem aşağıda verilen şekilde yazılır:

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \dots \dots \dots (2.25)$$

Merkez katsayısı a_p :

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

Komşu katsayılar ise yapılan bazı işlemler ve düzenlemelerden sonra aşağıdaki tabloda verilmiştir.

a_w	a_e
$\max[F_w, (D_w + F_w/2), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$

2.1.1.4. Üs-Kurallı Farklar Yöntemi

Üs-Kurallı farklar yöntemi bir boyutlu akım problemi çözümüne daha hasas yaklaşım göstermekte ve karma farklar yöntemine göre daha iyi sonuçlar üretmektedir. Batı yüzünden geçen akı belirli Peclet sayıları için aşağıda verilmiştir.

$$J_w = F_w [\phi_w - \beta_w (\phi_p - \phi_w)] \quad 0 < Pe < 10 \dots \dots \dots (2.26a)$$

Bu yöntemde kontrol hacmin yüzlerindeki Peclet sayısı 10'nu geçtiği zaman difüzyon sifıra eşitlenmektedir. Eğer Peclet sayısı $0 < Pe < 10$ ise akı polinom kavramları kullanılarak değerlendirilir. Örneğin, kontrol hacminin batı yüzündeki birim alana düşen net akı farklı Peclet sayıları için ve β_w ile J_w de aşağıdaki gibi verilmiştir (Patanker, 1980):

$$\beta_w = \frac{(1 - 0.1Pe_w)^5}{Pe_w} \quad \text{ve} \quad J_w = F_w \phi_w \quad Pe > 10 \dots \dots \dots (2.26b)$$

Bir boyutlu akım probleminde üs-kurallı farklar yöntemini kullanarak elde edilen ayrıklaştırılmış denklemde yer alan katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Merkez katsayısı:

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

Ve komşu katsayılar a_w ve a_e ise aşağıdaki tabloda verilmiştir.

a_w	a_e
$D_w \max \left[0, \left(1 - 0.1 Pe_w \right)^5 \right] + \max [F_w, 0]$	$D_e \max \left[0, \left(1 - 0.1 Pe_e \right)^5 \right] + \max [-F_e, 0]$

Üs-kurallı farklar yönteminin özellikleri karma farklar yönteminin özelliklerine benzemektedir. Üs-kurallı farklar yöntemi bir boyutlu problemlerde daha hassas olmakla ekzakt çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir. Bu yöntem bazı akım hesaplarında verimli olup karma farklar yöntemine bir alternatif olarak da kullanılabilir.

2.1.1.5. Yöntemlerin Özeti

Bir boyutlu akım problemi için ayrıklaştırılmış denklem, akım alanı bilindiği varsayımı yapılarak, ifade edildi. Buradaki en önemli problem kontrol hacmi yüzlerindeki temsili değişken değerinin uygun kavramlarla ifade edilmesinde ortaya

çıkılmaktadır, çünkü denklemlerde yer alan konveksiyon katkısı her yöntemle göre farklı olmaktadır.

Tüm sonlu farklar yöntemlerinde ayrıklaştırılmış denklemlerde ardışık olarak konvektif ve difüzyon etkileri tanımlanmaktadır. Ayrıklaştırılmış denklemlerdeki katsayılar, kütleli debi F ve difüzyon iletkenliği D 'nin ağırlıklı kombinasyonundan oluşmaktadır. Genel olarak bir boyutlu akım problemi için, içindeki bir noktanın ifade edilmesinde, farklar yöntemlerinden (merkezi, upwind, karma ve üs-kurallı farklar yöntemi) bir tanesi kullanılmaktadır ve ayrıklaştırılmış denklem genel olarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \dots \dots \dots (2.27)$$

Ve merkez katsayısı ise:

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Tüm yöntemler için komşu katsayılar aşağıdaki tabloda belirtilmiştir:

Tablo 2.1.1.5.1. Farklar yöntemlerine göre komşu katsayıların tanımı

Yöntem	a_W	a_E
Merkezi farklar	$D_w + F_w/2$	$D_e - F_e/2$
Upwind farklar	$D_w + \max[F_w, 0]$	$D_e - \max[0, -F_e]$
Karma farklar	$\max[F_w, (D_w + F_w/2), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$
Üs-kurallı farklar	$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$

Sınır şartları ayrıklaştırılmış denklemlerde kaynak terimi sayesinde ifade edilmekte ve denklemlerin sağ tarafında yer almaktadırlar. Sınır şartlarının karakteri her ayrıklaştırılmış yöntem için ayrıntılı bir şekilde verilmesini gerekmektedir.

Korunum³, sınır⁴ ve taşıma⁵ özelliklerine sahip olan ayrıklaştırılmış yöntemler fiziksel olarak somut sonuçlar ve kararlı iteratif çözümler verebilmektedir. Merkezi farklar yöntemi genel olarak konvektif-difüzyon problemlerinde kontrol hacmi yüzlerindeki büyük Peclet sayıları için taşıyıcılık özelliğini yitirdiğinden dolayı gerçekçi olmayan sonuçlar vermektedir.

Upwind, karma ve üs-kurallı farklar yöntemleri, üç özelliğe (korunum, sınır ve taşıyıcılık) sahiptir ve kararlı olabilmektedir.

2.1.2. Daimi İki Boyutlu Akım Denklemi

Zamandan bağımsız sıkışamaz akım için süreklilik ve genel diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilmiştir. Genel diferansiyel denklemde ϕ yerine ayrı ayrı u ve w hız bileşenleri konursa, sırası ile x - ve z - eksenine doğrultusundaki momentum denklemleri elde edilir.

Süreklilik:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2.28)$$

ve hareket denklemi:

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w \phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \dots\dots\dots (2.29)$$

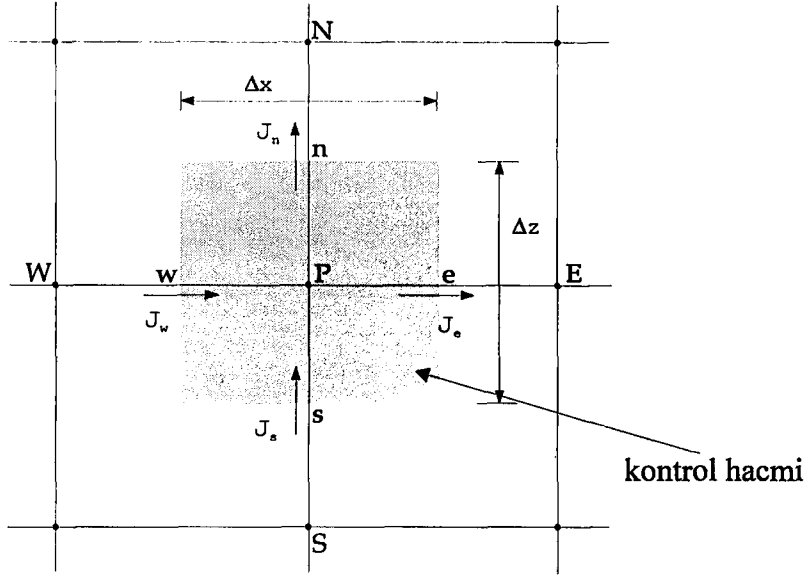
Bu denklemlerin ayrıklaştırılmasında sonlu hacimler yöntemi kullanılmaktadır. Bu metodla denklemlerin ayrıklaştırılması için tüm temel bilgiler ve ihtiyaç duyulan kavramlar bir boyutlu akım denklemi için bir önceki bölümlerde çıkarılmış olup bu bilgiler iki ve üç boyutlu akımlar için de geliştirilip kullanılabilmektedirler.

³Korunum: Tüm çözüm bölgesi için kontrol hacmini terkeden temsili değişkenin akısı komşu kontrol hacmine giren akıya eşit olmalıdır.

⁴ Sınır şartı, ayrıklaştırılmış sınır şartı denkleminde yer alan komşu katsayıların aynı işareti (genelde pozitif) ve merkezi katsayı denkleminde yer alan lineerize edilmiş kaynak teriminin negatif işareti taşımamasını öngörmektedir ve bu şartlar sağlandığı zaman cebirsel denklemlerin çözümü yakınsak olabilmektedir.

⁵ Taşıyıcılık, Peclet sayısının büyüklüğü ile etkilediği yönü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Bu amaç için (Şekil 2.1.2.1.) iki boyutlu bir akımın koordinat sistemini, geometrisini ve diğer ihtiyaç duyulan parametrelerini göstermektedir.



Şekil 2.1.2.1. İki boyutlu akım için kontrol hacmi

İki boyutlu bir akımı tanımlayan diferansiyel denklemin ayrıklaştırılması için kontrol hacmi yüzlerindeki akıların J_w , J_e , J_n ve J_s tanımlanması gerekmektedir. J_e kontrol hacminin doğu yüzey alanında ($A_e = \Delta z \cdot 1$) hüküm süren toplam akıyı ifade etmektedir. J_w , J_n ve J_s sırası ile batı, kuzey ve güney kontrol hacmi yüzey alanlarındaki ($A_w = \Delta z \cdot 1$), ($A_n = \Delta x \cdot 1$) ve ($A_s = \Delta x \cdot 1$) akıyı ifade etmektedirler.

(2.29) hareket denklem, toplam akılar J_x ve J_z türünden ifade edildikten sonra bu denklemler Şekil 2.1.2.1.'deki kontrol hacmi üzerinden entegre edilip, ayrıklaştırılmış denklemler türetilmektedir.

J_x ve J_z , x- ve z-ekseni yönündeki toplam akıları tanımlayıp, konvektif ve difüzyon terimlerinden oluşmakta ve genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedirler (Patanker, 1980):

$$J_x = \rho u \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots \dots \dots (2.30)$$

ve

$$J_z = \rho w \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots \dots \dots (2.31)$$

u ve w, x- ve z-ekseni yönündeki hız bileşenleridir.

Toplam akıların tanımları (2.29) denkleminde yerlerine konursa genel diferansiyel denklemi aşağıdaki şeklini almaktadır.

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S \dots \dots \dots (2.32)$$

(2.32) denklemi Şekil 2.1.2.1.'de gösterilen kontrol hacmi üzerinden entegre edilip ilgili sınırlar yerlerine konulup değerlendirilirse, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (S_c + S_p \phi_p) \Delta x \Delta z \dots \dots \dots (2.33)$$

J_e ve J_w $\int J_x dy$ ve J_s ve J_n ise $\int J_z dz$ olarak ve S ($S = S_c + S_p \phi_p$) lineerize edilmiş kaynak terimi olarak tanımlanmaktadır. Benzeri bir yöntemle süreklilik denklemi de kontrol hacmi üzerinden entegre edilip değerlendirilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \dots \dots \dots (2.34)$$

F_e , F_w , F_s ve F_n kontrol hacmi yüzlerinden geçen akım debileri olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$F_e = (\rho u)_e A_e = (\rho u)_e \Delta z \dots \dots \dots (2.35a)$$

$$F_w = (\rho u)_w A_w = (\rho u)_w \Delta z \dots \dots \dots (2.35b)$$

$$F_s = (\rho w)_s A_s = (\rho w)_s \Delta x \dots \dots \dots (2.35c)$$

$$F_n = (\rho w)_n A_n = (\rho w)_n \Delta x \dots \dots \dots (2.35d)$$

Hareket denklemini ayırklaştırmak için (2.34) denklemini ϕ_p ile çarpılırsa ve (2.33) denkleminden çıkarılırsa (2.36) denklemi elde edilir:

$$(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) = (S_c + S_p \phi_p) \Delta x \Delta z \dots \dots \dots (2.36)$$

Öngörülen bu matematiksel işlemler süreklilik ve hareket denklemin ayrıklaştırılmış halinin türetilmesi için yapılmıştır. Aşağıdaki verilen ilişkiler kullanılırsa (Patanker, 1980):

$$J_w - F_w \phi_P = a_w (\phi_w - \phi_P) \dots \dots \dots (2.37a)$$

$$J_e - F_e \phi_P = a_e (\phi_P - \phi_E) \dots \dots \dots (2.37b)$$

$$J_n - F_n \phi_P = a_n (\phi_P - \phi_N) \dots \dots \dots (2.37c)$$

$$J_s - F_s \phi_P = a_s (\phi_S - \phi_P) \dots \dots \dots (2.37d)$$

ve (2.36) denkleminde yerlerine konulursa, iki boyutlu akım için ayrıklaştırılmış denklem elde edilir:

$$a_e (\phi_P - \phi_E) - a_w (\phi_w - \phi_P) - a_s (\phi_S - \phi_P) + a_n (\phi_P - \phi_N) = (S_c + S_p \phi_P) \Delta x \Delta z \dots \dots \dots (2.38)$$

Bu denklem tekrar düzenlenip aşağıdaki şekilde ifade edilirse, iki boyutlu akım için genel ayrıklaştırılmış denklem elde edilir:

$$(a_e + a_w + a_s + a_n - S_p \Delta x \Delta z) \phi_P = a_e \phi_E + a_w \phi_w + a_s \phi_S + a_n \phi_N + S_c \Delta x \Delta z \dots \dots \dots (2.39)$$

veya

$$a_p \phi_P = a_e \phi_E + a_w \phi_w + a_s \phi_S + a_n \phi_N + b \dots \dots \dots (2.40)$$

Merkez katsayısı ve diğer komşu katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

Merkez katsayısı a_p ve b :

$$a_p = a_e + a_w + a_s + a_n - S_p \Delta x \Delta z$$

$$b = S_c \Delta x \Delta z$$

ve komşu katsayılar:

$$a_w = D_w A(|Pe_w|) + \max[F_w, 0] \dots \dots \dots (2.41a)$$

$$a_e = D_e A(|Pe_e|) + \max[-F_e, 0] \dots \dots \dots (2.41b)$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \max[-F_n, 0] \dots \dots \dots (2.41c)$$

$$a_s = D_s A(|Pe_s|) + \max[F_s, 0] \dots \dots \dots (2.41d)$$

Difüzyon iletkenliği ve Peclet sayıları sırası ile kontrol hacmi yüzlerinde aşağıdaki gibi ifade edilmektedirler:

$$D_w = \frac{\mu_w \Delta z}{(\delta x)_w}, \quad D_e = \frac{\mu_e \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad D_n = \frac{\mu_n \Delta x}{(\delta z)_n} \quad \text{ve} \quad D_s = \frac{\mu_s \Delta x}{(\delta z)_s} \dots \dots \dots (2.42)$$

ve Peclet sayıları:

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad Pe_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad Pe_n = \frac{F_n}{D_n} \quad \text{ve} \quad Pe_s = \frac{F_s}{D_s} \dots \dots \dots (2.43)$$

$A(|Pe|)$ sonlu hacimler yönteminde, denklemleri ayırklaştırmak için seçilen farklar yöntemine bağlı olup, her yöntem için aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 2.1.2.1. $A(|Pe|)$ 'nin farklar yöntemlerine göre formülleri

Yöntem	$A(Pe)$ için kullanılan formül
Merkezi farklar	$1-0.5 Pe $
Upwind farklar	1
Karma farklar	$\max[0, 1-0.5 Pe]$
Üs-kurallı farklar	$\max[0, (1-0.1 Pe)^4]$

2.1.3. Zamana Bağlı İki Boyutlu Akım Denklemi

Zamana bağlı sıkışamaz akım için süreklilik ve hareket denklemi bölüm 2.1.'de verilmiştir. Bölüm 2.1.2.'de genel olarak tanımlanan akılar J_x ve J_z zamana bağlı diferansiyel denkleminde yerlerine konulursa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S \dots \dots \dots (2.44)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem Şekil 2.1.2.1.'de gösterilen kontrol hacmi üzerinden entegre edilip değerlendirilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{(\rho_P \phi_P - \rho_P^o \phi_P^o) \Delta x \Delta z}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_c + S_P \phi_P) \Delta x \Delta z \dots (2.45)$$

Zamana bağlı olan terimler ρ_P ve ϕ_P tüm kontrol hacminde geçerli varsayılmaktadır. (2.45) denkleminde yer alan ρ_P^o ve ϕ_P^o eski değerler (belli bir zaman adımının başlangıcındaki değerler, t anındaki), diğer parametreler ise (üst indisi olmayanlar) tamamen implisit⁶ yöntemi kullanılarak $t+\Delta t$ anındaki yeni değerler olarak adlandırılırlar. Benzeri bir yaklaşımla süreklilik denklemini Şekil 2.1.2.1.'deki kontrol hacmi bölgesi sınırları için entegre edilip değerlendirilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^o) \Delta x \Delta z}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \dots (2.46)$$

Bölüm 2.1.2.'de uygulanan benzeri bir yaklaşım prosedürü ile zamana bağlı iki boyutlu akım için ayrıklaştırılmış denklem genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_P^o \phi_P^o + b \dots (2.47)$$

merkez katsayısı a_P ve b:

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^o - S_P \Delta x \Delta z$$

$$b = S_c \Delta x \Delta z$$

ve zamana bağlı olan terim:

$$a_P^o = \frac{\rho_P^o \Delta x \Delta z}{\Delta t}$$

olarak ifade edilmektedirler.

⁶ Tamamen İmplicit Yöntemi: İki komşu grid noktası arasındaki temsili değişkenin zamana göre değişimini gözönüne almaktadır.

Sıkışamaz bir akım için ρ_p ve ρ_p° değerleri birbirine eşit olduğundan dolayı süreklilik denkleminde yer alan zamana bağlı olan terim sıfır olmaktadır. Tamamen implisit yaklaşımını kullanarak türetilen ayrıklaştırılmış denklemlerde zamana bağlı terimler yer almaktadır. Bunlar daimi ayrıklaştırılmış denklemler ile mukayese edilirse, farklar yalnızca merkez katsayısı a_p için verilen denklemde a_p° ve ayrıklaştırılmış (2.47) denklemin sağ tarafında yer alan $a_p^\circ \phi_p^\circ$ terimlerinden oluşmaktadır. Diğer bütün terimler daimi olarak elde edilen terimlerin aynılarını teşkil etmektedirler.

Bir önceki bölümlerde ayrıklaştırılmış denklemlerdeki katsayıları tanımlamak için dört yöntem gösterilmiştir. İki ve üç boyutlu akım problemlerinde tam çözüme çok yakın sonuçlar veren Karma ve Üs-kurallı farklar yöntemleridir. Bundan dolayı bu iki yöntem sırası ile ayrıntılı bir şekilde genel olarak zamana bağlı bir, iki ve üç boyutlu akımlar için ve ihtiyaç duyulan tüm parametrelerle birlikte ekler kısmında (Ek.2 ve 3) verilmiştir. Eğer akım problemi zamandan bağımsız ise a_p° ve $a_p^\circ \phi_p^\circ$ terimleri sıfıra eşitlenmektedir.



3. İKİ BOYUTLU AKIM ALANININ HESAPLANMASINDA BASINÇ-HIZ BAĞINTISI VE YÖNTEME ETKİLERİ

Bu bölümde sonlu hacimler yöntemi ile ayrıklaştırılmış hız bileşeni ve basınç denklemleri verilmekte ve hız basınç ilişkileri de gösterilmektedir. Bu denklemler bilgisayarda çözümleneceği için her denklem ilgili kontrol hacmine göre notasyon sistemini kullanarak türetilmiştir. Bilgisayarda kullanılan hesaplama yöntemi SIMPLE algoritması detaylı bir şekilde açıklanmaktadır. Süreklilik ve hareket denklemleri zamana bağlı bir hareket için laminer sıkışamaz akışkana göre aşağıdaki gibi verilmektedirler:

Süreklilik:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (3.1)$$

x-ekseni doğrultusundaki momentum denklemi:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \dots \dots \dots (3.2)$$

z-ekseni doğrultusundaki momentum denklemi:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} + S_w \dots \dots \dots (3.3)$$

(3.2) ve (3.3) denklemlerindeki basınç gradyanı ayrı olarak yazılmış olup ayrıntılı bir şekilde incelenmesi gerekmektedir. Yukardaki denklemlerin çözümü iki yeni problemi de birlikte getirmektedir:

- Hareket denklemlerindeki konvektif terimler gayri-lineer terimlerden, örneğin x-ekseni yönünde $u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$, den oluşmaktadır.
- Hız bileşenleri her üç denklemde (süreklilik ve momentum denklemlerinde) yer aldığı için bunlar birbirine bağlı olmakta ve çözümleri güçleşmektedir. Ayrıca basınç gradyanları her iki hareket denkleminde yer almakta ve çözümleri çok karmaşık bir problem teşkil etmektedir, çünkü yalnız basıncı tanımlayan ayrı herhangi bir denklem mevcut değildir.

Her iki zorluk, problemlerdeki gayri-lineer terimler ve basınç hız bağıntısı, iterasyon yardımı ile çözülmektedir. Bu tip akım problemleri çözümünde en fazla kullanılan algoritma ve bir sonraki bölümde ayrıntılı bir şekilde verilecek olan SIMPLE algoritmasıdır. Bu algoritmada, kontrol hacmi yüzlerinden geçen kütle debisi (F) tahmin edilen hız bileşenlerinden hesaplanmaktadır. Ayrıca, tahmin edilen basınç alanı momentum ve süreklilik denklemlerinden türetilen basınç düzeltimi denklemini çözmek için de kullanılmaktadır. Basınç düzeltimi bir sonraki adımda hız ve basınç alanının yenilenmesi için kullanılmaktadır.

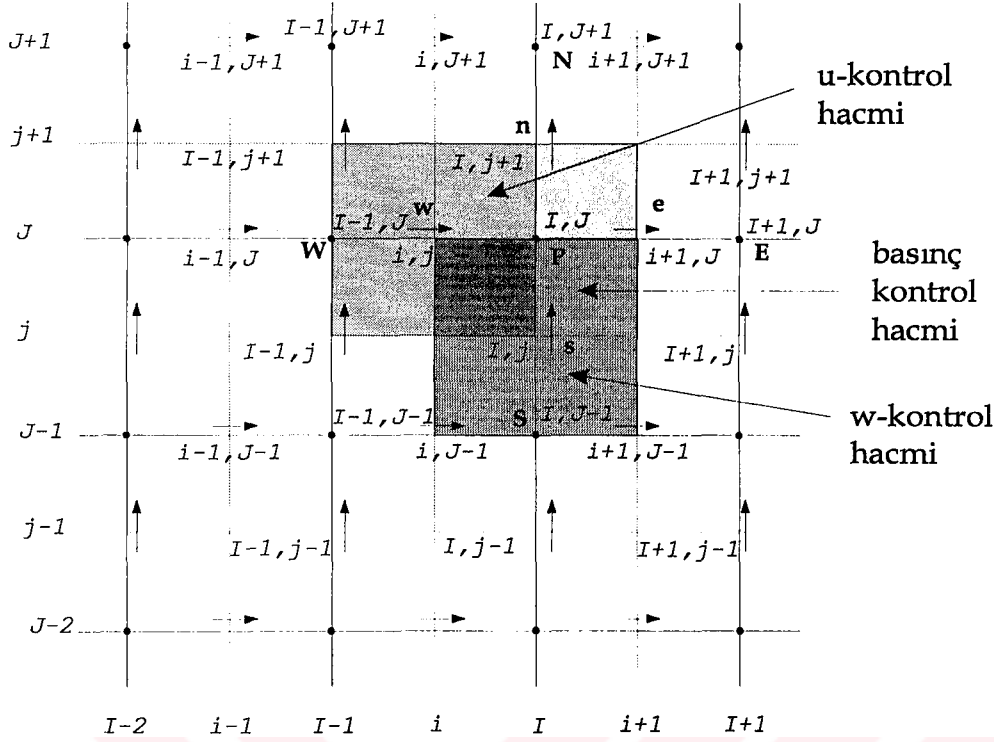
3.1. Zamandan Bağımsız İki Boyutlu Akım Alanının Hesaplanması

Hareket denklemlerinde yer alan basınç gradyanları bir kaynak terimi teşkil ettiği için özel olarak incelenmesi ve ayrıklaştırılması gerekmektedir. Süreklilik ve hareket denklemleri ayrıklaştırılıp u - ve w -hız bileşenleri için de ifade edilecektir.

3.1.1. Basınç Gradyanı Denklemleri

Basınç gradyanı denklemlerini ayrıklaştırmaya başlamadan önce basınç ve hız bileşenlerinin ana ve ara grid noktalardan oluşan akım bölgesinde nereye yerleştirileceği konusunda karar verilmesi gerekmektedir. Skalar büyüklükler örneğin, basınç, yoğunluk, sıcaklık, vs. ana noktalarda tanımlanmaktadır. Eğer hız bileşenlerinin yerleri aynı noktalarda (ana noktalarda) tanımlanırsa, kontrol hacmi bölgesinde üniform olmayan basınç alanı etki edebilir, ve basıncın etkisi momentum denklemlerinde doğru bir şekilde ifade edilmeyebilir. Bu problemi giderebilmek için çözüm yolu olarak hız bileşenleri için zikzak grid noktaları döşemesi kullanılmaktadır (Harlow and Welch, 1965). Bu yaklaşımdaki amaç, skalar büyüklükleri ana noktalarda değerlendirmek ve hız bileşenleri ise kontrol hacmi yüzlerinin çevresinde ve merkezinde yer alan zikzak grid noktalarda hesaplanmasını öngörmektedir. Şekil 3.1.1.1. iki boyutlu akımı her üç değişken (P , u , w) için ayrı ayrı kontrol hacmilerini, ana noktaları ve zikzak grid noktalarını göstermektedir.

Basınç için tanımlanan kontrol hacminin merkez noktası (I , J)' dir. Hız bileşenleri u ve w için kontrol hacimleri tanımlanmış olup sırası ile bu kontrol hacimleri (i , J) ve (J , i) merkez noktalarına sahiptirler.



Şekil 3.1.1.1. Tüm değişkenler için tanımlanan kontrol hacimleri

Skalar değişkenler (Şekil 3.1.1.1.) kontrol hacminde (.) işareti ile gösterilen noktalarda tanımlanmaktadır. Hızlar ise, ana noktalar arasında hücre yüzlerinde tanımlanıp, ok işareti ile gösterilmektedir. Yatay ok işareti x-ekseni yönündeki u-hızlarını ve dikey ok işareti ise z-ekseni yönündeki w-hızlarını göstermektedir. x-ekseni doğrultusunda zikzaklı u-hızlarını tanımlayabilmek için dikey düz çizgilerin ortasında dikey kesik çizgiler tanımlanıp ve bu kesik çizgilerin yatay düz çizgiler ile kesiştikleri noktalar u-hızlarının yerlerini vermektedir. Benzeri bir şekilde z-ekseni doğrultusunda w-hızlarını elde etmek için yatay düz çizgilerin ortasında yer alan yatay kesik çizgiler elde edilip, bunların dikey düz çizgilerle kesiştikleri noktalar ise w-hızlarının yerlerini vermektedirler.

E, W, N, S notasyonlarına ilâveten (Şekil 3.1.1.1.) yeni sistemin notasyonları, e, w, n ve s grid çizgileri ve hücre yüzleri de gösterilmiştir. Bu notasyonlar bir sonraki bölümlerde daha ayrıntılı bir şekilde açıklanıp kullanılacaktır.

E, W, N, S noktaları yanında u-hızları hücre yüzlerinde ‘e’ ve ‘w’ ve w-hızları ise kontrol hacminin ‘n’ ve ‘s’ yüzlerinde gösterilmiştir.

u- ve w-hız bileşenleri için kontrol hacimleri birbirinden ve skalar kontrol hacminden farklı olmaktadır. Zikzaklı grid düzenlemesinde basınç noktaları u-hızlarının kontrol hacmi yüzleri ile çakışmaktadır. Basınç gradyanı $\partial P / \partial x$ u-kontrol hacmi için aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_p - P_w}{\delta x_u} \dots \dots \dots (3.6)$$

δx_u u-kontrol hacmi için x-ekseni yönündeki genişliği belirtmektedir. Benzeri bir şekilde $\partial P / \partial z$ w-kontrol hacmi için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_p - P_s}{\delta z_w} \dots \dots \dots (3.7)$$

δz_w w-kontrol hacmi için z-ekseni yönündeki genişliği belirtmektedir.

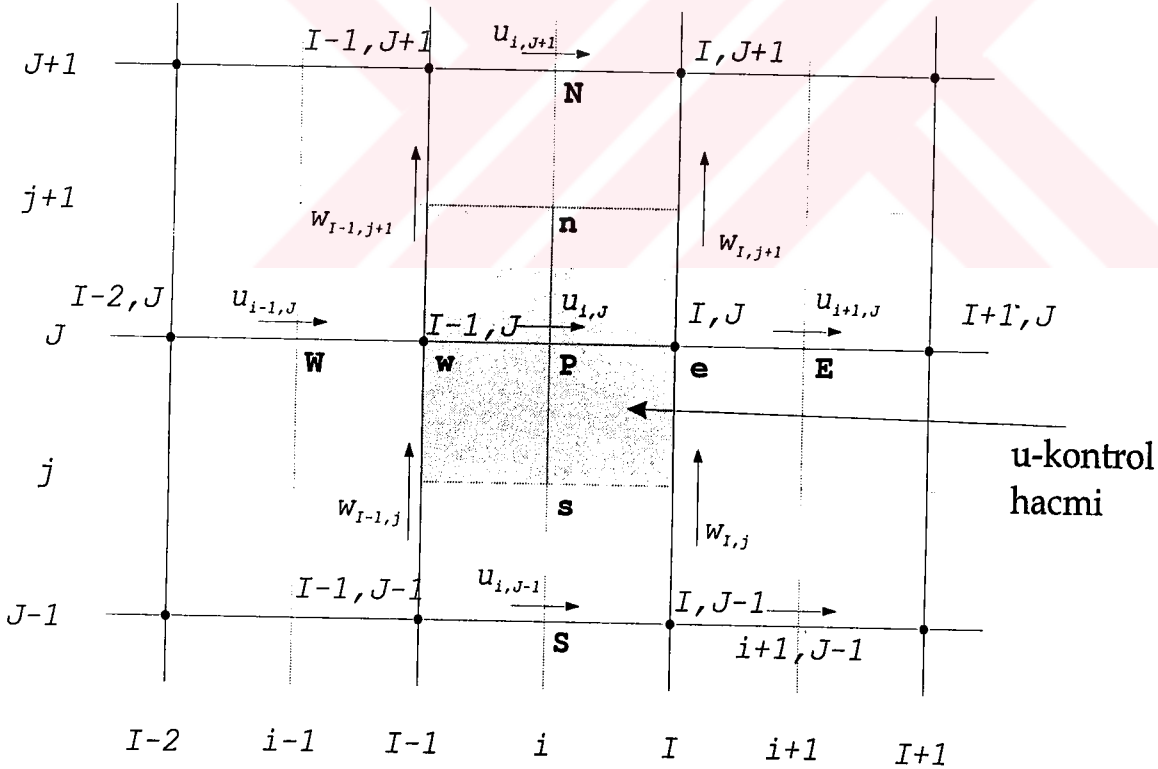
Böylelikle hız bileşenleri için öngörülen zikzaklı grid noktaları döşemesi momentum denklemlerinde ortaya çıkabilecek olan gerçek olmayan basınç gradyanlarını ortadan kaldırmış olmaktadır. Zikzaklı grid döşemesinin bir diğer avantajı ise, hızların tam olarak arzu edilen yerlerde hesaplanmasını da sağlamaktadır. Bundan dolayı kontrol hacmi yüzlerindeki hızları hesaplamak için herhangi bir interpolasyona ihtiyaç duyulmamaktadır.

3.1.2. Hareket Denklemleri

Bu bölümde ayrıklaştırılmış hareket denklemleri ve bu denklemlerde yer alan parametreler Şekil 3.1.1.1.’de belirtilen kontrol hacimleri ve notasyonları kullanılarak tanımlanmaktadır. Hız gridleri zikzaklı oldukları için grid çizgileri ve kontrol hacmi yüzleri baz alınarak yeni notasyonlar kullanılmaktadır. Şekil 3.1.1.1.’de düz çizgiler büyük harflerle sayılmaktadır. x-ekseni yönündeki ...I-1, I, I+1..., v.s ve z-ekseni yönündeki sıralama ise ...J-1, J, J+1... v.s’den oluşmaktadır. Kesik çizgili doğrular ise hız bileşenlerinin kontrol hacmi yüzlerini ifade etmekte ve küçük harflerle sırası ile x- ve z-ekseni yönünde ...i-1, i, i+1... ve ...j-1, j, j+1... şeklinde gösterilmektedirler.

Alt yazı notasyon sistemi grid noktalarının ve kontrol hacmi yüzleri yerlerini tam olarak tanımlanmasında kullanılmaktadır.

Skalar noktalar, iki düz çizgi grid doğrusunun kesişmesinden elde edilir ve iki büyük harfle teşhis edilir, örneğin (Şekil 3.1.1.1.) P noktası (I,J) olarak tanımlanmaktadır. x-ekseni yönündeki hız bileşenleri e ve w kontrol hücrelerin yüzlerinde tanımlanmaktadır. Bu hızlar kontrol hacmi sınırlarını tanımlayan doğrular ile düz grid doğrularının kesiştiği noktalarda yer almaktadır ve bundan dolayı yeni notasyon sistemi küçük ve büyük harflerden oluşmaktadır. Örneğin, (Şekil 3.1.1.1.) P noktasının etrafındaki kontrol hacminin batı yüzü (w), (i,J) noktası ile teşhis edilmektedir. Aynı yaklaşımla w-hızların yerlerinin tanımlanması büyük ve küçük harflerin birleşmesinden oluşmaktadır. Örneğin, (Şekil 3.1.1.1.) w-hızı için tanımlanan kontrol hacmin güney yüzü, (s), (I,j) noktası ile verilmektedir. Kontrol hacmi yüzlerindeki hız bileşenlerini tanımlamak için ileri veya geri zikzak hız gridlerini kullanılabilir. (Şekil 3.1.1.1.) i-yerleri u-hızları u_{ij} için skalar noktadan (I,J) $-1/2\delta x_u$ mesafesi kadar geri olduğundan, üniform grid noktaları geri zikzak yaklaşımı ile yerleştirilmiştir. Benzeri bir şekilde j-yerleri için w-hızları w_{ji} skalar noktasından (I,J) $-1/2\delta z_w$ uzaklıkta yer almaktadır. Şekil 3.1.2.1. u-hız bileşenleri için kontrol hacmini göstermektedir.



Şekil 3.1.2.1. u-hız bileşenleri için kontrol hacmi

Yeni koordinat sistemine göre, (i,J) noktalarındaki u-hız bileşenleri için ayrıklaştırılmış (3.2) hareket denklemi aşağıda verilmiştir:

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J}.....(3.8)$$

$b_{i,J}$: u-hareket denklemindeki kaynak terimini ve ağırlık kuvvetini içermektedir,

$A_{i,J}$:u-kontrol hacmin doğu veya batı yüzey alanını tanımlamaktadır.

(3.8) denklemdaki basınç gradyanı terimi, u-kontrol hacminde yer alan noktalar arasında lineer interpolasyonla ayrıklaştırılmıştır.

Yeni sistemde, u-kontrol hacmi için tanımlanan komşu noktaları W, E, N ve S u-momentum ayrıklaştırılmış denkleminde yer alan terim için $\sum a_{nb}u_{nb}$ ⁷ sırası ile (i-1,J), (i+1,J), (i,J+1) ve (i,J-1) olarak tanımlanmaktadır. Katsayıların değerleri a_{ij} ve a_{nb} farklar yöntemlerinden (karma, üs-kurallı) birisini kullanarak hesaplanabilir. Katsayılar u-kontrol hacmi yüzlerindeki kütleli debi (F) ve difüzyon iletkenliğinin (D) birleşiminden oluşmaktadır. Yeni notasyon sistemi uygulanırsa, Şekil 3.1.2.1.'deki u-kontrol hacmi için F ve D değerleri her kontrol hacmi yüzleri w, e, n ve s için sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

Konvektif terimler:

$$F_w = (\rho u A)_w = \frac{F_{i,J} + F_{i-1,J}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) u_{i,J} + \left(\frac{\rho_{I-1,J} + \rho_{I-2,J}}{2} \right) u_{i-1,J} \right] \Delta z(3.9a)$$

$$F_e = (\rho u A)_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i,J}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I+1,J} + \rho_{I,J}}{2} \right) u_{i+1,J} + \left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) u_{i,J} \right] \Delta z(3.9b)$$

$$F_n = (\rho w A)_n = \frac{F_{I,J+1} + F_{I-1,J+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,J+1} + \rho_{I,J}}{2} \right) w_{I,J+1} + \left(\frac{\rho_{I-1,J+1} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) w_{I-1,J+1} \right] \Delta x$$

(3.9c)

⁷ $\sum a_{nb}u_{nb}$ kontrol hacmi etrafındaki komşu katsayılar ile bunlara bağlı ilgili hızların çarpımlarının toplamını ifade etmektedir.

$$F_s = (\rho w A)_s = \frac{F_{I,j} + F_{I-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) w_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,j} + \rho_{I-1,j-1}}{2} \right) w_{I-1,j} \right] \Delta x. (3.9d)$$

ve difüzyon terimleri:

$$D_w = \frac{\mu_{I-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \Delta z \dots \dots \dots (3.9e)$$

$$D_e = \frac{\mu_{I,j}}{x_{i+1} - x_i} \Delta z \dots \dots \dots (3.9f)$$

$$D_s = \frac{\mu_{I-1,j} + \mu_{I,j} + \mu_{I-1,j-1} + \mu_{I,j-1}}{4(z_j - z_{j-1})} \Delta x \dots \dots \dots (3.9g)$$

$$D_n = \frac{\mu_{I-1,j+1} + \mu_{I,j+1} + \mu_{I-1,j} + \mu_{I,j}}{4(z_{j+1} - z_j)} \Delta x \dots \dots \dots (3.9h)$$

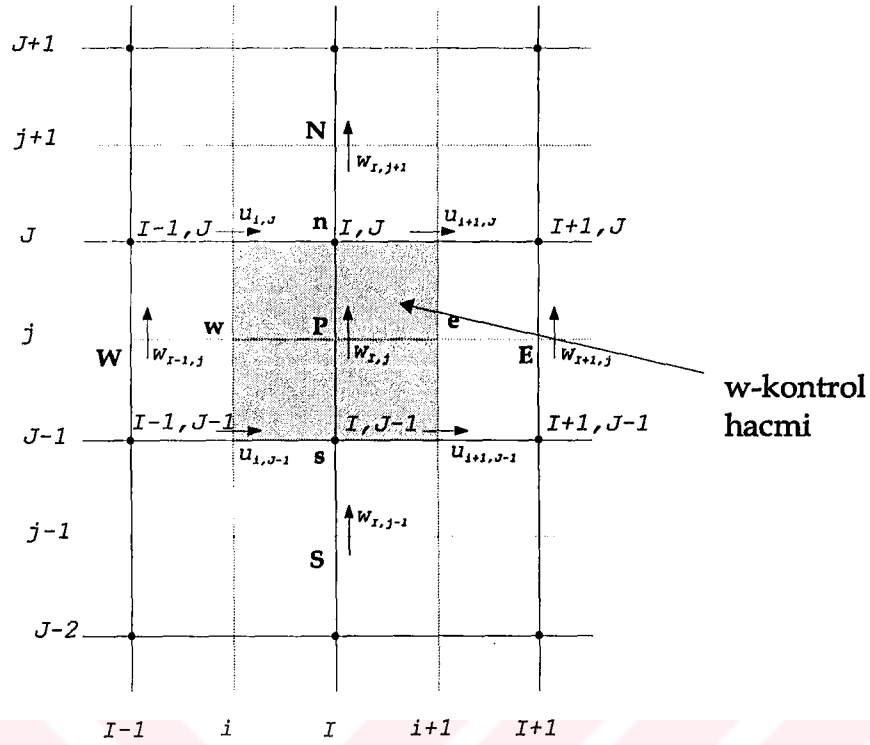
Yoğunluk sıkışamaz akım için sabit ve skalar bir büyüklüktür.

Benzeri bir yaklaşımla w-hızları için de (3.3) hareket denklemi ayrıklaştırılıp aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$a_{I,j} w_{I,j} = \sum a_{nb} w_{nb} + (P_{I,j-1} - P_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} \dots \dots \dots (3.10)$$

Şekil 3.1.2.2. w-kontrol hacmini, yeni notasyon sistemini ve komşu hız bileşenlerini göstermektedir.

Merkez katsayısı $a_{I,j}$ ve kontrol hacmi yüzlerindeki komşu katsayılar a_{nb} F ve D'nin kombinasyonunu içermektedir. Kontrol hacmi yüzlerinde tanımlanan F ve D'nin değerleri u-kontrol hacminde olduğu gibi benzeri bir yaklaşımla w-kontrol hacmi için de aşağıdaki gibi elde edilir:



Şekil 3.1.2.2. w-hız bileşenleri için kontrol hacmi

Konvektif terimler:

$$F_w = (\rho u A)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,j-1} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right] \Delta z \dots (3.11a)$$

$$F_e = (\rho u A)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I+1,j} + \rho_{I,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{I,j-1} + \rho_{I+1,j-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right] \Delta z \dots (3.11b)$$

$$F_s = (\rho w A)_s = \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j-1} + \rho_{I,j-2}}{2} \right) w_{I,j-1} + \left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) w_{I,j} \right] \Delta x \dots (3.11c)$$

$$F_n = (\rho w A)_n = \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) w_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I,j+1} + \rho_{I,j}}{2} \right) w_{I,j+1} \right] \Delta x \dots (3.11d)$$

Difüzyon terimleri:

$$D_w = \frac{\mu_{I-1,J-1} + \mu_{I,J-1} + \mu_{I-1,J} + \mu_{I,J}}{4(x_I - x_{I-1})} \Delta z \dots \dots \dots (3.11e)$$

$$D_e = \frac{\mu_{I,J-1} + \mu_{I+1,J-1} + \mu_{I,J} + \mu_{I+1,J}}{4(x_{I+1} - x_I)} \Delta z \dots \dots \dots (3.11f)$$

$$D_s = \frac{\mu_{I,J-1}}{z_j - z_{j-1}} \Delta x \dots \dots \dots (3.11g)$$

$$D_n = \frac{\mu_{I,J}}{z_{j+1} - z_j} \Delta x \dots \dots \dots (3.11h)$$

Her iterasyonda F'nin değeri u ve w hız bileşenleri için bir önceki iterasyondan elde edilen değerlere bağlı olarak hesaplanmaktadır.

Verilen bir basınç alanı için, momentum denklemleri u- ve w-kontrol hacimleri için (3.8) ve (3.10) denklemleri olarak ifade edilirler. Bu denklemlerin çözümü sözkonusu hesap bölgesindeki hız alanını vermektedir. Basınç alanı doğru ise sonuç olarak elde edilen hız alanı süreklilik denklemini sağlaması gerekmektedir. Genelde basınç önceden bilinmediği için ve basınç ile hız bileşenleri arasındaki bağıntıyı sağlayan ve bu parametreleri hesaplamak için kullanılan yöntemlerden bir tanesi daha önceden de belirtildiği gibi SIMPLE algoritmasıdır.

3.1.3. SIMPLE Algoritması

SIMPLE algoritması ilk olarak laminar zamandan bağımsız iki boyutlu akım için elde edilip daha sonra zamana bağlı akım için de geliştirilecektir. Bu algoritma hız bileşenleri ve basınçları hesaplamak için “**tahmin ve düzelt**” yönteminden oluşmaktadır. SIMPLE algoritmasını başlatabilmek için hesap bölgesinde basınç bilinmediğinden dolayı basınç alanının önceden tahmin edilmesi gerekmektedir. Buna göre, u^* ve w^* değerleri (3.8) ve (3.10) hareket denklemlerinden tahmin edilen basınç alanı (P^*) için hesaplanmaktadır veya hareket denklemlerin tahmin edilen basınç alanı (P^*) için çözümü u^* ve w^* tahmini hız bileşenlerini vermektedir. Tahmin edilen basınç

alanı (P^*) (3.8) ve (3.10) denklemlerinde yerlerine konursa u^* ve w^* hız bileşenleri için sırası ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_{I-1,j}^* - P_{I,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \dots (3.12)$$

$$a_{I,j} w_{I,j}^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + (P_{I,j-1}^* - P_{I,j}^*) A_{I,j} + b_{I,j} \dots (3.13)$$

Doğru sonuçlar elde edebilmek için tahmin edilen P^* ve buna bağlı olarak hesaplanan tahmini hız bileşenlerin (u^* ve w^*) düzeltilmesi gerekmektedir. Basınç düzeltimi (P') düzeltilmiş basınç alanı (P) ile tahmin edilen basıncın (P^*) farkı olarak tanımlanmaktadır:

$$P = P^* + P' \dots (3.14)$$

Benzeri bir şekilde u' ve w' hız bileşeni düzeltimleri de düzeltilmiş hızlara (u , w) ve tahmini hız bileşenlerine (u^* ve w^*) bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$u = u^* + u' \dots (3.15)$$

$$w = w^* + w' \dots (3.16)$$

Bu denklemlerde yer alan ve bilinmeyen hız bileşeni düzeltimleri (u' ve w') ve basınç düzeltimi (P') türetilmesi işlemi aşağıda gösterilmiştir. (3.12) ve (3.13) denklemleri (3.8) ve (3.10) denklemlerinden sırası ile çıkarılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) + [(P_{I-1,j} - P_{I-1,j}^*) - (P_{I,j} - P_{I,j}^*)] A_{i,j} \dots (3.17)$$

$$a_{I,j} (w_{I,j} - w_{I,j}^*) = \sum a_{nb} (w_{nb} - w_{nb}^*) + [(P_{I,j-1} - P_{I,j-1}^*) - (P_{I,j} - P_{I,j}^*)] A_{I,j} \dots (3.18)$$

(3.14)'den (3.16)'ya kadar denklemler kullanılırsa (3.17) ve (3.18) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$a_{i,j} u'_{i,j} = \sum a_{nb} u'_{nb} + (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) A_{i,j} \dots (3.19)$$

$$a_{I,j} w'_{I,j} = \sum a_{nb} w'_{nb} + (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) A_{I,j} \dots \dots \dots (3.20)$$

(3.19) ve (3.20) denklemlerini basitleştirebilmek için denklemlerde yer alan $\sum a_{nb} u'_{nb}$ ve $\sum a_{nb} w'_{nb}$ terimleri ihmal edilebilmektedir. Bu varsayım SIMPLE algoritmasında yapılan en büyük yaklaşımdır. Böylece hız bileşeni düzeltimleri için aşağıdaki denklemler elde edilmektedir:

$$u'_{i,j} = d_{i,j} (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) \dots \dots \dots (3.21)$$

ve

$$w'_{I,j} = d_{I,j} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \dots \dots \dots (3.22)$$

Denklemlerde yer alan $d_{i,j}$ ve $d_{I,j}$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır ve genel olarak d formüllerinde yer alan $a_{i,j}$ ve $a_{I,j}$ merkez katsayılarıdır.

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \dots \dots \dots (3.23a)$$

$$d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} \dots \dots \dots (3.23b)$$

(3.21) ve (3.22) hız bileşeni düzeltimlerini ifade etmekte ve (3.15) ve (3.16) denklemlerinde yerlerine konursa sırası ile aşağıdaki düzeltilmiş hız bileşeni denklemleri elde edilir:

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j} (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) \dots \dots \dots (3.24)$$

$$w_{I,j} = w^*_{I,j} + d_{I,j} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \dots \dots \dots (3.25)$$

Düzeltilmiş hız bileşenleri süreklilik denklemini sağlaması gerekmektedir. Hız bileşenleri basınç düzeltimini (P') ihtiva etmekte, süreklilik denkleminde yerlerine konursa ve bazı düzenlemeler yapılırsa basınç düzeltimi denklemini (P') elde edilir. Bu işlemler aşağıda ayrıntılı bir şekilde gösterilmektedir. (3.1) süreklilik denklemini ayrıştırılmış olarak aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho w A)_{I,j+1} - (\rho w A)_{I,j}] = 0 \dots (3.26)$$

(3.26) denkleminde yer alan hız bileşenlerine ($u_{i+1,J}$ ve $w_{I,j+1}$) ihtiyaç duyulacağından (3.24) ve (3.25) denklemlerine göre benzeri bir şekilde ($u_{i+1,J}$ ve $w_{I,j+1}$) aşağıdaki gibi ifade edilmektedirler:

$$u_{i+1,J} = u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J} (P'_{I,J} - P'_{I+1,J}) \dots (3.27)$$

$$w_{I,j+1} = w^*_{I,j+1} + d_{I,j+1} (P'_{I,J} - P'_{I,j+1}) \dots (3.28)$$

Bunlara bağlı d formülleri de

$$d_{i+1,J} = \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}} \dots (3.29a)$$

$$d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}} \dots (3.29b)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Elde edilen (3.24 -3.25) ve (3.27-3.29) denklemler ayrıklaştırılmış (3.26) süreklilik denkleminde yerlerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$[\rho_{i+1,J} A_{i+1,J} (u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J} (P'_{I,J} - P'_{I+1,J})) - \rho_{i,J} A_{i,J} (u^*_{i,J} + d_{i,J} (P'_{I-1,J} - P'_{I,J}))] +$$

$$[\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (w^*_{I,j+1} + d_{I,j+1} (P'_{I,J} - P'_{I,j+1})) - \rho_{I,j} A_{I,j} (w^*_{I,j} + d_{I,j} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}))] = 0 \dots (3.30)$$

ve (3.30) denklemi başka bir şekilde düzenlenirse aşağıdaki denklemler

$$[(\rho dA)_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} + (\rho dA)_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j}] P'_{I,J} =$$

$$(\rho dA)_{i+1,J} P'_{I+1,J} + (\rho dA)_{i,J} P'_{I-1,J} + (\rho dA)_{I,j+1} P'_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j} P'_{I,j-1}$$

$$+ [(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho w^* A)_{I,j} - (\rho w^* A)_{I,j+1}] \dots (3.31)$$

veya

$$a_{I,J}P'_{I,J} = a_{I+1,J}P'_{I+1,J} + a_{I-1,J}P'_{I-1,J} + a_{I,J+1}P'_{I,J+1} + a_{I,J-1}P'_{I,J-1} + b'_{I,J} \dots (3.32)$$

elde edilir.

(3.32) denklemi P' için genel ayrıklaştırılmış denklem olup katsayılar ise aşağıdaki gibi teşhis edilmektedir:

Merkez katsayısı $a_{I,J}$:

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1} \dots (3.33)$$

ve komşu katsayılar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$a_{I,I,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$	$b'_{I,J}$
$(\rho dA)_{I+1,J}$	$(\rho dA)_{I,J}$	$(\rho dA)_{I,J+1}$	$(\rho dA)_{I,J}$	$(\rho u^* A)_{I,J} - (\rho u^* A)_{I+1,J} + (\rho w^* A)_{I,J} + (\rho w^* A)_{I,J+1}$

(3.32) denklemi ayrıklaştırılmış süreklilik denklemini ifade ederken basınç düzeltimi denklemi (P') olarak da bilinmektedir ve çözümü tüm noktalardaki basınç düzeltimi alanı (P') vermektedir. Kaynak terimi b' tahmin edilen hız bileşeni alanlarından u^* ve w^* oluşmaktadır.

Basınç düzeltimi (P') türetildikten sonra düzeltilmiş basınç alanı (3.14) denkleminde elde edilebilir.

Basınç düzeltimi denkleminin çözümü iteratif yöntemde ıraksak olabilir. Bu fenomeni önleyebilmek için basınç düzeltimini (P') tanımlanan anderrelaksasyon faktörü ile çarpmak gerekmektedir. Anderrelaksasyon faktörü problemin yakınsak olabilmesini sağlamaktadır. Buna göre basınç için aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$P^{new} = P^* + \alpha_p P' \dots (3.34)$$

P^{new} elde edilen yeni basınç ve α_p P' için kullanılan anderrelaksasyon faktörüdür. $\alpha_p=0$ olduğu zaman, herhangi bir düzeltmenin uygulanmadığını ima etmektedir. İyi bir düzeltmenin yapılabilmesi için α_p 0 ile 1 arasında seçilmelidir.

Yeni hız bileşenleri de benzeri bir şekilde anderrelaksasyon faktörüne bağlı olarak elde edilebilirler.

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \dots \dots \dots (3.35)$$

ve

$$w^{new} = \alpha_w w + (1 - \alpha_w) w^{(n-1)} \dots \dots \dots (3.36)$$

$u^{(n-1)}$ ve $w^{(n-1)}$ bir önceki iterasyonda elde edilen değerlerdir. α_u ve α_w sırası ile u – ve w-hız bileşenleri için kullanılan anderrelaksasyon faktörleridir ve 0 ile 1 arasında değişmektedirler.

Bazı matematiksel işlemlerden sonra u- ve w-hız bileşenleri için ayrıklaştırılmış hareket denklemleri α_u ve α_w faktörlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,j} - P_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \left[(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} \right] u_{i,j}^{(n-1)} \dots \dots \dots (3.37)$$

ve

$$\frac{a_{I,j}}{\alpha_w} w_{I,j} = \sum a_{nb} w_{nb} + (P_{I,j-1} - P_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} + \left[(1 - \alpha_w) \frac{a_{I,j}}{\alpha_w} \right] w_{I,j}^{(n-1)} \dots \dots \dots (3.38)$$

$a_{i,j}$ ve $a_{I,j}$ merkez katsayılarını ifade etmekte ve sırası ile u- ve w-hız bileşenleri için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1} \dots \dots \dots (3.39a)$$

ve

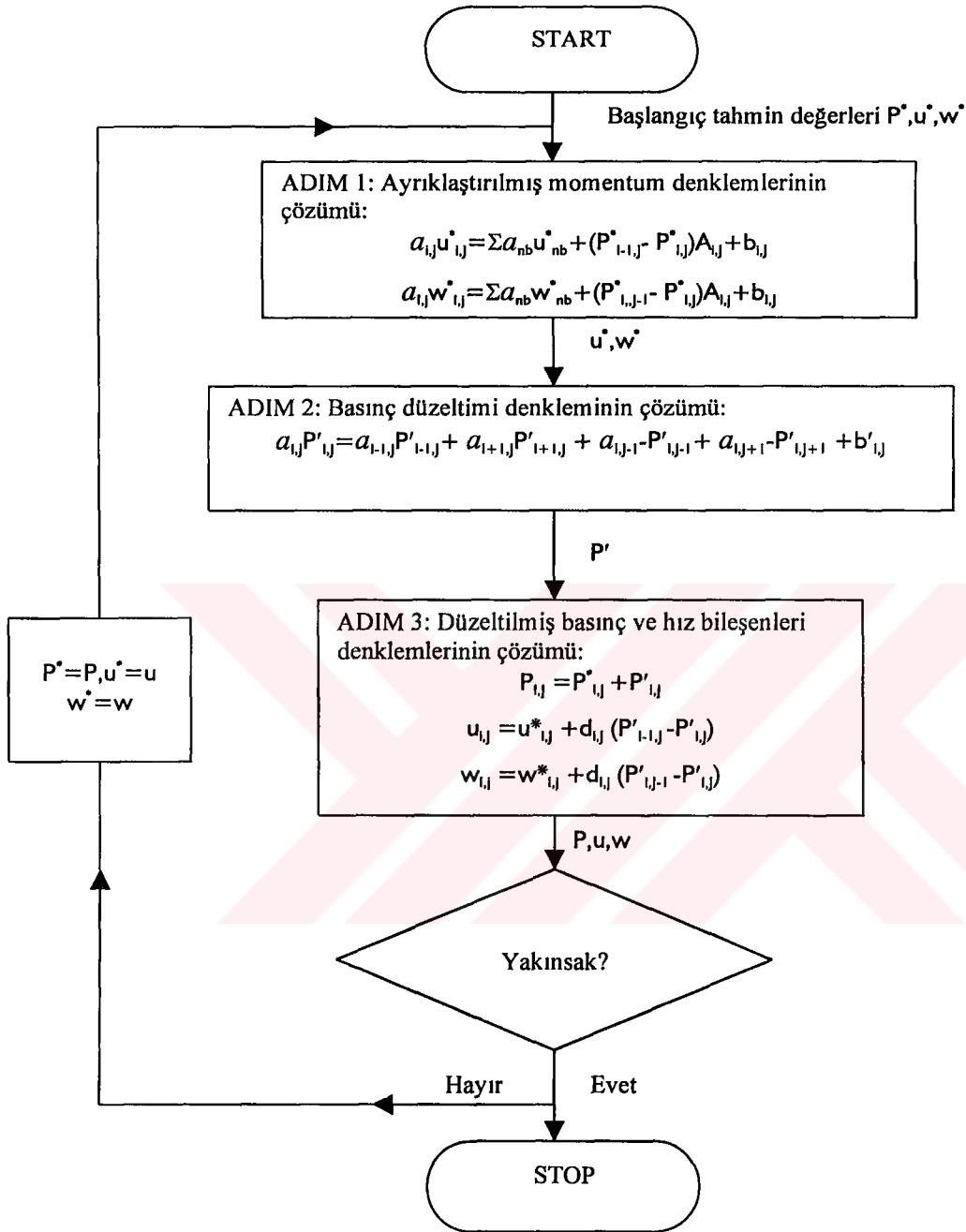
$$a_{I,j} = a_{I-1,j} + a_{I+1,j} + a_{I,j-1} + a_{I,j+1} \dots \dots \dots (3.39b)$$

Anderrelaksasyon faktörlerinin yanlış seçimi büyük problem teşkil etmektedir ve büyük α değerleri için çözümün ıraksak olmasına sebep olabilmektedirler. Küçük α değerleri için problem çok yavaş yakınsak olmaktadır. Anderrelaksasyon faktörünü optimal değerleri akım problemine bağlıdır (Patanker, 1980).

Gerek ayrıklaştırılmış hız bileşeni denklemlerinde gerekse basınç düzeltimi denkleminde yer alan katsayılar ekler kısmında verilen karma farklar yöntemi ile hesaplanmaktadır. Zamana bağlı olan terimler sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir.

Zamandan bağımsız iki boyutlu akımın hız ve basınç alanlarının hesaplanmasında kullanılan SIMPLE akış şeması için tüm ihtiyaç duyulan temel bilgiler türetilmiştir. Bu akış şeması Şekil 3.1.3.1.'de ayrıntılı bir şekilde adım adım açıklanmıştır.





Şekil 3.1.3.1. Zamandan bağımsız laminar sıkışmaz iki boyutlu akım için SIMPLE akış şeması

3.2. Zamana Bağlı İki Boyutlu Akım Alanının Hesaplanması

Zamana bağlı iki boyutlu akım için süreklilik ve hareket denklemleri 3.'üncü bölümde sırası ile (3.1), (3.2) ve (3.3) olarak verilmiştir ve bu denklemlerde yer alan ilk terim akımın zamana bağlı olduğunu göstermektedir. Bu denklemlerin ayrıklaştırılması bölüm 2.1.3.'de zamana bağlı iki boyutlu akım için verilen yöntemle yapılabilmektedir. Zamana bağlı olan terimler, genel olarak türetilen ayrıklaştırılmış (2.47) denklemin her iki tarafında, merkez katsayısı a_p ' nin içerisinde ve eşitliğin sağ tarafında $a_p^\circ \phi_p^\circ$ olarak yer almaktadır.

3.2.1. Hareket Denklemleri

Bölüm 3.1.2.'de türetilen denklemlere (3.8), (3.10) ve (3.32) zamana bağlı terimler ilâve edilirse ayrıklaştırılmış hız bileşeni denklemleri ve süreklilik denkleminde elde edilen ayrıklaştırılmış basınç düzeltimi denklemi zamana bağlı iki boyutlu akım için aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,j} - P_{I,j}) A_{i,j} + a_{i,j} u_{i,j}^\circ + b_{i,j} \dots \dots \dots (3.40)$$

$$a_{I,j} w_{I,j} = \sum a_{nb} w_{nb} + (P_{I,j-1} - P_{I,j}) A_{I,j} + a_{I,j} w_{I,j}^\circ + b_{I,j} \dots \dots \dots (3.41)$$

$a_{i,j}$ ve $a_{I,j}$ sırası ile u- ve w-hız bileşenleri denklemlerinin merkez katsayıları olarak tanımlanırlar ve zamana bağlı terimleri içermektedirler ve basınç düzeltimi denklemi aşağıdaki gibidir:

$$a_{I,j} P'_{I,j} = a_{I+1,j} P'_{I+1,j} + a_{I-1,j} P'_{I-1,j} + a_{I,j+1} P'_{I,j+1} + a_{I,j-1} P'_{I,j-1} + b'_{I,j} \dots \dots \dots (3.42)$$

(3.42) denklemi basınç düzeltimi (P') için genel ayrıklaştırılmış denklem olup katsayılar ise aşağıdaki gibi teşhis edilmektedir.

Merkez katsayısı $a_{i,j}$:

$$a_{I,j} = a_{I+1,j} + a_{I-1,j} + a_{I,j+1} + a_{I,j-1} \dots \dots \dots (3.43)$$

ve komşu katsayılar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$a_{i+1,j}$	$a_{i-1,j}$	$a_{i,j+1}$	$A_{i,j-1}$	$b'_{i,j}$
$(\rho dA)_{i+1,j}$	$(\rho dA)_{i,j}$	$(\rho dA)_{i,j+1}$	$(\rho dA)_{i,j}$	$(\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho w^* A)_{i,j}$ $(\rho w^* A)_{i,j+1} + (\rho_p^o - \rho_p) \Delta x \Delta z / \Delta t$

Basınç düzeltimi denkleminde yer alan ve tabloda verilen komşu katsayılar yoğunluk, d ve ilgili kontrol hacmi yüzleri alanlarının çarpımından oluşmaktadır ve notasyonlardan da görüldüğü gibi u - ve w - kontrol hacmlerine bağlıdır. d formülünde yer alan a 'lar her iterasyon için ilgili kontrol hacmin merkez katsayısını ifade etmektedir. Ayırıklaştırılmış denklemlerde yer alan katsayılar ekler kısmında verilen herhangi bir farklar yöntemi doğrultusunda zamana bağlı iki boyutlu akım için hesaplanabilmektedir.

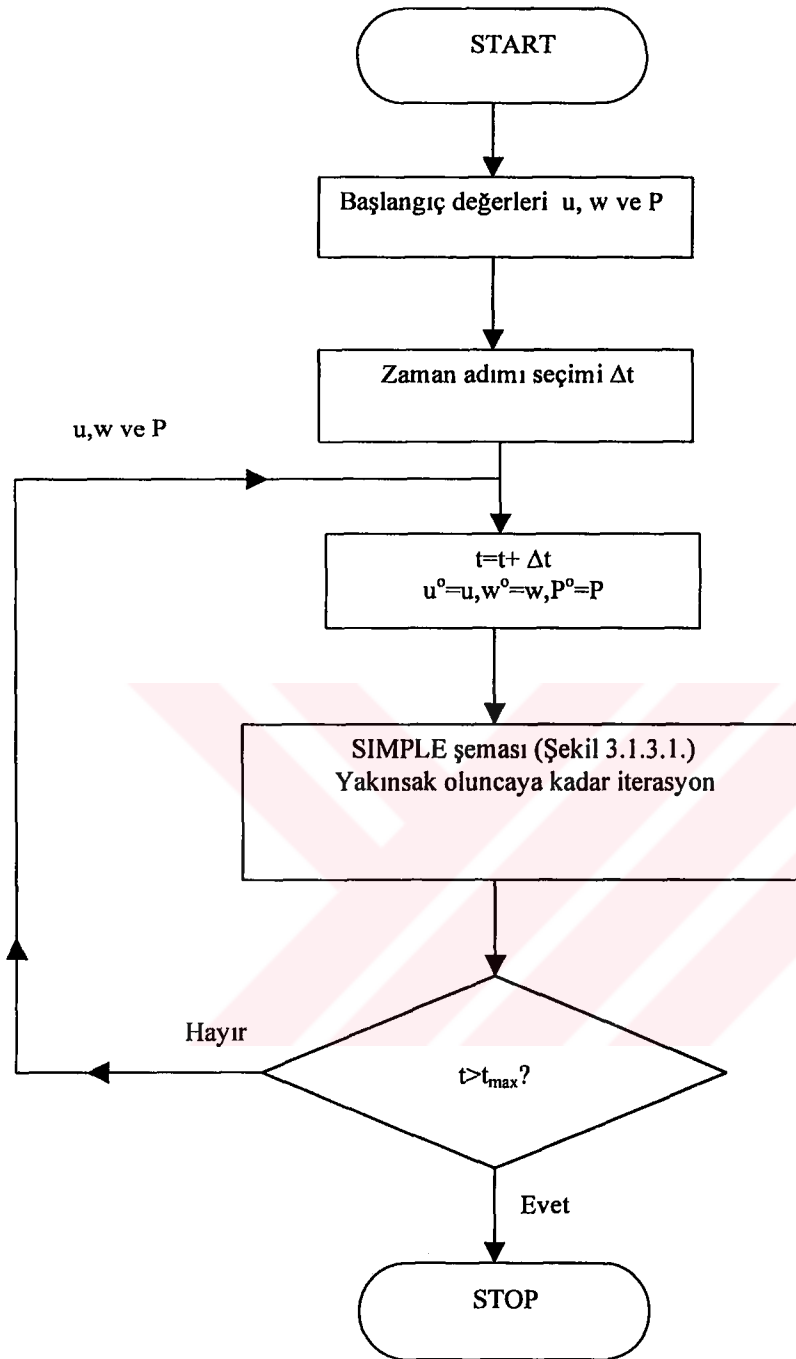
3.2.2. SIMPLE Algoritması

Bölüm 3.1.3.'de tanımlanan SIMPLE algoritması zamana bağlı akım problemlerinin hesaplanması için aşağıdaki geliştirilebilir.

(3.40) ve (3.41) denklemleri yeni zaman adımında hızları içermekte ve cebirsel denklemlerin her zaman aralığında çözülmesi gerekmektedir. Yöntem, başlangıçta verilen tahmini hız ve basınç alanı ve zaman adımı ile başlamaktadır. (3.40), (3.41) ve (3.42) denklemler sistemi zaman adımı Δt seçildikten sonra çözülür. Iterasyon yolu ile hesaplanan hızlar, örneğin bir sonraki iterasyon için başlangıç değeri olarak kabul edilir ve bu yöntem problem yakınsak oluncaya kadar tekrar edilmektedir. Böyle bir akım alanının hesaplanması için SIMPLE akış şeması Şekil 3.2.2.1.'de verilmiştir.

Belirtildiği üzere zamana bağlı akım problemlerinde, şartsız kararlılık önem taşımaktadır. Bundan dolayı tamamen implisit yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemde ayırıklaştırılmış denklemlerdeki tüm komşu katsayılar pozitif olduğu için tamamen implisit yöntemi her zaman adımı için şartsız kararlı olmaktadır (Anderson, Hoffman, 1995).

Akım probleminin yakınsak olabilmesi için zamana bağlı problemlerde de anderselaksasyon faktörleri uygulanmaktadır.



Şekil 3.2.2.1. Zamana bağlı laminar sıkışamaz iki boyutlu akım için SIMPLE akış şeması

4. YÖNTEMİN DENENMESİ

Bu çalışmada esas alınan sonlu hacimler yöntemi ve SIMPLE algoritması zamana bağlı iki boyutlu akım için ayrıntılı bir şekilde geliştirilip incelenmiştir. Bu bölümde sayısal yöntem ve SIMPLE algoritmasının denenmesi için literatürde çözümleri verilen bazı eliptik problemlerden kavite problemi seçilerek çözümlenmiş ve böylelikle kullanılan yöntemin doğruluk derecesi ve geçerli olduğu parametre sınırları test edilmiştir. Yöntemin doğruluk derecesi test edildikten sonra bu yöntem serbest yüzeyli akımlar için de uygulanmıştır.

Eliptik problemler kavite problemlerini içermekte ve sınırları boyunca sınır şartlarının tanımlanmasını öngörmektedir. Bu tür problemlerin çözümü süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri sayesinde gerçekleşmektedir. Literatürde kavite problemi farklı Reynolds sayıları için çözümlenmiş ve elde edilen hız bileşeni profilleri verilmiştir (Ghia ve diğ., 1982).

Bu çalışmada geliştirilen yöntem söz konusu kavite problemi için aynı parametreleri ve geometriyi kullanarak denenmiş ve elde edilen sonuçlar literatürde verilen sonuçlarla mukayese edilmiştir. Böylelikle yöntemin doğruluk derecesi ve geçerli olduğu parametre sınırları belirlenmiştir.

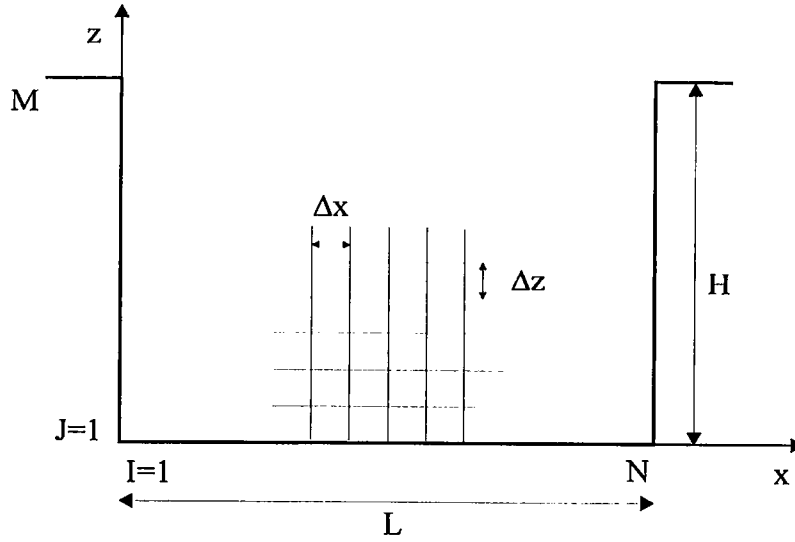
Yine yöntemin doğruluk derecesi girdap transport denkleminde aynı parametreler için elde edilen hız bileşeni profilleri, yöntemden türetilen sonuçlarla mukayese edilip test edilmiştir. Böylece yöntemin doğruluk derecesi iki kez test edilmiştir. Bununla birlikte kavite içerisindeki girdaplılık akım çizgileri bazı Reynolds sayıları için de hesaplanmıştır.

Yöntemin doğruluk derecesi test edildikten sonra yöntem serbest yüzeyli akım hareketinin incelenmesi için bir sonraki bölümde uygulanmıştır. Serbest yüzeyli akımda yer çekimi kuvveti büyük rol oynadığı için değişkenler Reynolds, Froude sayıları ve serbest düzlem ile x-ekseni arasındaki açılar (α) önem taşımaktadır. Sonuç olarak akışkan karakterleri bunlara bağlı olarak incelenmiştir.

Yapılan hesaplamalarda kullanılan farklı yöntemlerden karma farklar yöntemi tüm akışkan problemlerinde literatürde verilen sonuçlarla iyi uyum sağladığı için bu çalışmada esas alınmıştır.

4.1. Kavite Problemi

Şekil 4.1.1. söz konusu kaviteyi göstermektedir.



Şekil 4.1.1. Kavite, geometri ve grid sayıları

Kavitenin x-ekseni doğrultusunda sırası ile uzunluğu L ve toplam grid noktaları sayısı N ve z-ekseni doğrultusunda yüksekliği H ve toplam grid noktaları sayısı M olarak tanımlanmaktadır. x- ve z-ekseni doğrultusundaki grid noktaları arasındaki adım uzunluğu sırası ile $\Delta x=L/(N-1)$ ve $\Delta z=H/(M-1)$ olarak ifade edilmektedir. Kavitenin x- ve z-eksenindeki hız bileşenleri ve basınç terimleri için sınır şartları aşağıdaki gibi verilmiştir:

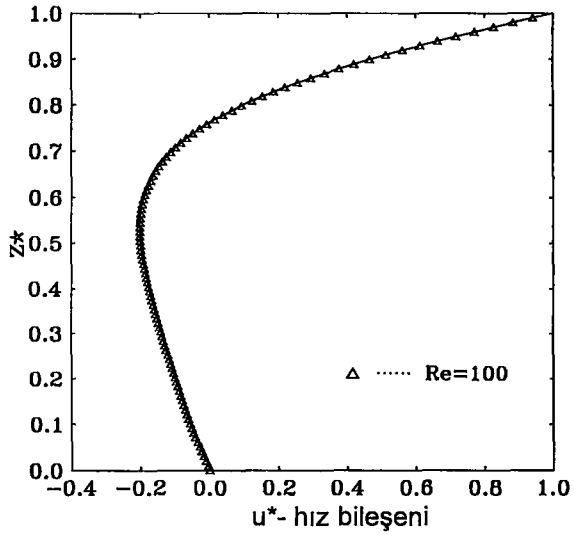
Tablo 4.1.1. Kavite probleminde kullanılan sınır şartları

	u^*, w^*	$\partial P^*/\partial x^*, \partial P^*/\partial z^*$
$x^*=0$	$u^* = w^* = 0$	$\partial P^*/\partial x^* = 0$
$x^*=1$	$u^* = w^* = 0$	$\partial P^*/\partial x^* = 0$
$z^*=0$	$u^* = w^* = 0$	$\partial P^*/\partial z^* = 0$
$z^*=1$	$u^* = 1, w^* = 0$	$\partial P^*/\partial z^* = 0$

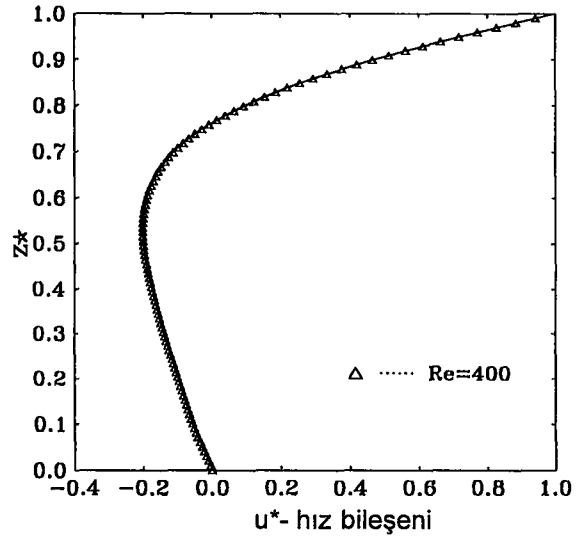
Bu problemde elde edilen sonuçların doğruluk derecesini literatürde mevcut olan sonuçlarla (Ghia ve diğ., 1982) mukayese edebilmek için problemlerin çözümünde aynı sınır şartları, geometri ve parametreler kullanılmıştır. Kavite (100X100) grid noktalarını içermektedir. Anderrelaksasyon katsayıları ise hız bileşenleri ve basınç düzeltimleri için $\alpha_u = \alpha_w = \alpha_p = 0.5$ olarak seçilmiştir. Ayırıklaştırılmış denklemlerdeki katsayıları hesaplamak için karma farklar yöntemi kullanılmıştır.

Belirtildiği üzere, Navier-Stokes denklemlerin kavite problemi için çözümü SIMPLE algoritması sayesinde gerçekleşmektedir. Bu denklemler önce atalet kuvvetleri, konvektif terimler (gayri-lineer terimler) ihmal edilip bazı Reynolds sayıları ($Re=100, 400, 1000$ ve 3200) için çözümlenmiş ve $x^*=N/2$ noktasında z-ekseni doğrultusundaki elde edilen u^* -hız bileşeni profilleri sırası ile Şekil 4.1.2.-4.1.5.'de gösterilmiştir. Bir sonraki adımda ise aynı kavite problemi için Navier-Stokes denklemleri komple olarak çözümlenmiştir. (Şekil 4.1.6.-4.1.10.) farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400, 1000, 3200$ ve 5000) için $x^*=N/2$ noktasında z-ekseni doğrultusundaki yöntemden elde edilen u^* -hız bileşeni profillerini literatürde (Ghia ve diğ., 1982) verilen sonuçlarla birlikte grafiksel olarak göstermektedir. Yöntem ile literatürdeki sonuçlar arasındaki sapmalar yalnız büyük Reynolds sayılarında görülmektedir. (Şekil 4.1.11.-4.1.13.) $x^*=N/2$ noktasında z-ekseni doğrultusundaki yöntemden (atalet kuvvetleri ihmal edildiği zaman ve komple Navier-Stokes denklemleri çözümünden) elde edilen u^* -hız bileşeni profilleri ile literatürde verilen u^* -hız bileşeni profillerini farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400$ ve 1000) için göstermektedir. Atalet kuvvetleri sıfır olduğu zaman tüm şekillerde farklı Reynolds sayıları için aynı karakteristik elde edilmektedir. Yöntem ile literatürdeki sonuçlar arasındaki sapmalar büyük Reynolds sayılarında gözlenmektedir.

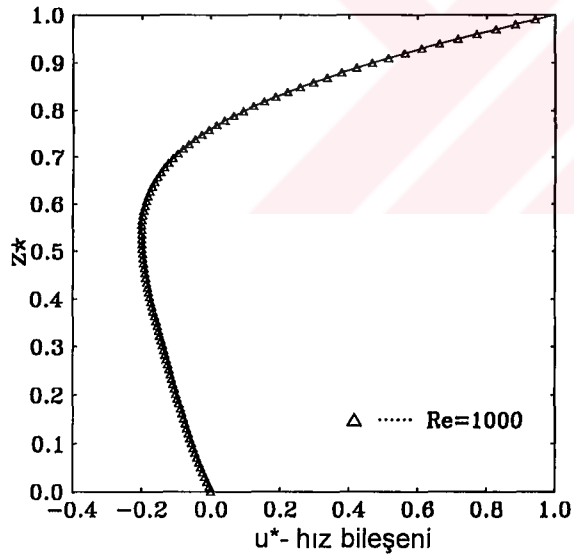
Ayrıca farklı Reynolds sayıları için $z^*=M/2$ noktasında ve x-ekseni doğrultusunda w^* -hız bileşeni profilleri Şekil 4.1.14.'de verilmiştir. (Şekil 4.1.15.) farklı Reynolds sayıları için $x^*=N/2$ noktasında ve z-ekseni doğrultusundaki basınç dağılımını göstermektedir.



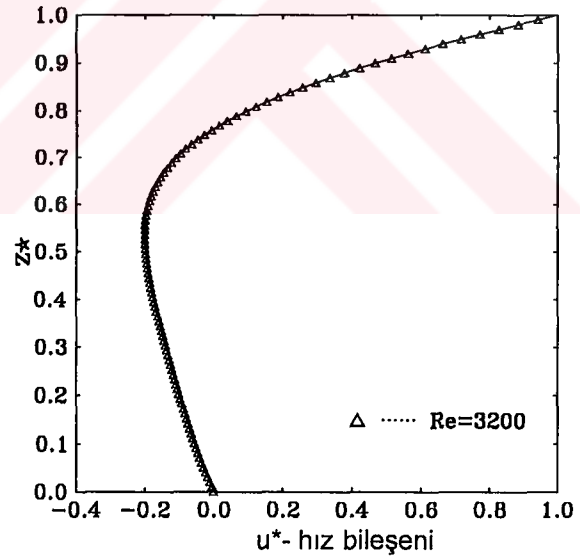
Şekil: 4.1.2. $Re=100$ ve atalet kuvvetleri sıfır için u^* - hız bileşeni profili



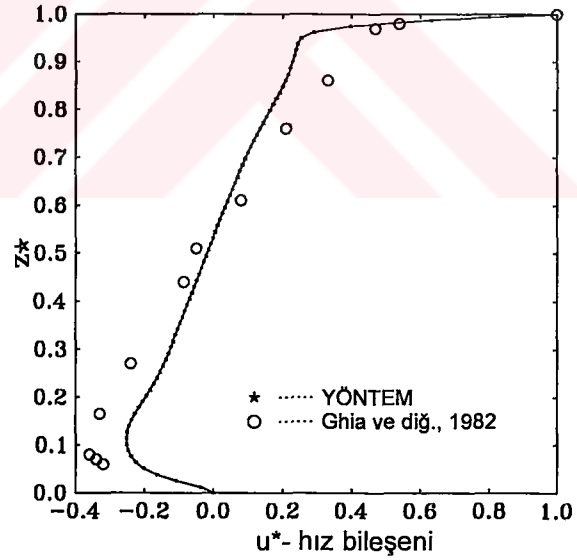
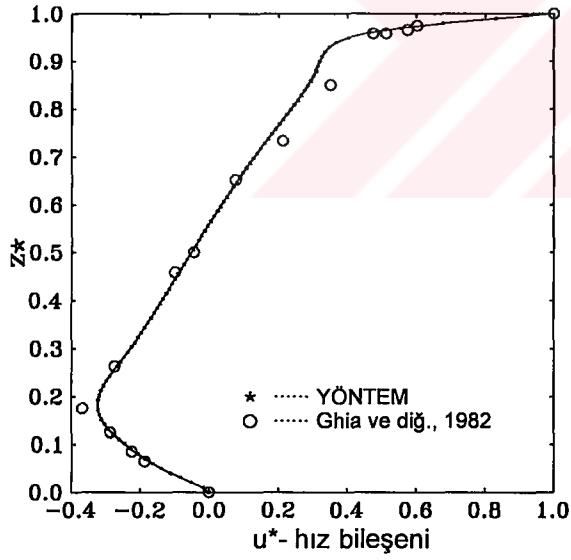
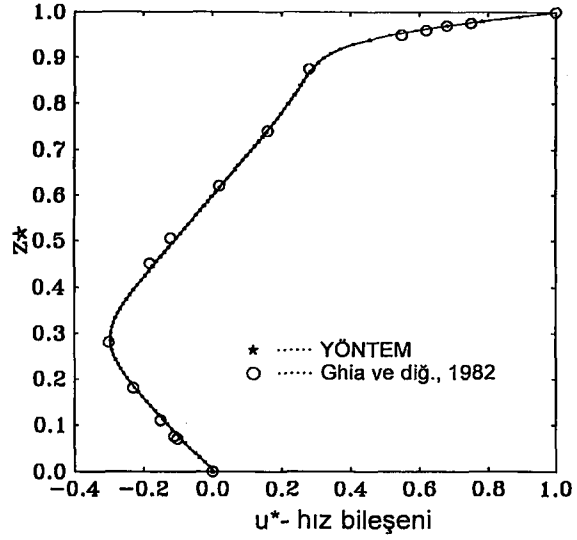
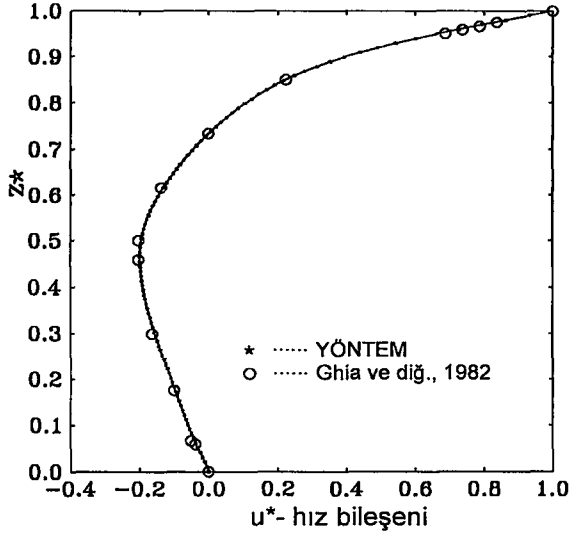
Şekil: 4.1.3. $Re=400$ ve atalet kuvvetleri sıfır için u^* - hız bileşeni profili

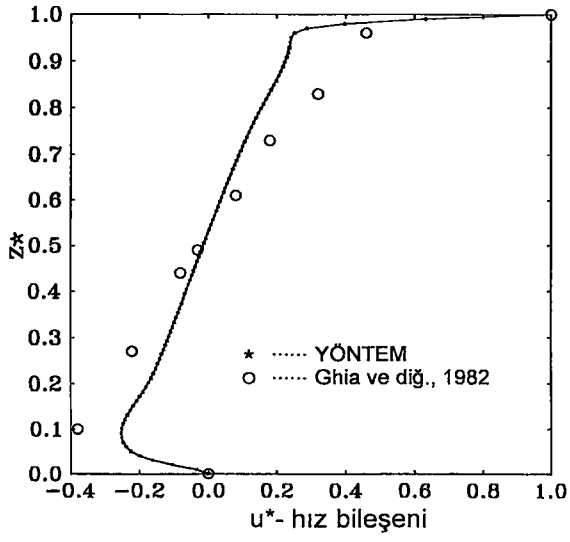


Şekil: 4.1.4. $Re=1000$ ve atalet kuvvetleri sıfır için u^* - hız bileşeni profili

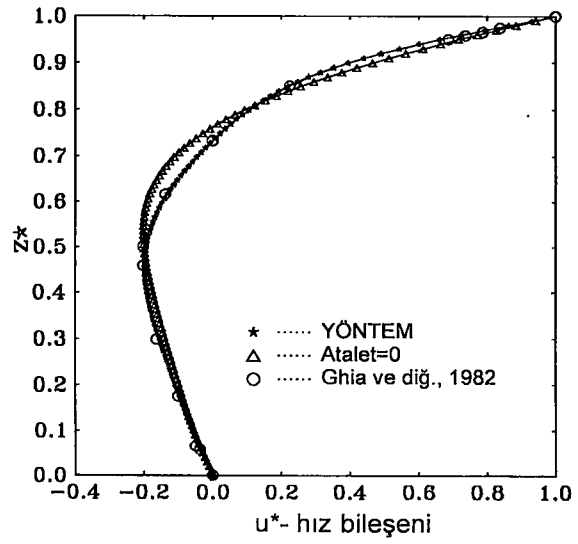


Şekil: 4.1.5. $Re=3200$ ve atalet kuvvetleri sıfır için u^* - hız bileşeni profili

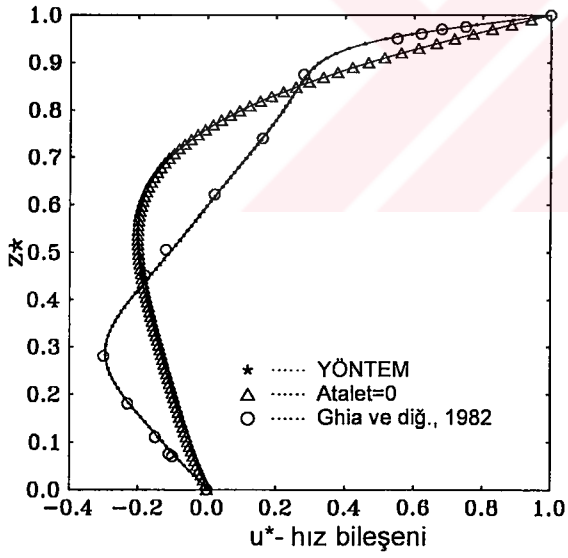




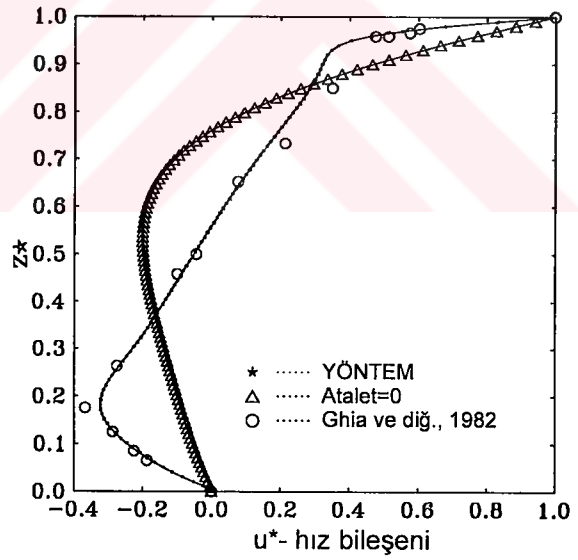
Şekil: 4.1.10. Re=5000 için u^* - hız bileşeni profili



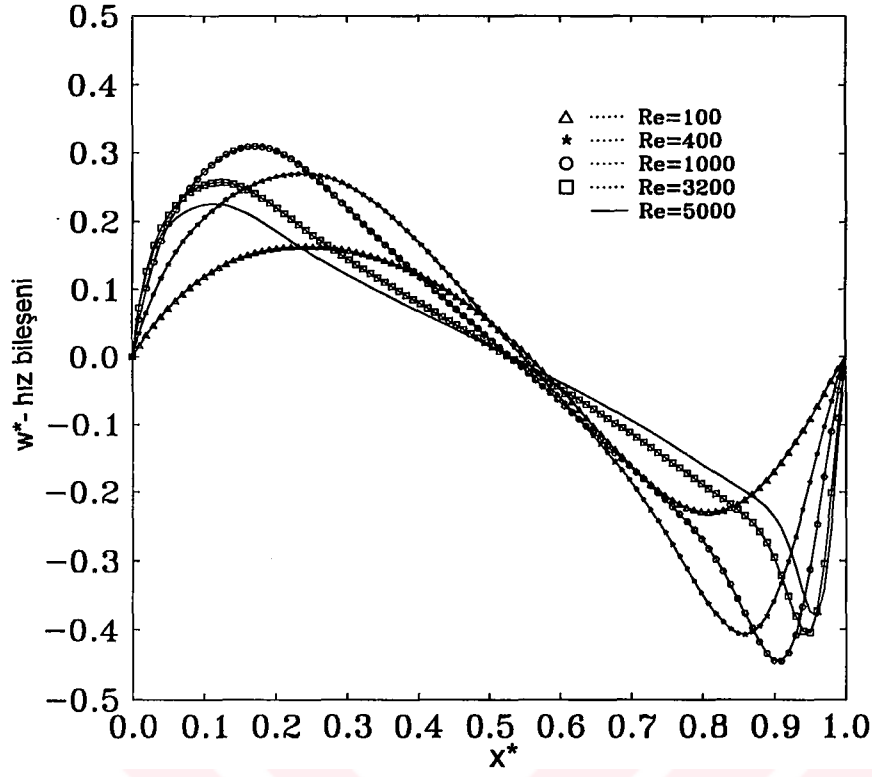
Şekil: 4.1.11. Re=100 ve farklı yöntemler için u^* - hız bileşeni profili



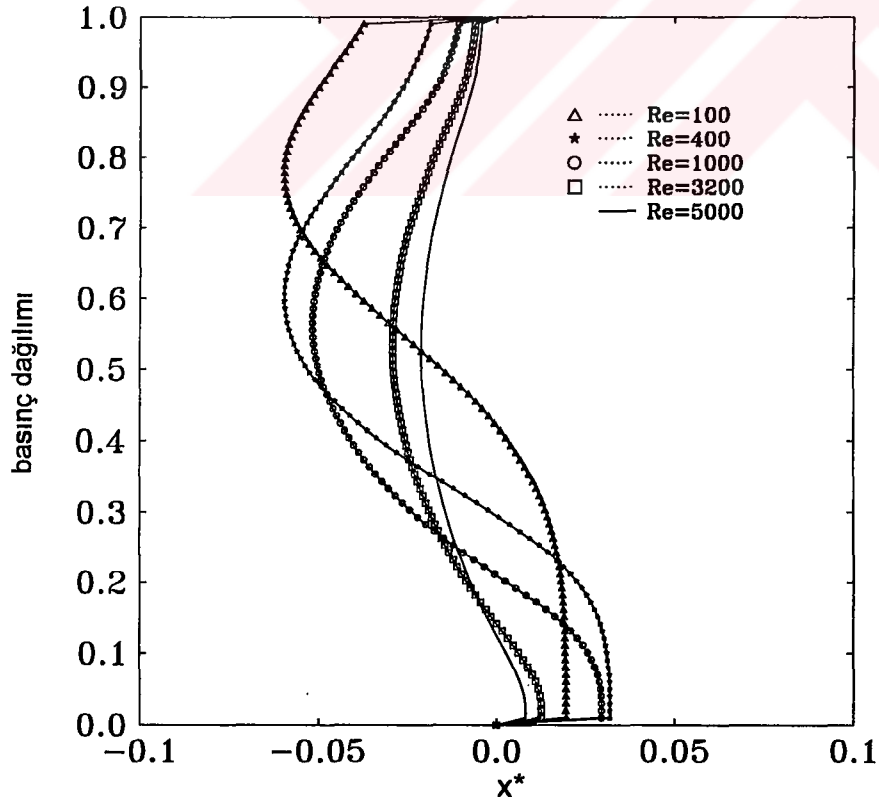
Şekil: 4.1.12. Re=400 ve farklı yöntemler için u^* - hız bileşeni profili



Şekil: 4.1.13. Re=1000 ve farklı yöntemler için u^* - hız bileşeni profili



Şekil: 4.1.14. Farklı Re sayıları için w^* - hız bileşeni profili



Şekil: 4.1.15. Farklı Re sayıları için basınç dağılımı

4.2. Girdaplılık ve Akım Fonksiyonu

Bu bölümde, kavite içerisinde girdaplılık ve akım çizgilerini hesaplamak için fiziksel problemi tanımlayan matematiksel modeller geliştirilmiştir. Elde edilen diferansiyel denklemler sayısal yöntemler sayesinde çözümleneceği için önce boyutsuzlaştırılıp daha sonra ise ayrıklaştırılmıştır.

Türetilen cebirsel denklemlerin çözümü kavite içerisinde girdaplılık ve akım çizgilerini farklı parametreler için vermektedir.

4.2.1. Girdaplılık Transport Denklemi ve Akım Fonksiyonun Türetilmesi

Girdaplılık transport denklemi hareket denklemlerinden türetilmektedir. Girdap $\vec{\omega} = \nabla X \vec{U}$ olarak tanımlanır ve x-ekseni yönündeki hareket denklemi $1/\partial z$ ve z-ekseni yönündeki hareket denklem $1/\partial x$ ile çarpılıp bu denklem elde edilen diğer denklemden çıkarılırsa ve aşağıda verilen bağıntı da kullanılırsa:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots\dots(4.1)$$

girdaplılık transport denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(w\omega)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \dots\dots\dots(4.2)$$

Basınç gradyanı yapılan matematiksel işlemler sonucunda elimine edilmekte ve (4.2) denkleminde yer almamaktadır.

Boyutsuz parametreler kullanılırsa (4.2) denklem bazı işlemlerden sonra aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırılır:

Karakteristik uzunluk kavite uzunluğu L ve u_k referans hızı olarak seçilmiştir.

$$u^* = \frac{u}{u_k}, \quad w^* = \frac{w}{u_k}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad \omega^* = \frac{\omega L}{u_k} \quad \text{ve} \quad \psi^* = \frac{\psi}{u_k L}$$

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* \omega^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(w^* \omega^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial z^{*2}} \right) \dots\dots\dots(4.3)$$

Hız bileşenleri akım fonksiyonlarına bağlı ve boyutsuz olarak aşağıdaki gibi verilmektedirler:

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \dots \dots \dots (4.4)$$

ve

$$w^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \dots \dots \dots (4.5)$$

(4.4) ve (4.5) denklemler (4.1) denkleminde yerlerine konursa girdaplılık akım fonksiyonuna bağlı olarak boyutsuzlaştırılmış bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$-\omega^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} \dots \dots \dots (4.6)$$

4.2.2. Girdaplılık Transport Denklemi ve Akım Fonksiyonun Ayırıklaştırılması

Sonlu farklar yöntemini kullanarak bölüm 4.2.1.'de boyutsuzlaştırılmış denklemler aşağıdaki gibi ayırıklaştırılabilirler.

Girdaplılık-akım denklemi:

$$-\omega_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta z^2} \dots \dots \dots (4.7)$$

veya (4.7) denklemi $\psi_{i,j}$ 'e göre düzenlenirse:

$$\psi_{i,j} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \omega_{i,j} + \frac{1}{\Delta x^2} \psi_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta x^2} \psi_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta z^2} \psi_{i,j+1} + \frac{1}{\Delta z^2} \psi_{i,j-1} \dots \dots \dots (4.8)$$

denklemi elde edilir.

(4.8) denklemi bölüm 2.1.3.'de tanımlanan (2.47) genel ayırıklaştırılmış denklemle mukayese edildiği zaman ilgili katsayılar aşağıdaki gibi teşhis edilebilmektedir:

Merkez katsayısı α_p :

$$\alpha_p = \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta z^2}$$

ve komşu katsayılar ise aşağıdaki tabloda verilmiştir.

a_w	a_E	a_S	a_N
$1/\Delta x^2$	$1/\Delta x^2$	$1/\Delta z^2$	$1/\Delta z^2$

Sonuç olarak ayrıklaştırılmış girdaplılık-akım denklemi aşağıdaki formunu almaktadır:

$$a_P \psi_{i,j} = \omega_{i,j} + a_w \psi_{i-1,j} + a_E \psi_{i+1,j} + a_S \psi_{i,j-1} + a_N \psi_{i,j+1} \dots (4.9)$$

Hız bileşenleri ise birinci mertebeden diferansiyel denklemleri olup sonlu farklar yöntemi ile aşağıdaki gibi ayrıklaştırılabilmektedirler:

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta z} \dots (4.10)$$

ve

$$w_{i,j} = -\frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2\Delta x} \dots (4.11)$$

Girdaplılık transport denklemi (4.3) hız bileşenlerini (u ve w) içermekte ve ayrıklaştırılmasında hız bileşeni yönleri büyük rol oynamaktadır. Buna göre (4.3) denklemi tekrar düzenlenirse (4.12) denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t} = \underbrace{-u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*}}_I \underbrace{w^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*}}_{II} + \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial z^{*2}} \right)}_{III} \dots (4.12)$$

(4.12) denklemi üç kısımdan oluşmakta ve her kısım için hız yönüne bağlı olarak durum incelemesi yapıp denklemler aşağıdaki tabloda (Tablo 4.2.2.1.) verilmiştir. Sonuç olarak girdaplılık transport denklemi bu üç terimin toplamından oluşmaktadır.

Tablo 4.2.2.1. Terim I, II ve III'ün tanımı

	$u_{i,j} \geq 0$	$u_{i,j} < 0$
Terim I	$-u_{i,j} ((\omega_{i,j} - \omega_{i+1,j})/\Delta x)$	$-u_{i,j} ((\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j})/\Delta x)$
	$w_{i,j} \geq 0$	$w_{i,j} < 0$
Terim II	$-w_{i,j} ((\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1})/\Delta z)$	$-w_{i,j} ((\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j})/\Delta z)$
Terim III	$1/\text{Re}((\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j})/\Delta x^2) + (\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1})/\Delta z^2)$	

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{Terim I} + \text{Terim II} + \text{Terim III} \dots (4.13)$$

veya

$$\frac{\omega_{i,j}^{new} - \omega_{i,j}^{old}}{\Delta t} = \text{Terim I} + \text{Terim II} + \text{Terim III} \dots (4.14)$$

veya (4.14) denklemi tekrar düzenlenirse:

$$\omega_{i,j}^{new} = \omega_{i,j}^{old} + \Delta t (\text{Terim I} + \text{Terim II} + \text{Terim III}) \dots (4.15)$$

$\omega_{i,j}^{old}$: bir önceki iterasyonda elde edilen değerdir.

4.2.3. Kavite Probleminde Girdaplılık ve Akım Çizgilerinin Hesaplanması

Kavite içerisinde girdaplılık-akım çizgileri Şekil 4.2.3.1.'de verilen akım şemasına göre hesaplanmaktadır. Söz konusu kavite problemi için aşağıdaki sınır şartları kullanılmıştır.

Tablo 4.2.3.1. Girdap-akım çizgileri için sınır şartları

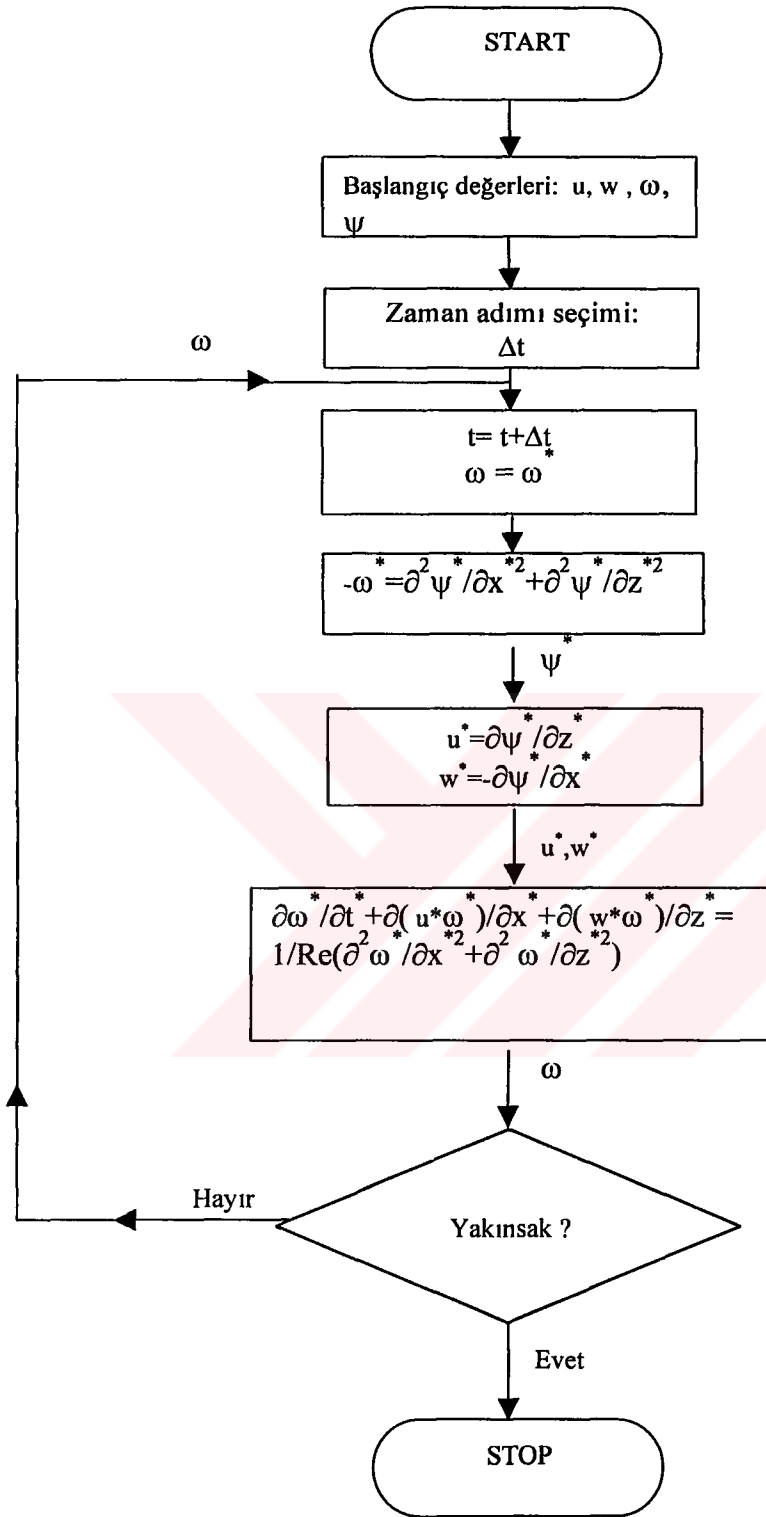
	u^*	w^*	$\partial \psi^* / \partial x^*$	$\partial \psi^* / \partial z^*$	$-\omega^*$
$x^*=0$	0	0	0	-	$\partial^2 \psi^* / \partial x^{*2}$
$x^*=1$	0	0	0	-	$\partial^2 \psi^* / \partial x^{*2}$
$z^*=0$	0	0	-	0	$\partial^2 \psi^* / \partial z^{*2}$
$z^*=1$	$u_k^*=1$	0	-	$u_k^*=1$	$\partial^2 \psi^* / \partial z^{*2}$

Şekil 4.2.3.1.'de gösterilen algoritmanın çalışmaya başlaması için ilk iterasyonda sınır şartlarına ve başlangıç verilerine ihtiyaç duyulmaktadır. Buna göre akım çizgileri hesaplandıktan sonra bunlara bağlı hız bileşenleri elde edilmektedir. Girdapları hesaplamak için hız bileşeni değerleri girdaplılık denkleminde yerlerine konulmaktadır. Elde edilen girdaplılık değeri bir sonraki iterasyonun başlangıç değeri olarak kabul

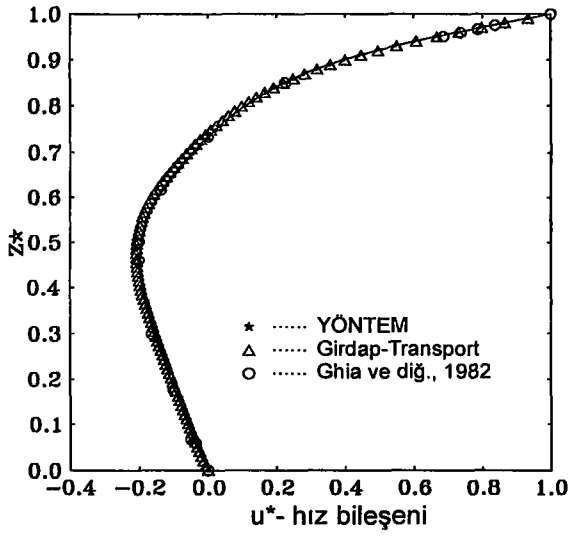
edilmekte ve akım çizgileri denkleminde yerine konulup problem yakınsak oluncaya kadar iterasyonlar devam etmektedir.

(Şekil 4.2.3.2.-4.2.3.5.) girdaplılık transport denkleminde ve yöntemden elde edilen u-hız bileşeni profillerini literatürdeki sonuçlarla (Ghia ve diğ., 1982) birlikte ($Re=100$, 400, 1000 ve 3200) için göstermektedir. Grafiklerden de görüleceği gibi girdap-transport denklemin çözümünden elde edilen sonuçlar yöntemden türetilen ve literatürde verilen sonuçlarla $Re=100$ için tam uyum sağlanmış, $Re=400$ için kabul edilebilir bir uyum gözlemlenmiş ve $Re=1000$ ve 3200 için büyük sapmalar göstermektedir. Böylelikle yöntemin doğruluk derecesi küçük Reynolds sayıları için girdap-transport denklemi ile de test edilmiştir. Serbest yüzey akımın karakterinin incelenmesinde küçük Re sayıları kullanıldığından ve Reynolds sayısı 100 değerini aşmayacağı için yöntemin kullanılmasında bir sakınca bulunmadığı kanısına varılmıştır. Bundan dolayı yöntemin tüm çalışmalarda kullanılması benimsenmiştir.

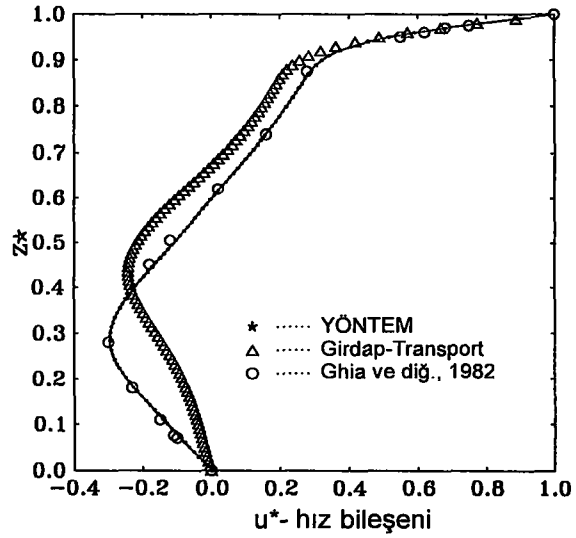
Yine Şekil 4.2.3.1.deki akım şeması kullanılarak kavite içerisindeki akım çizgileri $Re=100$, 400, 1000 ve 3200 için hesaplanmış ve Şekil 4.2.3.6.-4.2.3.9.'da gösterilmiştir.



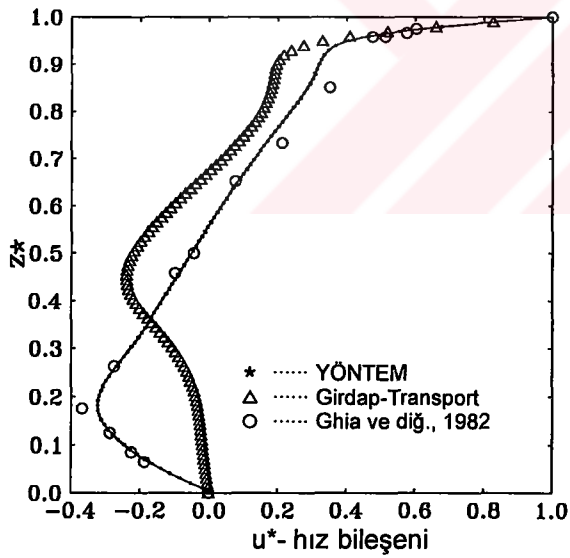
Şekil 4.2.3.1. Girdaplılık-akım çizgilerini hesaplamak için akım şeması



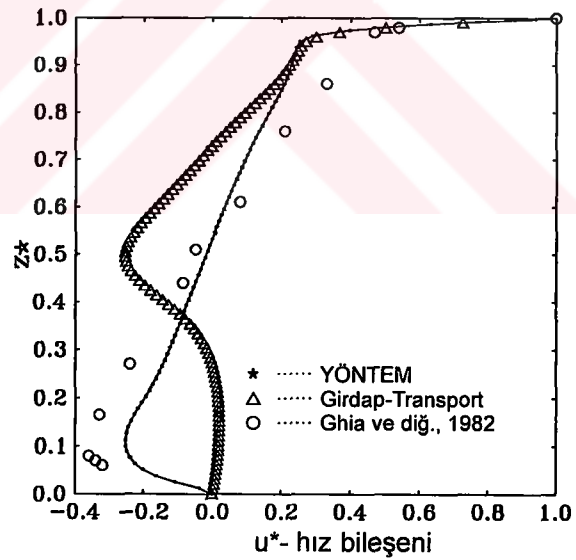
Şekil: 4.2.3.2. Re=100 için u^* - hız bileşeni profili



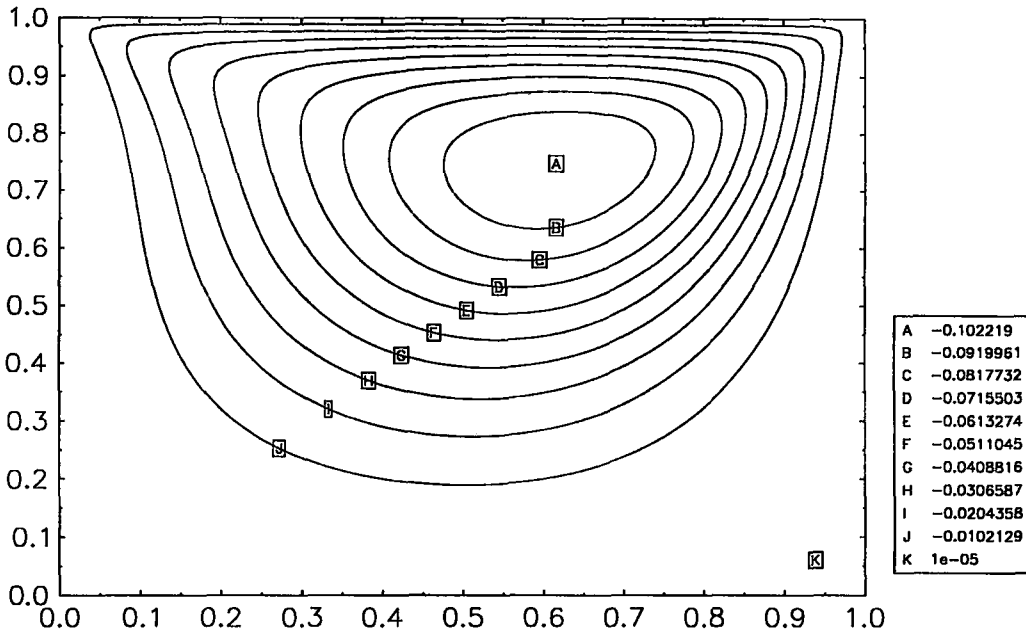
Şekil: 4.2.3.3. Re=400 için u^* - hız bileşeni profili



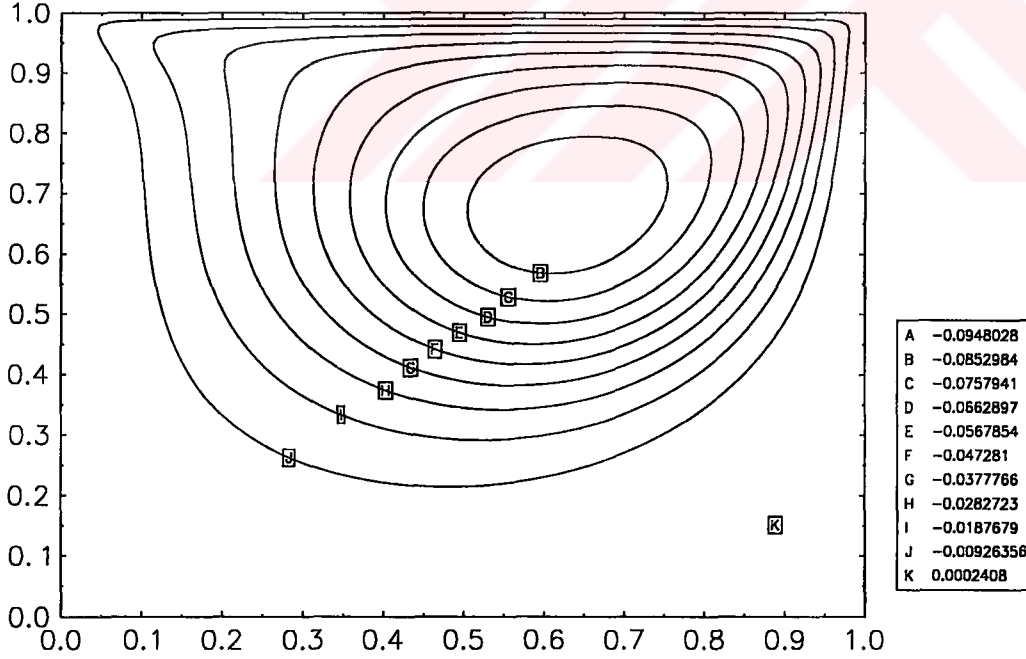
Şekil: 4.2.3.4. Re=1000 için u^* - hız bileşeni profili



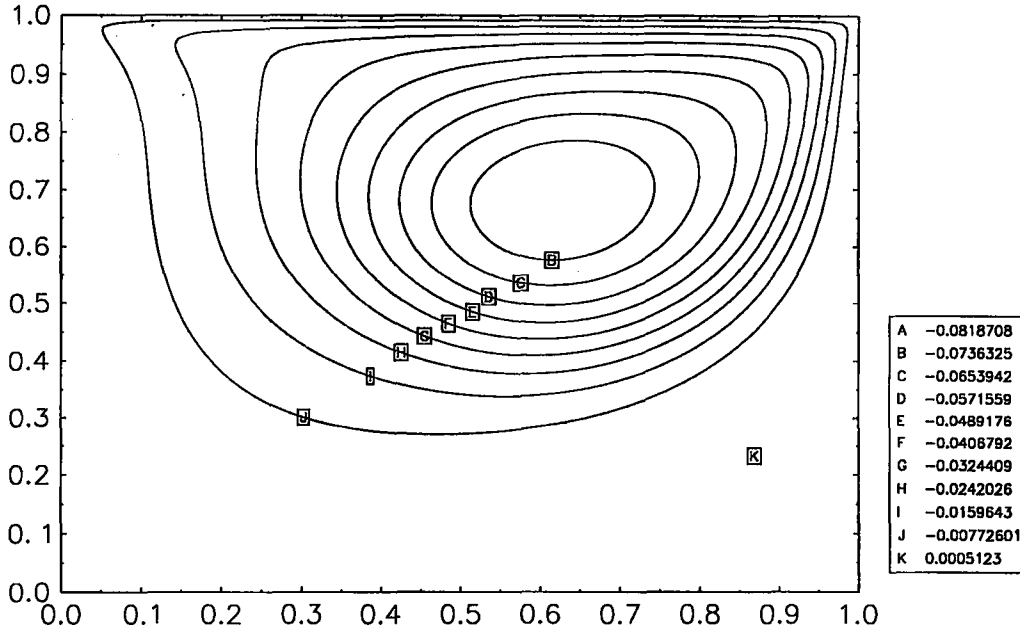
Şekil: 4.2.3.5. Re=3200 için u^* - hız bileşeni profili



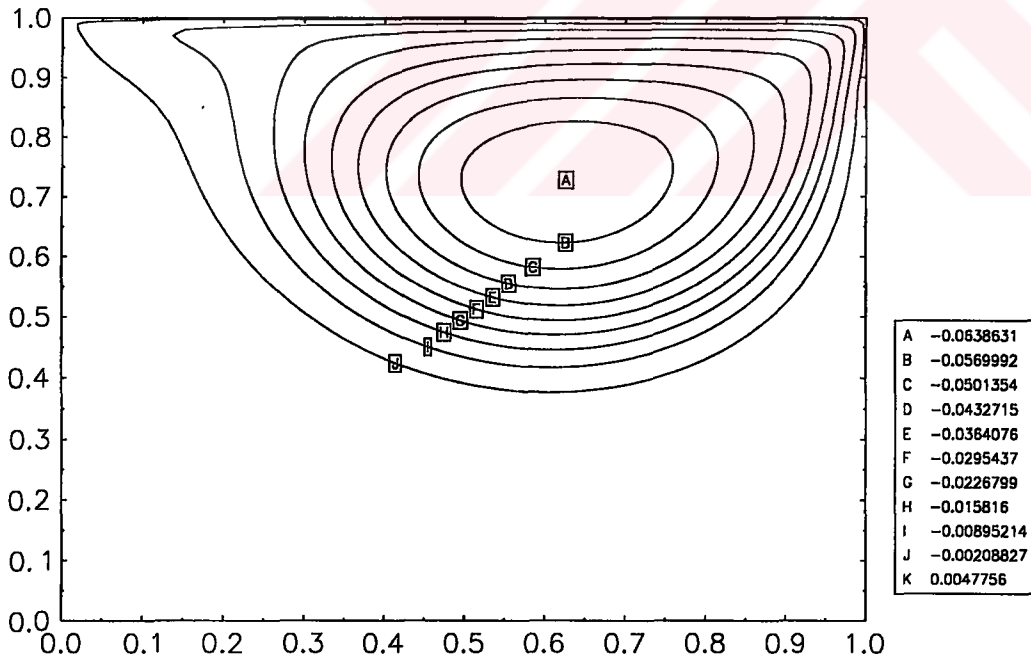
Şekil 4.2.3.6. Re=100 için kavite içerisindeki akım çizgileri



Şekil 4.2.3.7. Re=400 için kavite içerisindeki akım çizgileri



Şekil 4.2.3.8. $Re=1000$ için kavite içerisindeki akım çizgileri



Şekil 4.2.3.9. $Re=3200$ için kavite içerisindeki akım çizgileri

5. PÜRÜZSÜZ VE PÜRÜZLÜ EĞİMLİ LEVHA DÜZLEM ÜZERİNDE AKIŞKAN HAREKETİNİN İNCELENMESİ

Şekil 1.1.1.'de gösterilen pürüzsüz levha düzlem üzerinde yer çekimi etkisiyle akan serbest yüzeyli akımın hareketi farklı Reynolds, Froude sayıları ve levha ile x-ekseni arasındaki farklı açılar (α) için incelenmiştir. Serbest yüzeyli akım hareketi süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri tarafından tanımlanmakta ve çözümleri için iki sınır şartı denklemine (kinematik ve dinamik) ihtiyaç duyulmaktadır.

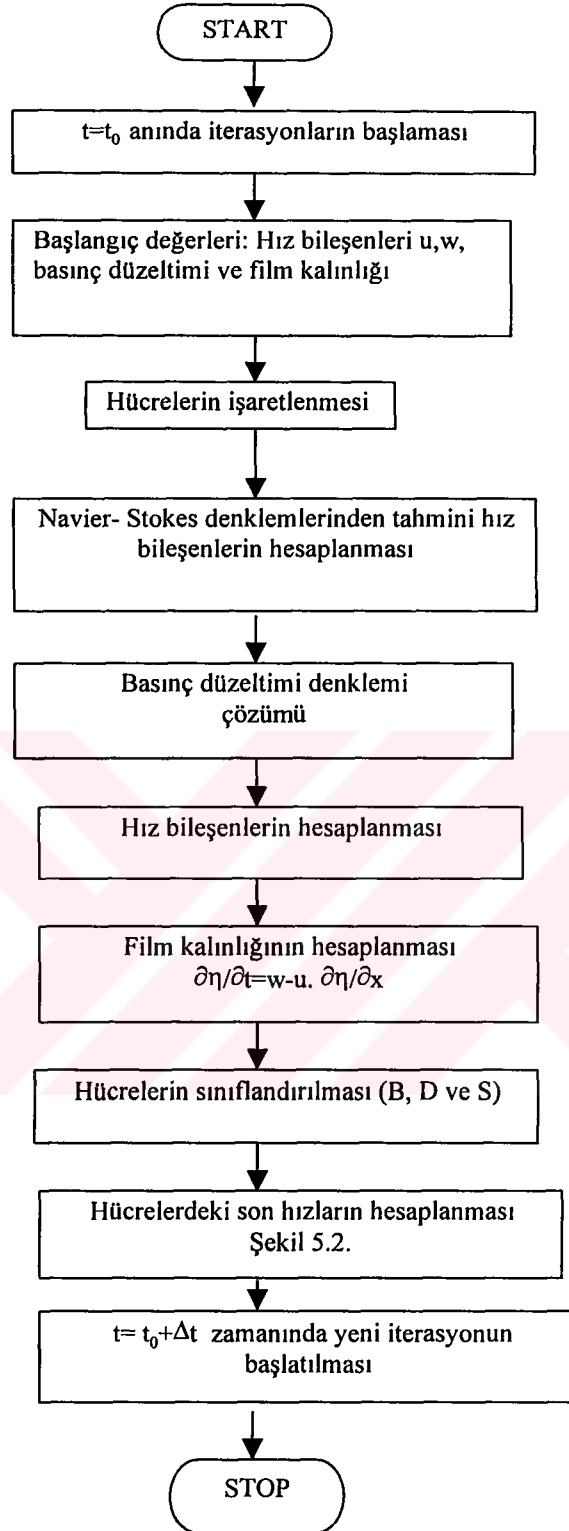
Süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri sonlu hacimler yöntemi, sınır şartı denklemleri ise sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırılmıştır.

Bu denklemler SMAC yöntemi sayesinde çözümlenmektedir. Şekil 5.1.'de verilen akım şeması bu yöntemi adım adım açıklamaktadır.

Yöntemin çalışması için başlangıç değerleri olarak hız bileşenlerine (u^* , w^*), film kalınlığına (η^*), Reynolds sayısına ve düzlem ile x-ekseni arasındaki açıya (α) ihtiyaç duyulmaktadır. Hesap bölgelerini oluşturan hücreler başlangıç değeri olarak verilen film kalınlığına göre akışkan ihtiva ediyorsa dolu (D), etmiyorsa boş (B) ve akışkan sınırının bulunduğu hücreler ise (S) olarak işaretlenmektedir.

Navier-Stokes denklemlerin çözümü SIMPLE algoritması sayesinde gerçekleşmekte ve sonuç olarak çözümleri tahmini hız bileşenlerini vermektedir. Konveksiyon ve difüzyon terimlerinin hesaplanmasında karma farklar yöntemi kullanılmıştır.

Basınç düzeltimi denkleminin çözümü basınç düzeltimi (P') vermekte ve bu büyüklük bir sonraki adımda hız bileşenlerin ve basıncın hesaplanmasında kullanılmaktadır. Elde edilen bu hız bileşenleri η^* film kalınlığının, kinematik sınır şartından hesaplanmasında kullanılmaktadır. Böylelikle η^* film kalınlığı x-ekseni boyunca serbest yüzeyin sınırını ilgili hücrelerde belirlemektedir. Film kalınlığı hesaplanırken yalnız serbest yüzey üzerindeki hız bileşenleri önem kazanmaktadır. Bundan dolayı serbest yüzey üzerindeki hız bileşenlerin, başka bir ifade ile serbest yüzey sınırında ve içerisinde bulunan hücrelerdeki hız bileşenlerin, doğru olarak hesaplanması gerekmektedir. Bu hız bileşenleri komşu hücrelerdeki hız bileşenleri tarafından etkilenmektedir. Buna göre hücreler üç sınıfa ayrılmaktadır. Tamamen akışkan ile dolu olan hücreler (D), akışkan ihtiva etmeyen hücreler (B) ve serbest yüzey sınırının içerisinde bulunduğu hücreler ise (S) olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 5.1. SMAC yöntemi akım şeması

Akışkan ihtiva etmeyen hücrelerdeki hız sıfır olarak tanımlanmaktadır. Böylece her iterasyonda hücreler D, B veya S olarak gösterilmekte ve serbest yüzeyin sınırı teşhis edilmektedir. Şekil 5.2. tüm olası serbest yüzey sınırlarını, komşu hücreler ve bunlara bağlı olan w-hız bileşenlerini göstermektedir (Armenio, V., 1997). Aynı yöntem ile u-hız bileşenleri de elde edilebilmektedir. Bu yöntem ile hesaplanan hız bileşenleri bir sonraki iterasyonda başlangıç değerleri olarak kabul edilmektedir.

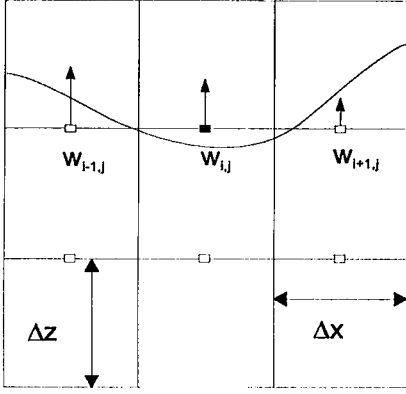
Bir sonraki adımda ise problemin yakınsaklık kriteri olan film kalınlığı kontrol edilmekte ve her iterasyonda, zaman adımı Δt olarak artırılmaktadır. Problem yakınsak oluncaya kadar iterasyonlar devam etmektedir. Yakınsaklık, akım parametrelerine, Reynolds, Froude sayılarına, adım uzunluğuna ve hesap bölgesindeki toplam grid noktaları sayısına bağlıdır.

Yalnız yerçekimi etkisi sayesinde akan serbest yüzeyli akım hareketini tanımlayan denklemler küçük Reynolds sayıları ($Re=5-25$) için açıklanan yöntem sayesinde çözümlenmiştir.

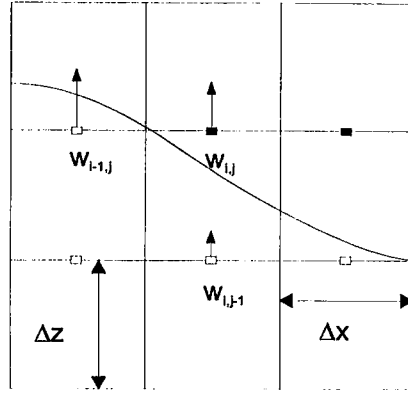
Sonuç olarak x-ekseni boyunca film kalınlığı (η^*) ve u^* -hız bileşeni profilleri dört farklı noktada ($x^*=N/4, N/2, 3N/4$ ve N) akım yönüne dik olan z-ekseni yönündeki kesitlerde hesaplanmıştır. N , x-ekseni doğrultusundaki toplam grid sayısıdır. Başka bir ifade ile u^* -hız bileşeni x-ekseni doğrultusunda dört farklı noktada ($x^*=0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0) hesaplanmıştır.

Ayrıca verilen ortalama Reynolds sayısı için x-ekseni boyunca Re sayısındaki değişim film kalınlığına ve hıza bağlı olarak hesaplanmış ve grafiksel olarak şekillerde gösterilmiştir.

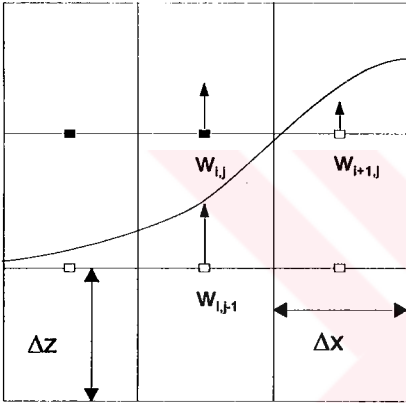
Karakteristik uzunluğu teşkil eden ortalama film kalınlığı (η_o) ve referans hızı (u_o) verilen Reynolds sayısına, akışkanın kinematik viskozitesine (ν) ve levhanın x-ekseni ile yaptığı açıya (α) bağlı olarak hesaplanmaktadır. Her Reynolds sayısı ($Re=5-11, 15, 20$ ve 25) için levha açısı $\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90° olarak belirlenmiş ve her durum için serbest yüzeyli akımın hareketi incelenmiştir. Reynolds sayısına ve (α) açısına bağlı olarak hesaplanan diğer parametreler η_o, u_o ve Froude sayısı ekler kısmındaki tabloda (Ek. 5) verilmiştir.



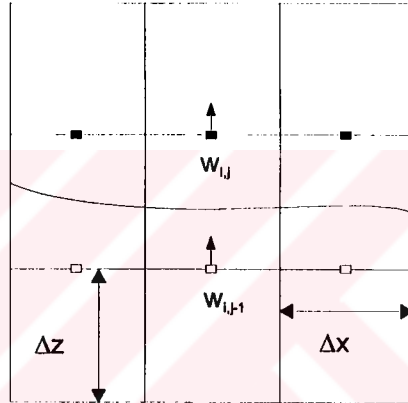
Durum 1: $w_{i,j} = 0.5 (w_{i-1,j} + w_{i+1,j})$



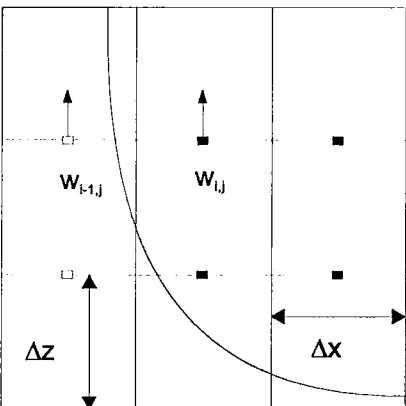
Durum 2: $w_{i,j} = (\Delta z w_{i-1,j} + \Delta x w_{i,j-1}) / (\Delta x + \Delta z)$



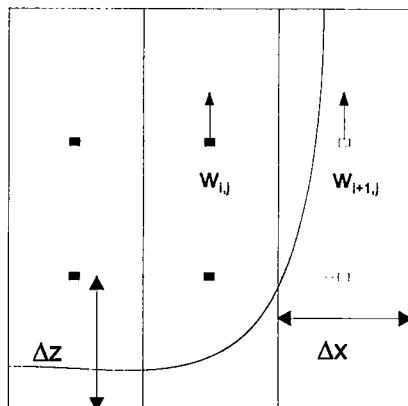
Durum 3: $w_{i,j} = (\Delta z w_{i+1,j} + \Delta x w_{i,j-1}) / (\Delta x + \Delta z)$



Durum 4: $w_{i,j} = w_{i,j-1}$



Durum 5: $w_{i,j} = w_{i-1,j}$



Durum 6: $w_{i,j} = w_{i+1,j}$

Şekil 5.2. Olası w-hız bileşeni durumları

5.1.Hız Bileşenlerinin Hesaplanması

Bu bölümde Şekil 5.1.'de verilen akım şeması kullanılarak farklı Reynolds, Froude sayıları ve α açıları için u-hız bileşeni profilleri incelenmiştir. u-hız bileşeni profilleri x-ekseni doğrultusunda akım yönüne dik, dört farklı kesitte ($x^*=N/4$, $N/2$, $3N/4$ ve N) incelenmiştir. N , x-ekseni doğrultusundaki toplam grid sayısıdır. Her Reynolds sayısı ($Re=5, 9, 10, 15, 20$ ve 25) için levha dört farklı açıda ($\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90°) tutularak bunlara bağlı Froude sayıları ile u-hız bileşeni profilleri hesaplanmıştır. (Şekil 5.1.1–5.1.48.) her Reynolds sayısı ve açı (α) için u-hız bileşeni profillerini boyutlu ve boyutsuz olarak göstermektedir.

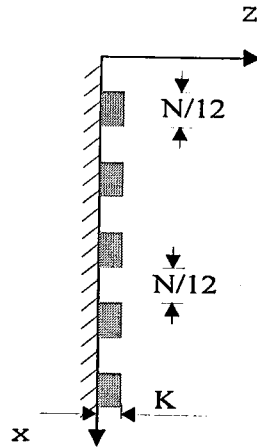
5.2. Film Kalınlığının Hesaplanması

Şekil 5.1.'de akım şeması kullanılarak kinematik sınır şartından film kalınlığı x-ekseni boyunca hesaplanmıştır. Şekil 5.2.1.-5.2.8. film kalınlığını x-ekseni boyunca farklı Reynolds sayıları ($Re=5, 8, 9, 10, 11, 15, 20$ ve 25) ve α açıları için göstermektedir Film kalınlığı her Reynolds sayısı için dört farklı açıda ($\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90°) ve bunlara bağlı Froude sayıları ile hesaplanmış ve boyutsuz olarak şekillerde gösterilmiştir.

Şekil 5.2.9.-5.2.16. verilen ortalama Reynolds sayılarındaki değişimi x-ekseni boyunca farklı açılar ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90°) için göstermektedir. Ortalama Reynolds sayısı belirli kesitlerde film kalınlığına ve hız bileşenlerine bağlı olarak hesaplanmaktadır.

5.3. Dikdörtgen Elemanlarla Örtülü (Pürüzlü) Levhanın Film Kalınlığına Etkisi

(Şekil 5.3.1.) dikdörtgen elemanlarla örtülü (pürüzlü) levhayı göstermektedir.



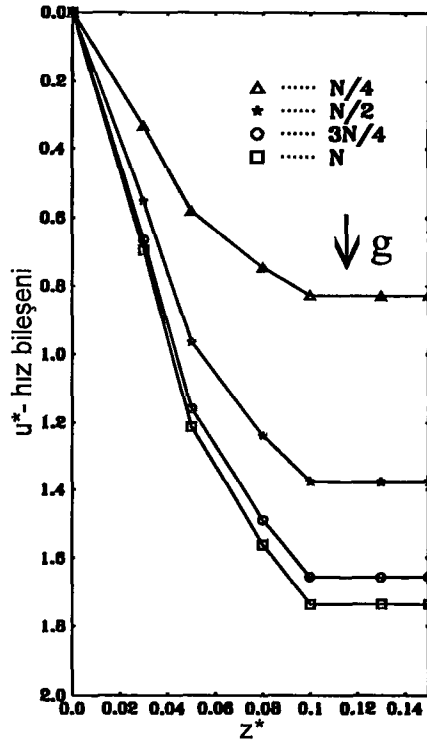
Şekil 5.3.1. Dikdörtgen elemanlarla örtülü (pürüzlü) levha

Levha üzerine eşit boyutta ($N/12$) ve eşit aralıkta ($N/12$) dikdörtgen elemanlar yerleştirilip elemanların kalınlıkları $K=2, 3$ ve 4 olarak değiştirilmiştir. K , z -ekseni yönündeki dikdörtgen eleman kalınlığını ifade etmektedir.

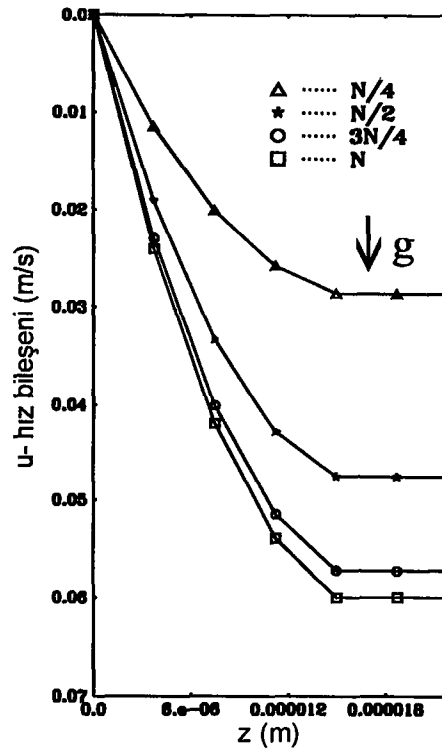
Bu çalışmada x -ekseni ile levha arasındaki açı ($\alpha = 60^\circ$) sabit tutularak farklı Reynolds sayıları ($Re=5$ ve 10) ve her Reynolds sayısı için dikdörtgen eleman kalınlığı ($K=2, 3$ ve 4) olarak artırılıp x -ekseni doğrultusundaki film kalınlığı incelenmiştir. Farklı eleman kalınlıklarından elde edilen sonuçlar pürüzsüz düzlem üzerinde aynı Reynolds sayısı ve α açısı için elde edilen sonuçlarla mukayese edilmiştir. Şekil 5.3.2.-5.3.9. pürüzlü ve pürüzsüz düzlemden elde edilen sonuçları her iki Reynolds sayısı için göstermektedir.

Şekil 5.3.2. $Re=5$, $\alpha = 60^\circ$ için pürüzsüz levha üzerindeki film kalınlığını gösterirken (Şekil 5.3.3.-5.3.5.) $Re=5$ ve $\alpha = 60^\circ$ için sırası ile eleman kalınlığı $K=2, 3$ ve 4 ' den elde edilen x -ekseni doğrultusundaki film kalınlıklarını göstermektedir.

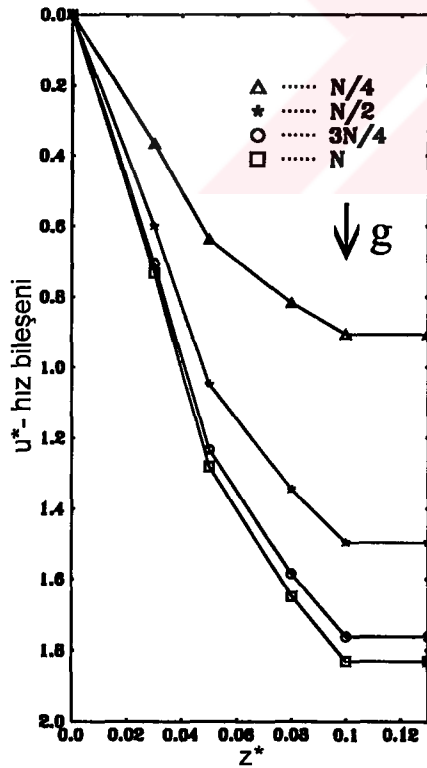
Benzeri bir şekilde film kalınlığı $Re=10$ ve $\alpha = 60^\circ$ için (Şekil 5.3.6.-5.3.9.) gösterilmiştir. Şekil 5.3.6. pürüzsüz düzlem üzerindeki x -ekseni boyunca film kalınlığını gösterirken Şekil 5.3.7-5.3.9 sırası ile dikdörtgen eleman kalınlıklarından ($K=2, 3$ ve 4) elde edilen film kalınlıklarını göstermektedir. Şekillerden de görüleceği gibi dikdörtgen eleman kalınlığı arttığı zaman film kalınlığındaki dalgalarda belirgin hale gelmekte ve $Re=10$ ve $K=4$ 'de dalgalarda yaklaşık olarak sinüsoidal şekle dönüştüğü gözlenmektedir.



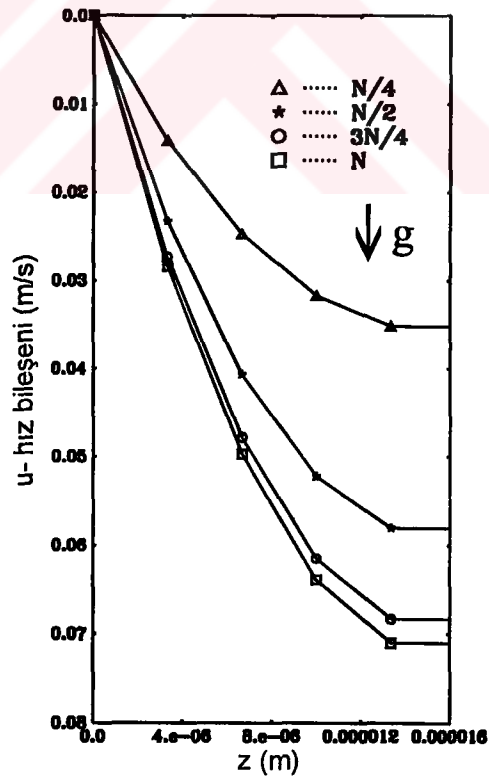
Şekil 5.1.1. $Re=5$, $Fr=0.91287$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



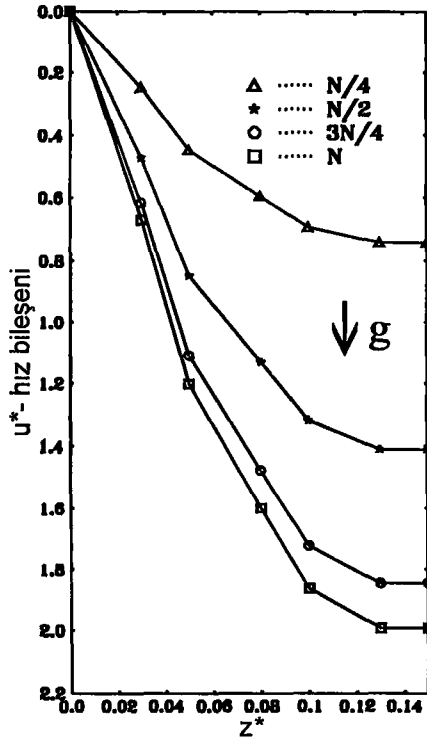
Şekil 5.1.2. $Re=5$, $Fr=0.91287$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



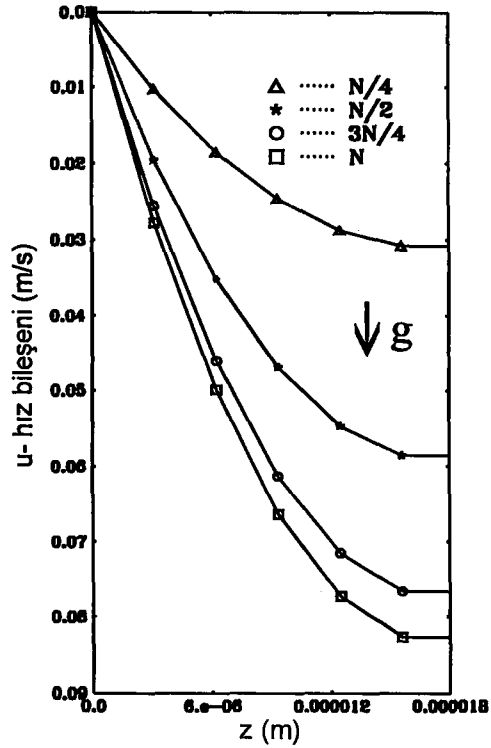
Şekil 5.1.3. $Re=5$, $Fr=1.08559$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



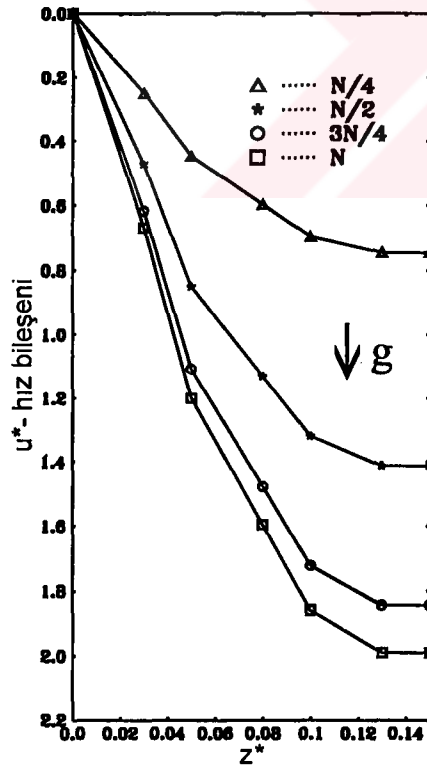
Şekil 5.1.4. $Re=5$, $Fr=1.08559$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



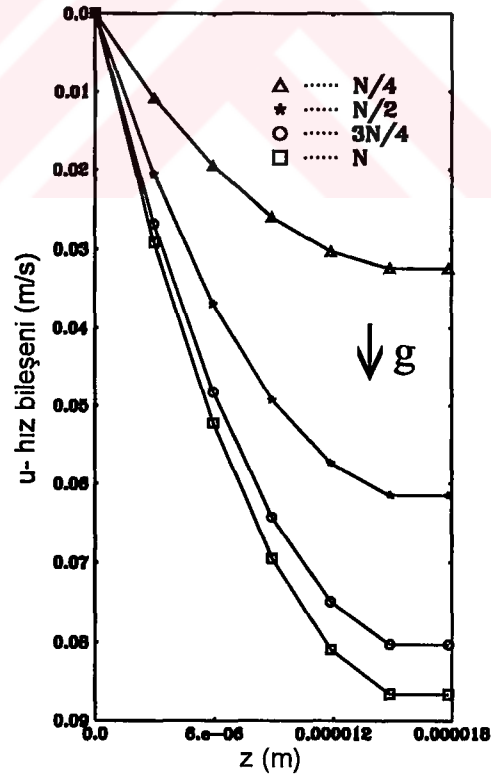
Şekil 5.1.5. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



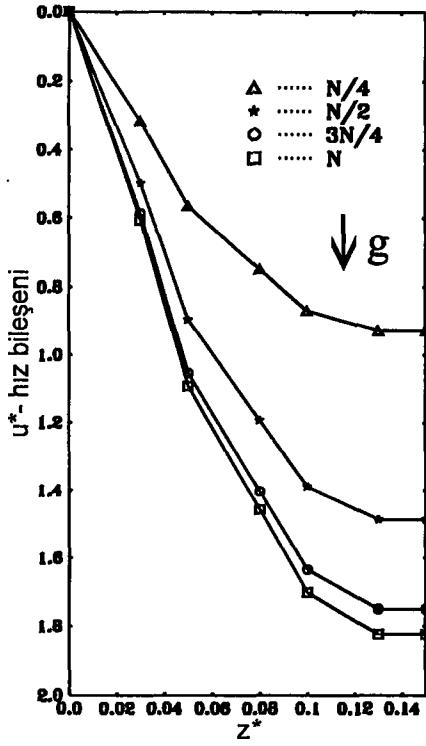
Şekil 5.1.6. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



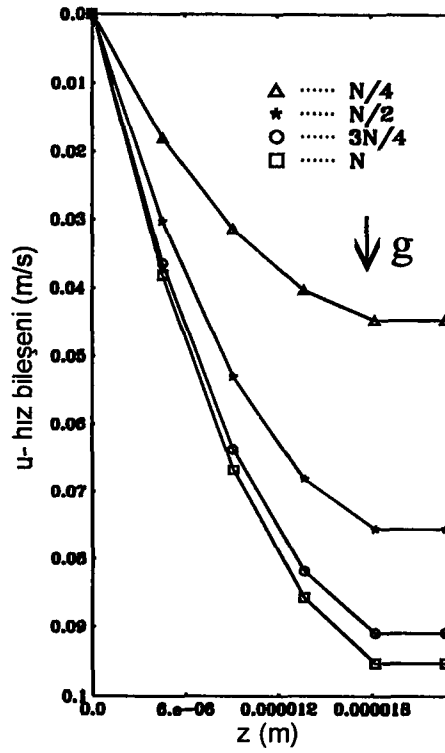
Şekil 5.1.7. $Re=5$, $Fr=1.29099$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



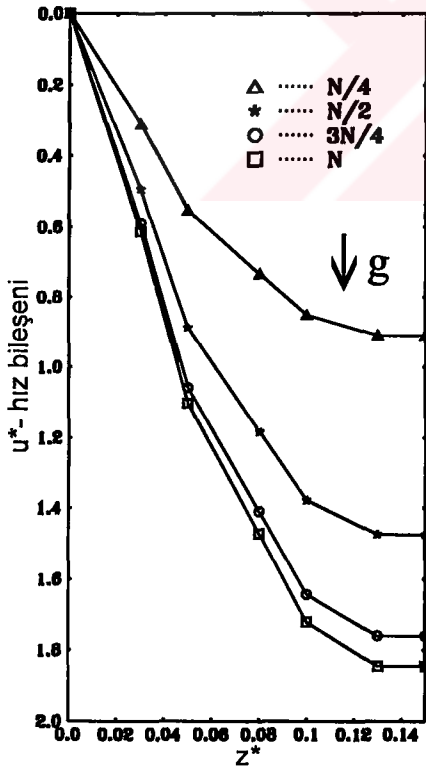
Şekil 5.1.8. $Re=5$, $Fr=1.29099$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



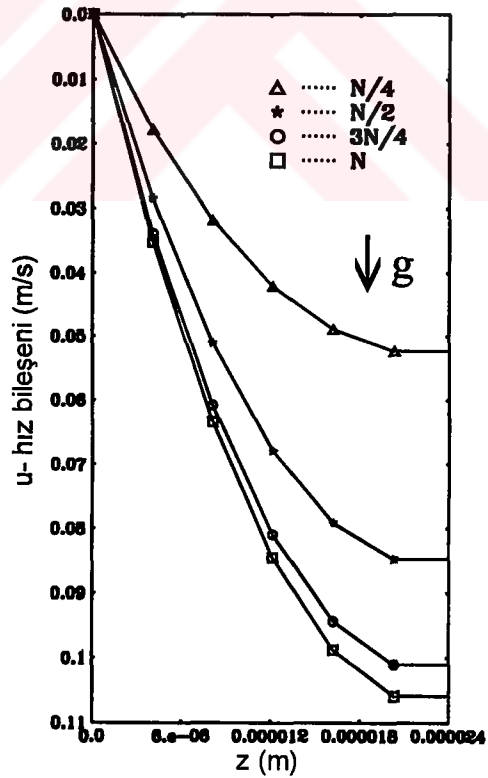
Şekil 5.1.9. $Re=9$, $Fr=1.22474$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



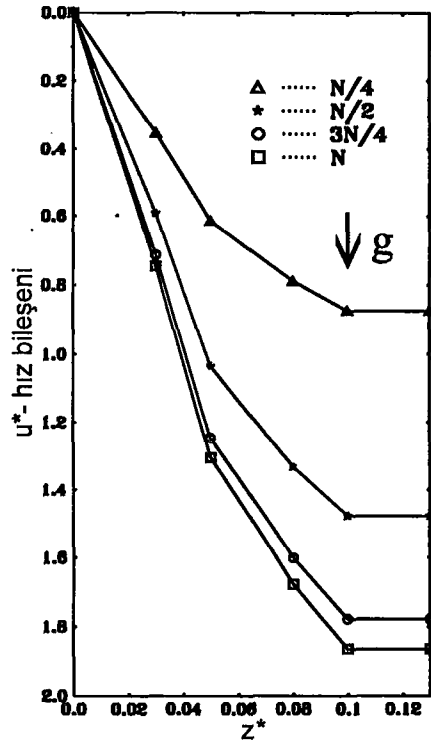
Şekil 5.1.10. $Re=9$, $Fr=1.22474$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



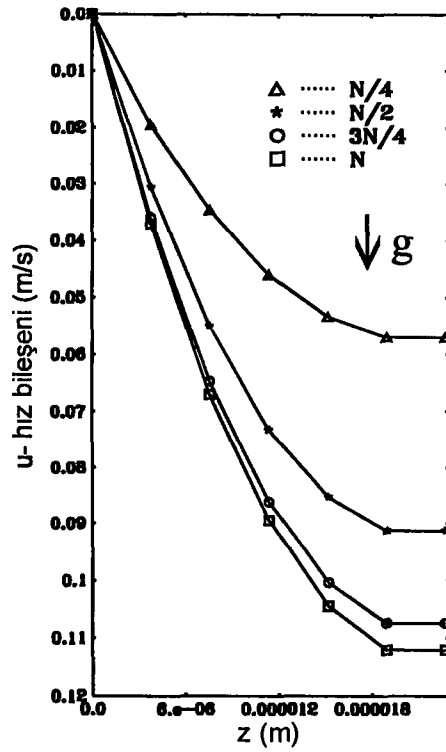
Şekil 5.1.11. $Re=9$, $Fr=1.45647$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



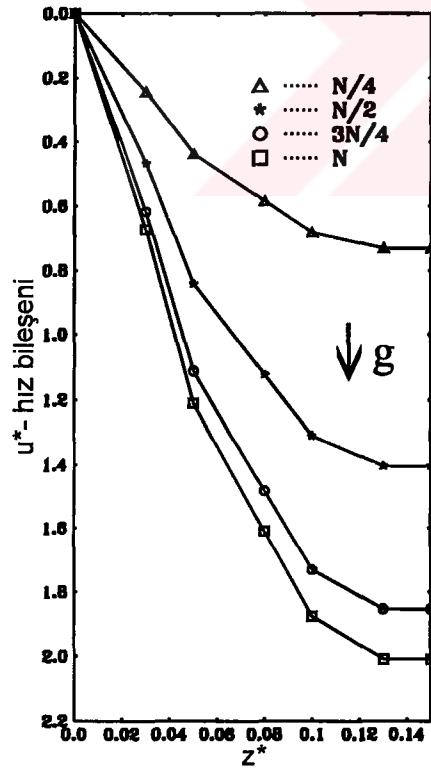
Şekil 5.1.12. $Re=9$, $Fr=1.45647$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



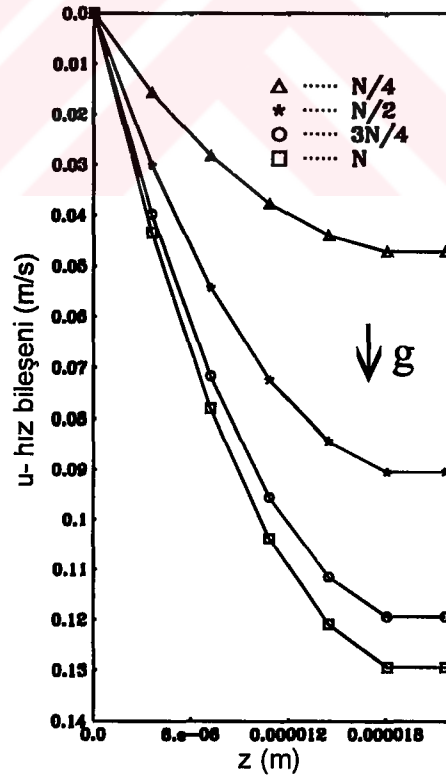
Şekil 5.1.13. $Re=9$, $Fr=1.61185$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



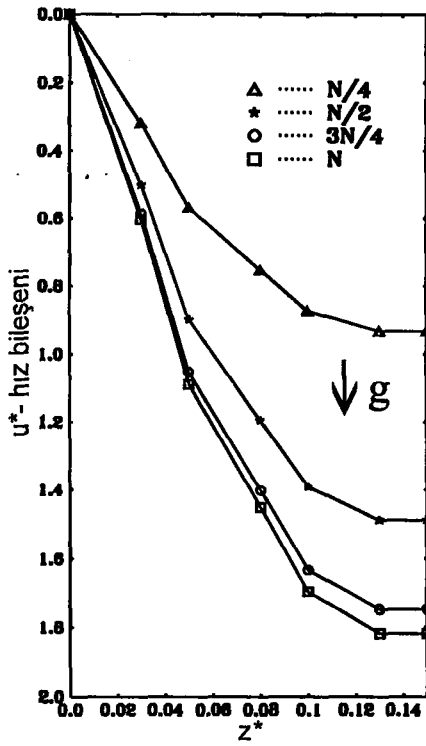
Şekil 5.1.14. $Re=9$, $Fr=1.61185$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



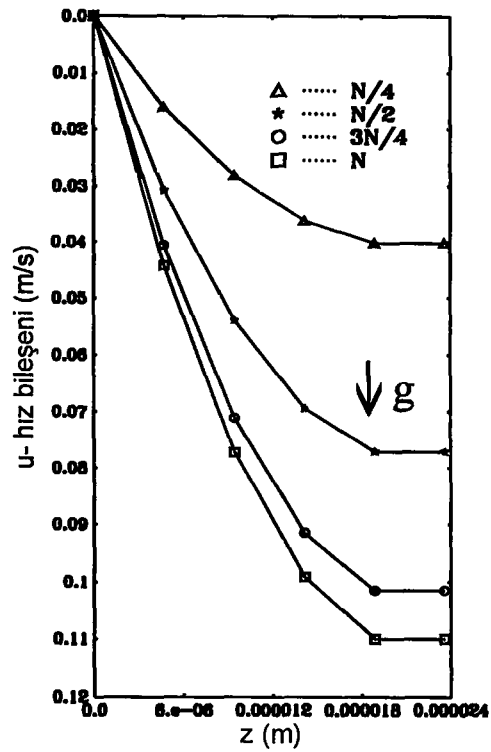
Şekil 5.1.15. $Re=9$, $Fr=1.73205$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



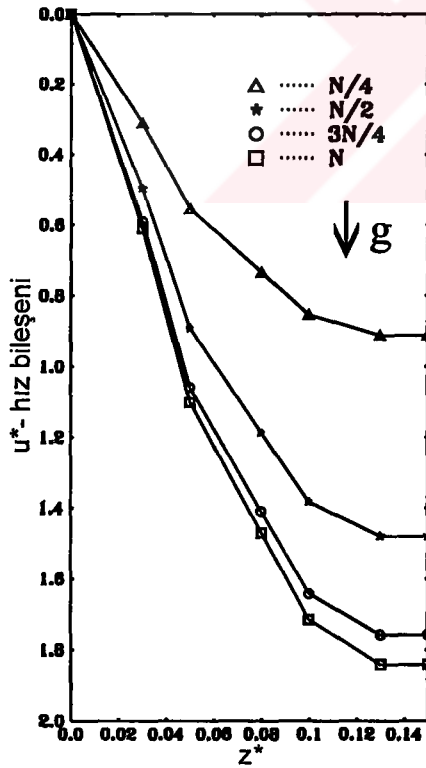
Şekil 5.1.16. $Re=9$, $Fr=1.73205$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



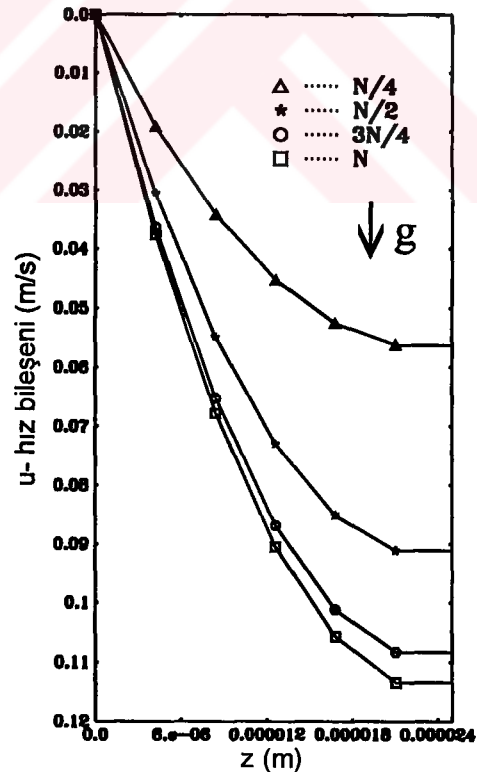
Şekil 5.1.17. $Re=10$, $Fr=1.29099$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



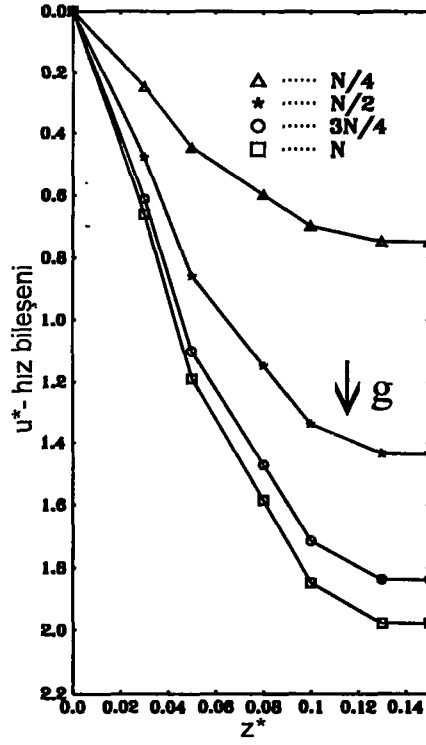
Şekil 5.1.18. $Re=10$, $Fr=1.29099$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



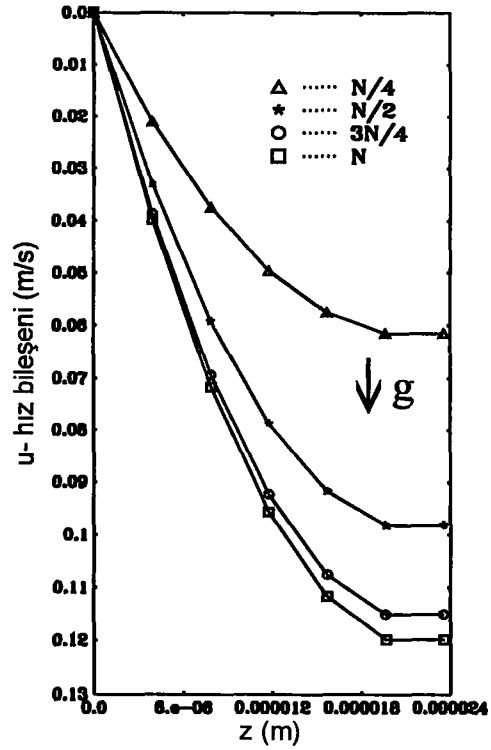
Şekil 5.1.19. $Re=10$, $Fr=1.53525$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



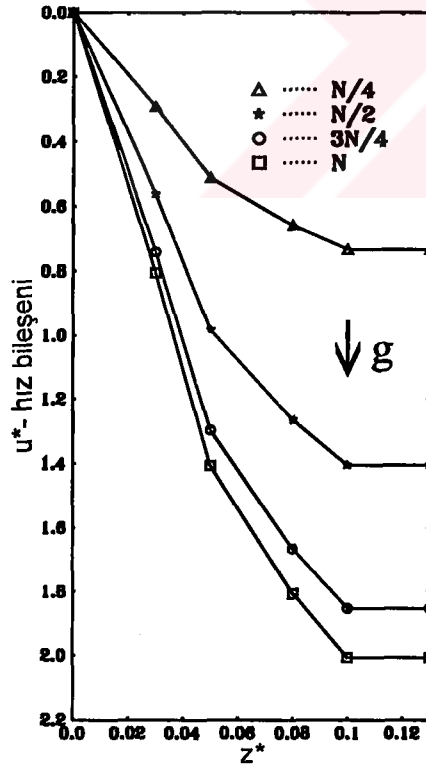
Şekil 5.1.20. $Re=10$, $Fr=1.53525$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



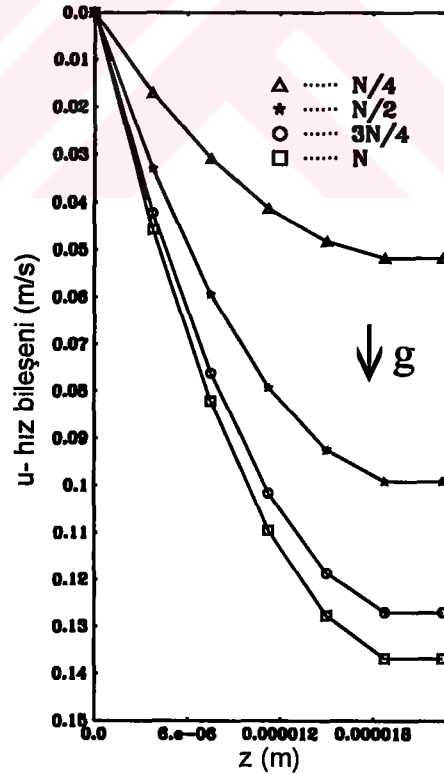
Şekil 5.1.21. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



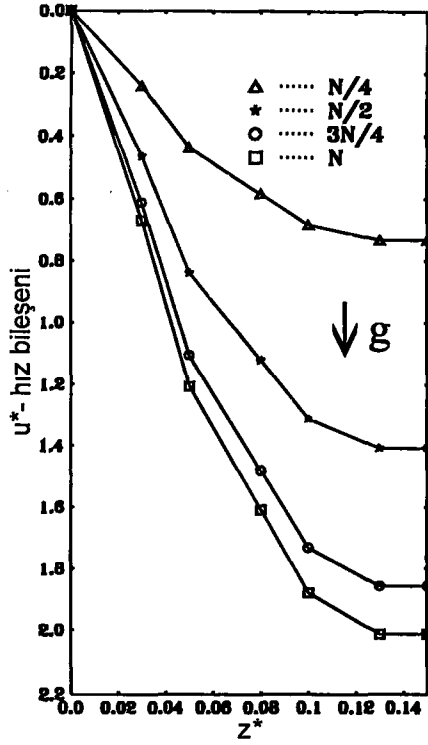
Şekil 5.1.22. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



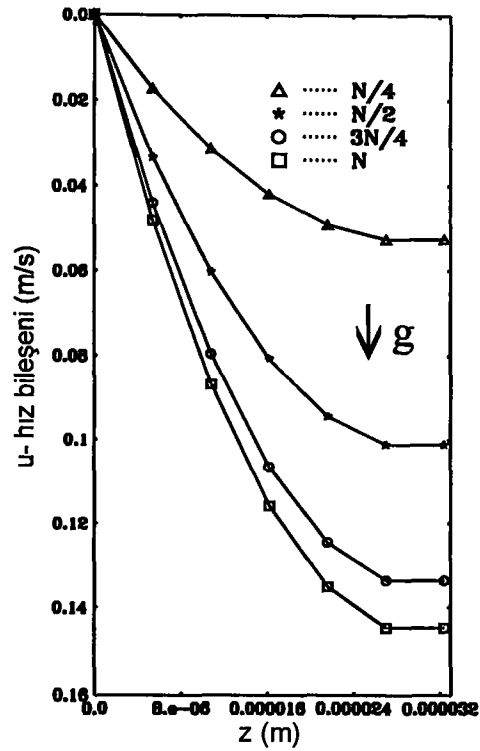
Şekil 5.1.23. $Re=10$, $Fr=1.82574$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



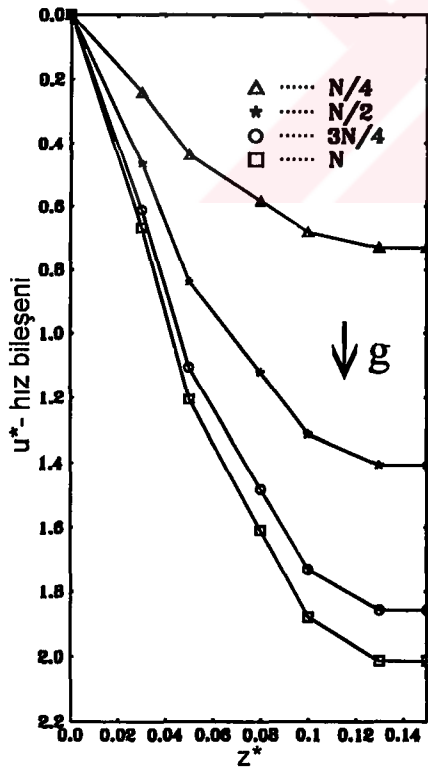
Şekil 5.1.24. $Re=10$, $Fr=1.82574$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



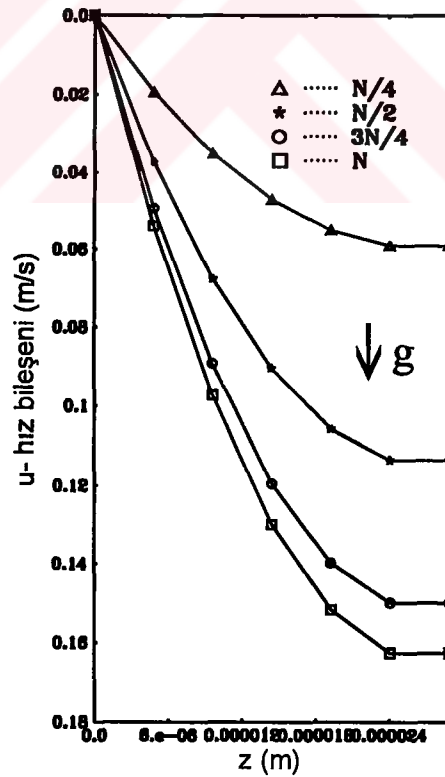
Şekil 5.1.25. $Re=15$, $Fr=1.58113$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



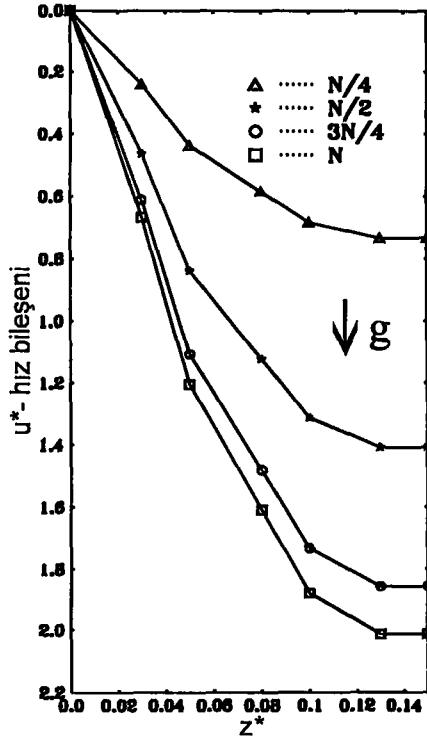
Şekil 5.1.26. $Re=15$, $Fr=1.58113$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



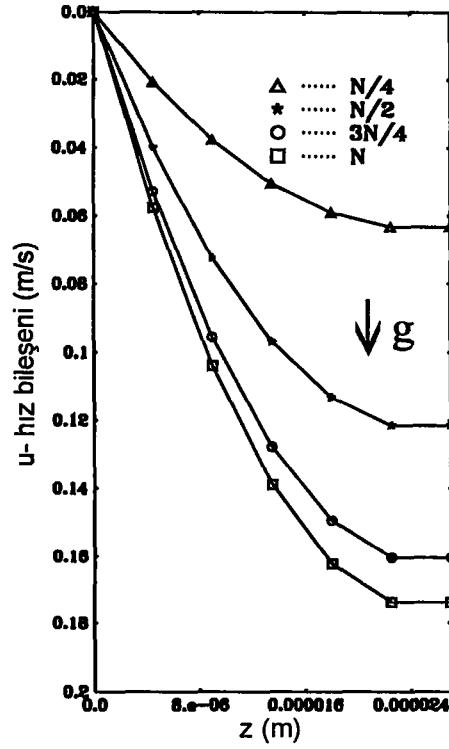
Şekil 5.1.27. $Re=15$, $Fr=1.88030$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



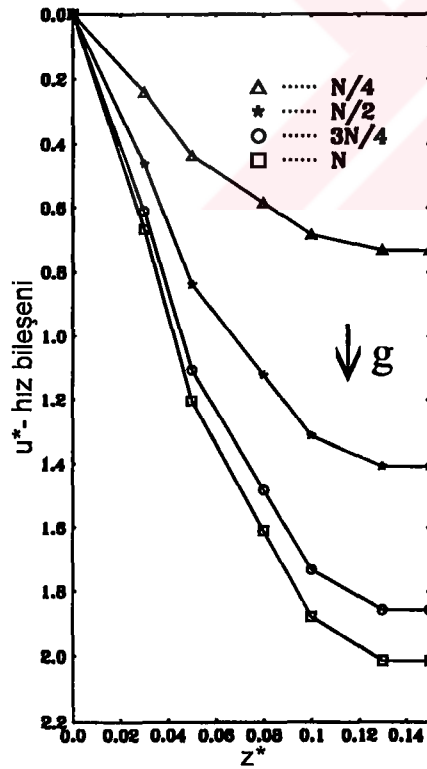
Şekil 5.1.28. $Re=15$, $Fr=1.88030$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



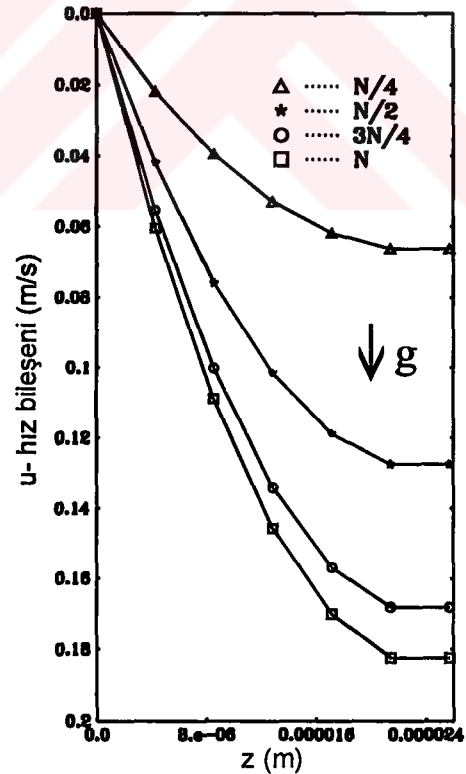
Şekil 5.1.29. $Re=15$, $Fr=2.08089$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



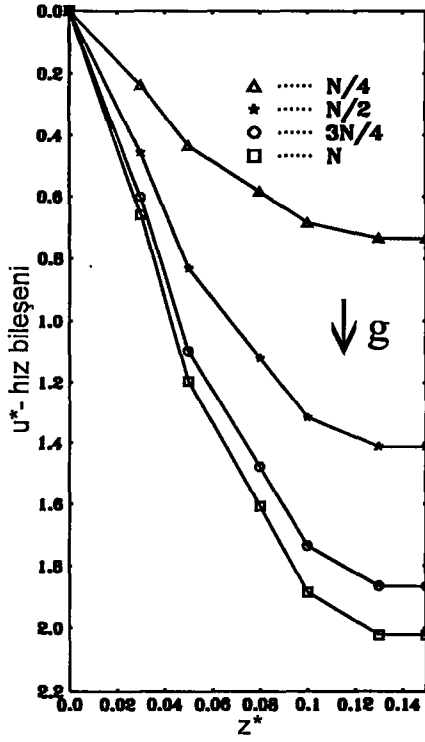
Şekil 5.1.30. $Re=15$, $Fr=2.08089$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



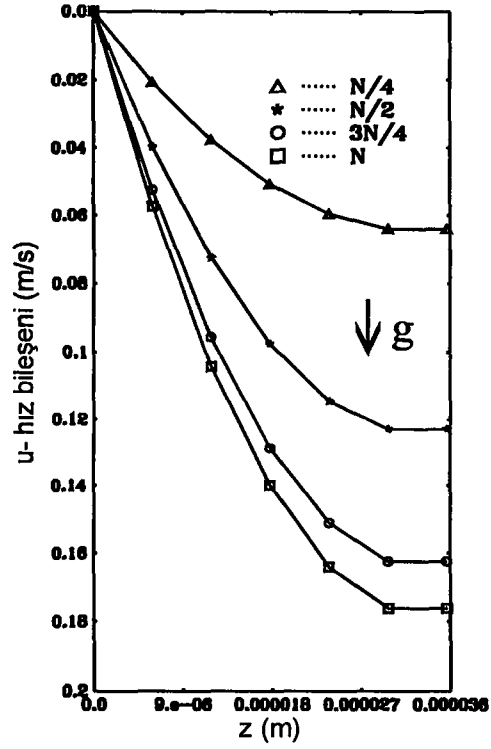
Şekil 5.1.31. $Re=15$, $Fr=2.23606$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



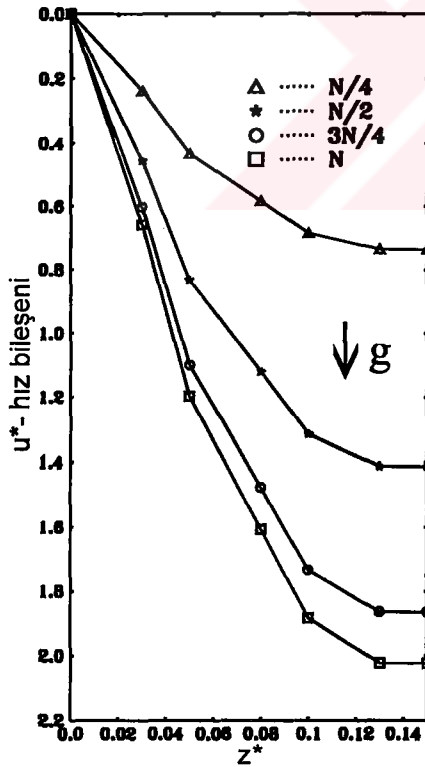
Şekil 5.1.32. $Re=15$, $Fr=2.23606$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



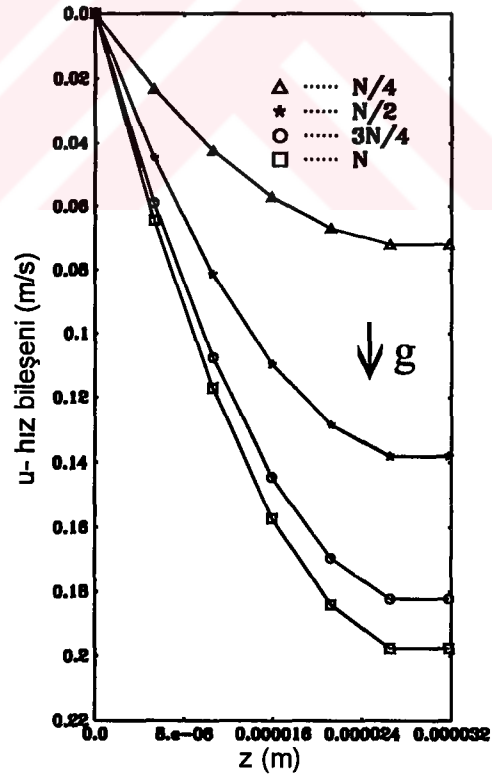
Şekil 5.1.33. $Re=20$, $Fr=1.82574$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



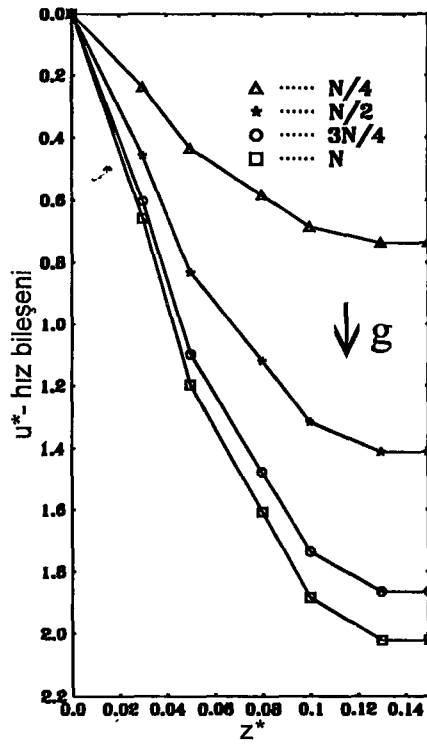
Şekil 5.1.34. $Re=20$, $Fr=1.82574$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



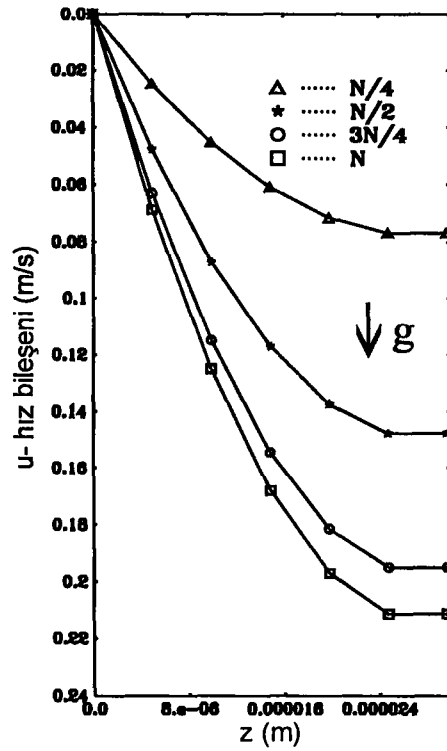
Şekil 5.1.35. $Re=20$, $Fr=2.17118$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



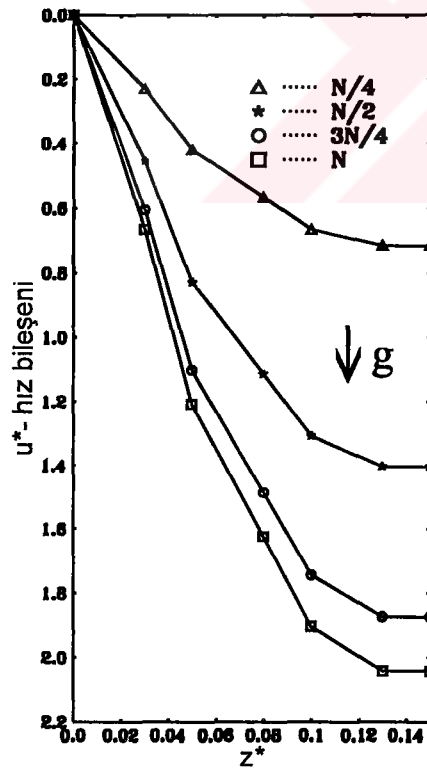
Şekil 5.1.36. $Re=20$, $Fr=2.17118$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



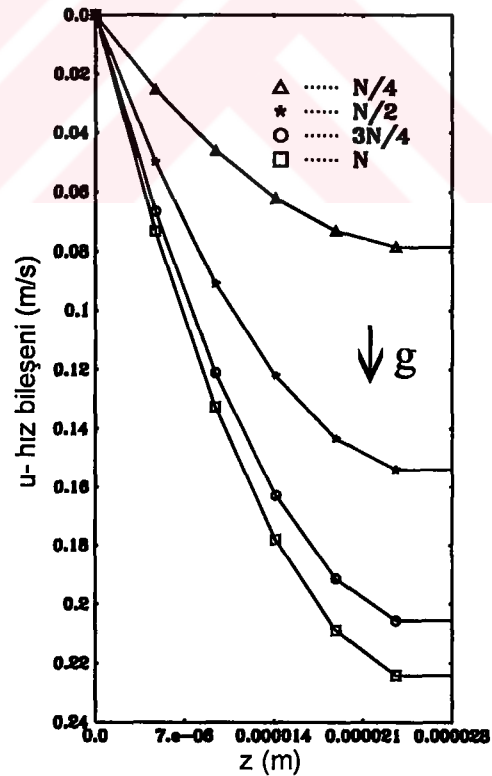
Şekil 5.1.37. $Re=20$, $Fr=2.40281$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



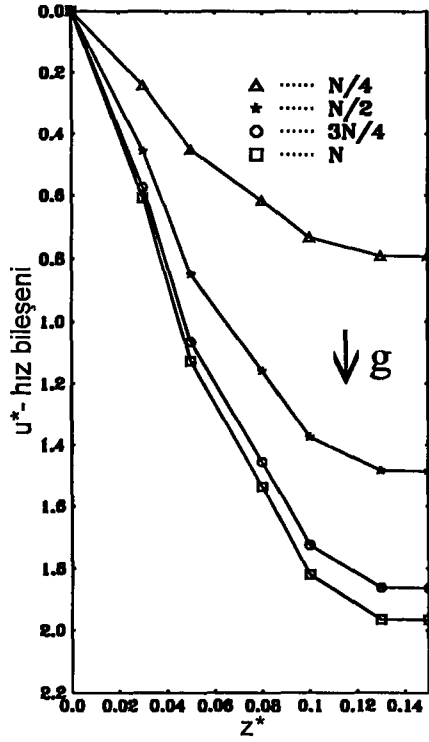
Şekil 5.1.38. $Re=20$, $Fr=2.40281$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



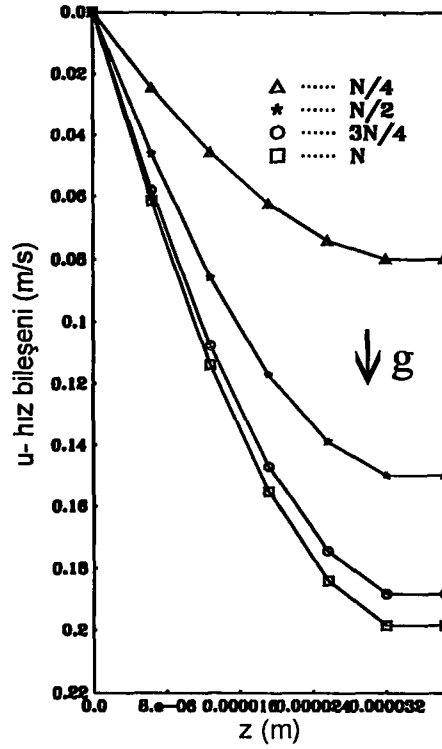
Şekil 5.1.39. $Re=20$, $Fr=2.58198$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



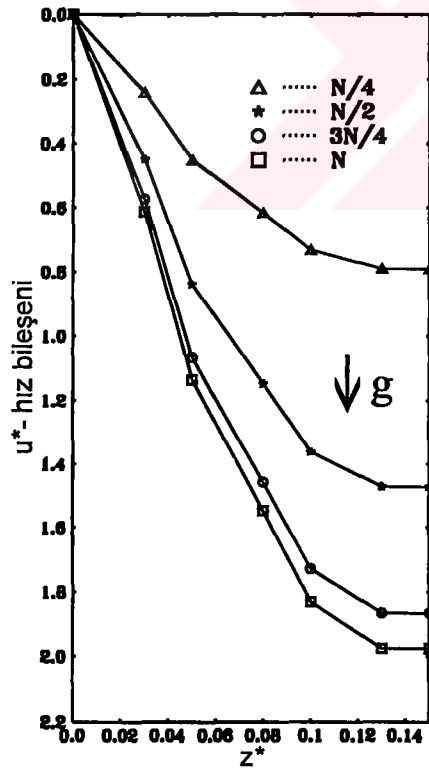
Şekil 5.1.40. $Re=20$, $Fr=2.58198$ ve $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



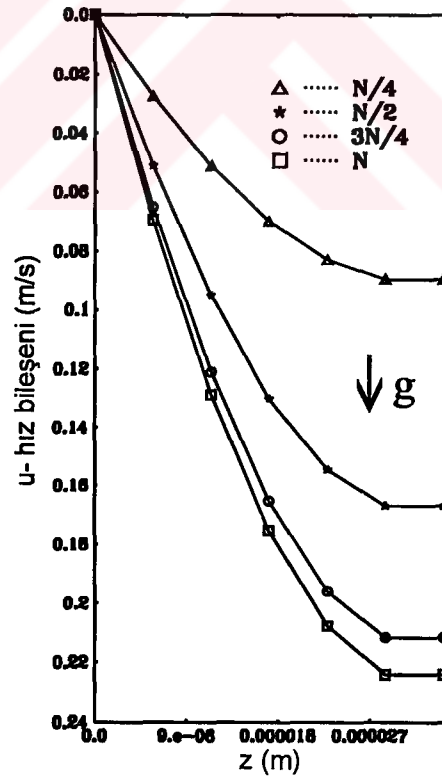
Şekil 5.1.41. $Re=25$, $Fr=2.04124$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



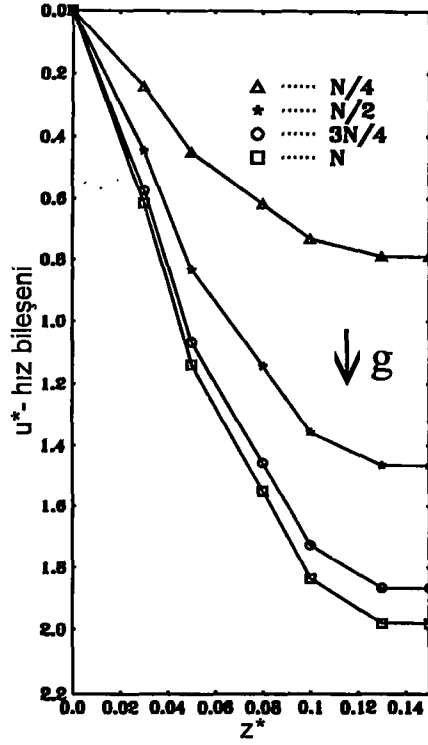
Şekil 5.1.42. $Re=25$, $Fr=2.04124$ ve $\alpha=30^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



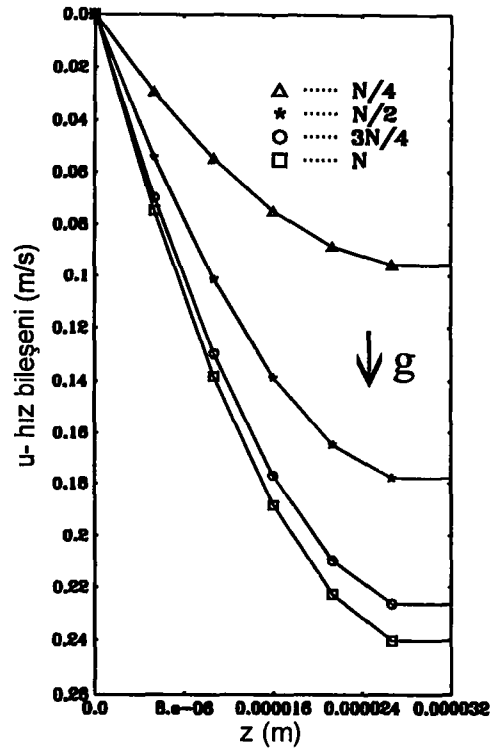
Şekil 5.1.43. $Re=25$, $Fr=2.42745$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



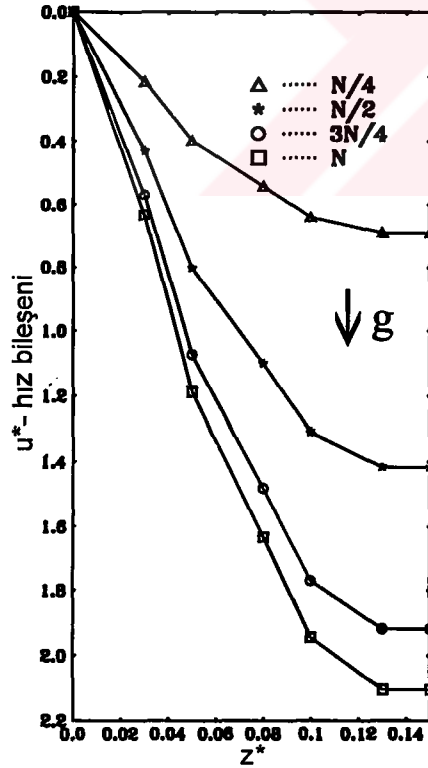
Şekil 5.1.44. $Re=25$, $Fr=2.42745$ ve $\alpha=45^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



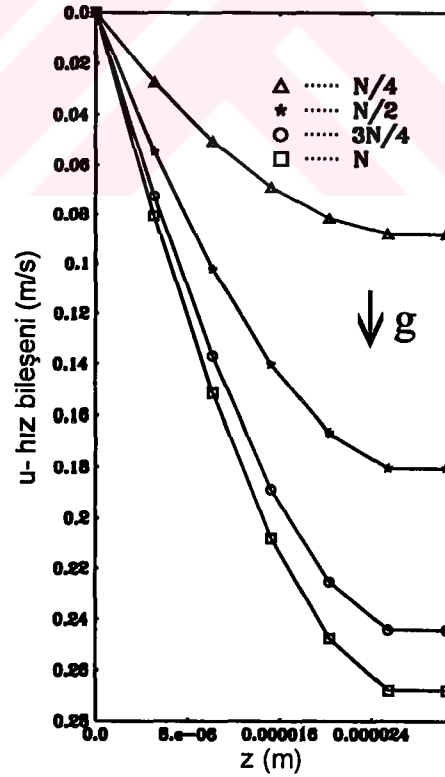
Şekil 5.1.45. $Re=25$, $Fr=2.68642$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



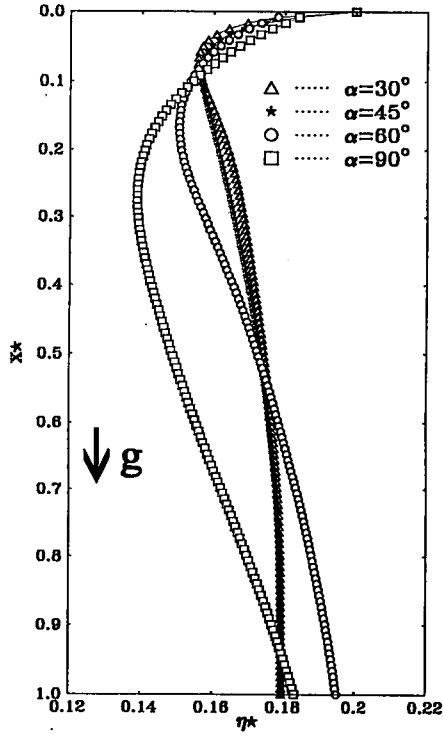
Şekil 5.1.46. $Re=25$, $Fr=2.68642$ ve $\alpha=60^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



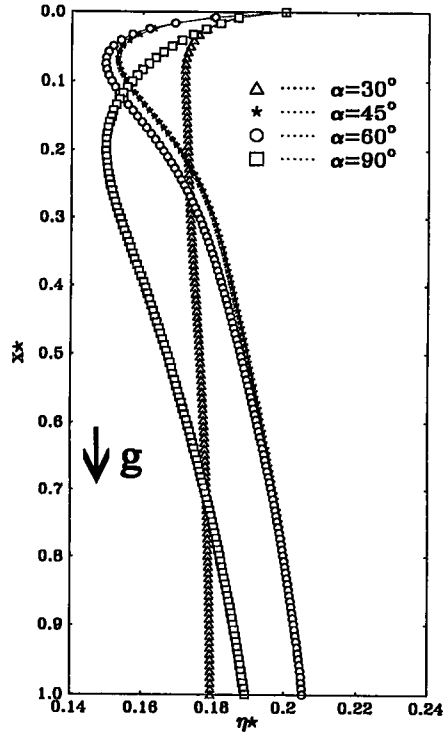
Şekil 5.1.47. $Re=25$, $Fr=2.88675$ $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki (boyutsuz) u^* - hız bileşeni profili



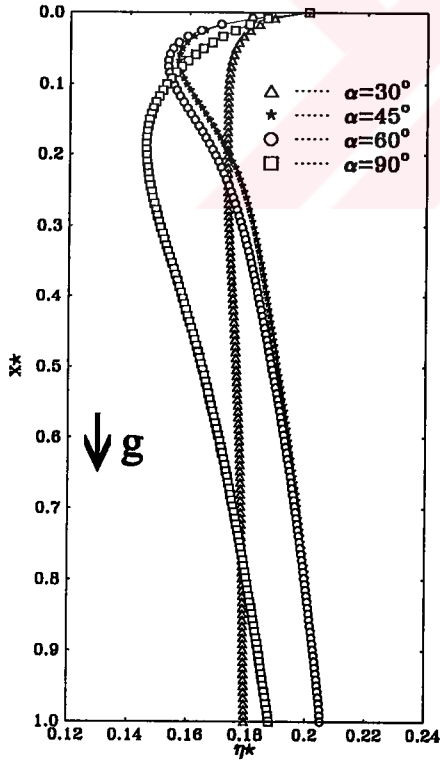
Şekil 5.1.48. $Re=25$, $Fr=2.88675$ $\alpha=90^\circ$ için eğimli düzlem üzerinde farklı kesitlerdeki u - hız bileşeni profili



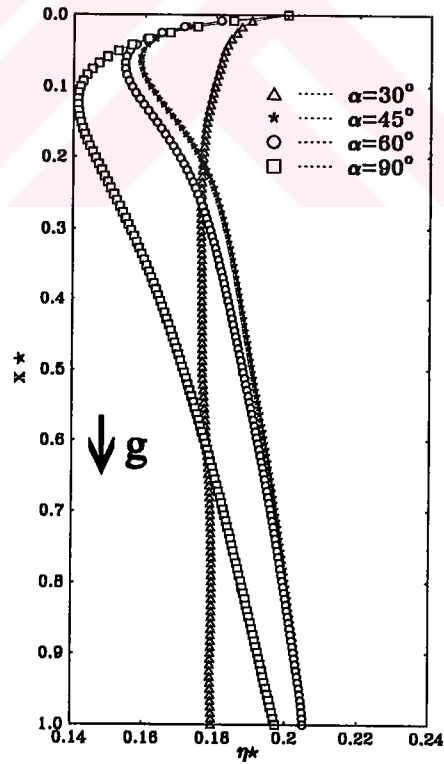
Şekil 5.2.1. Re=5 ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



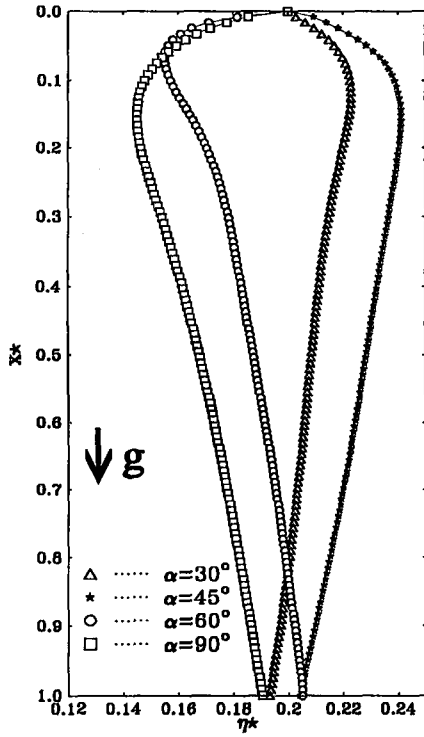
Şekil 5.2.2. Re=8 ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



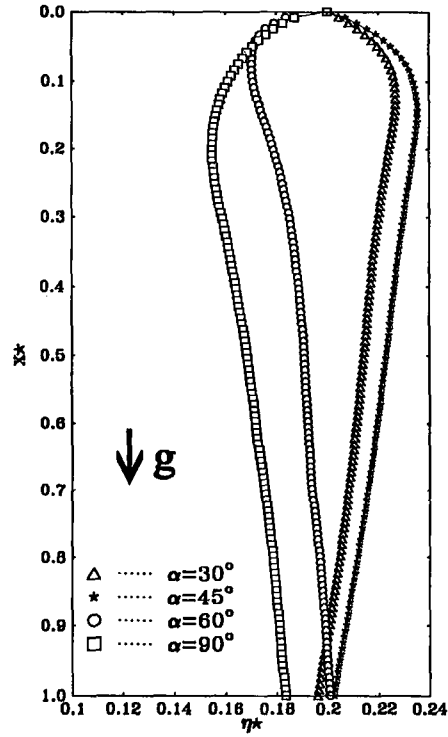
Şekil 5.2.3. Re=9 ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



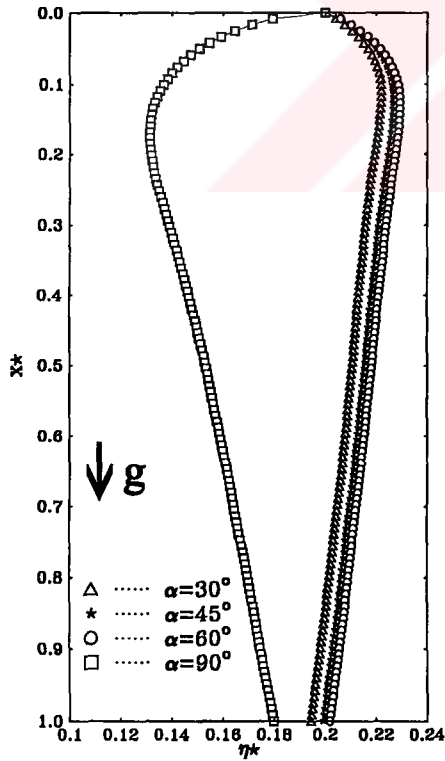
Şekil 5.2.4. Re=10 ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



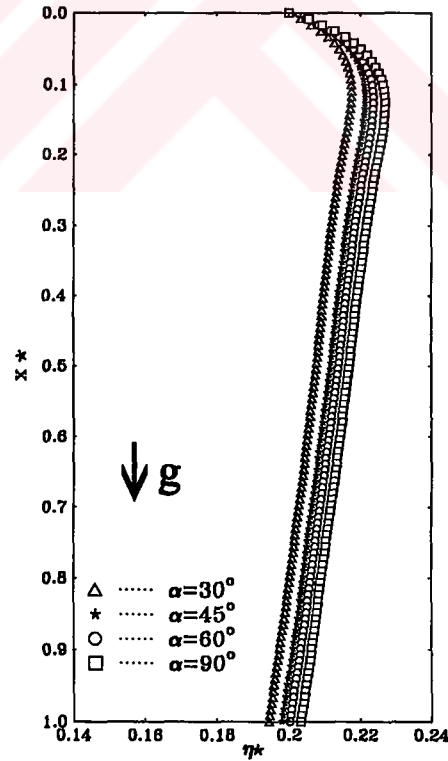
Şekil 5.2.5. $Re=11$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



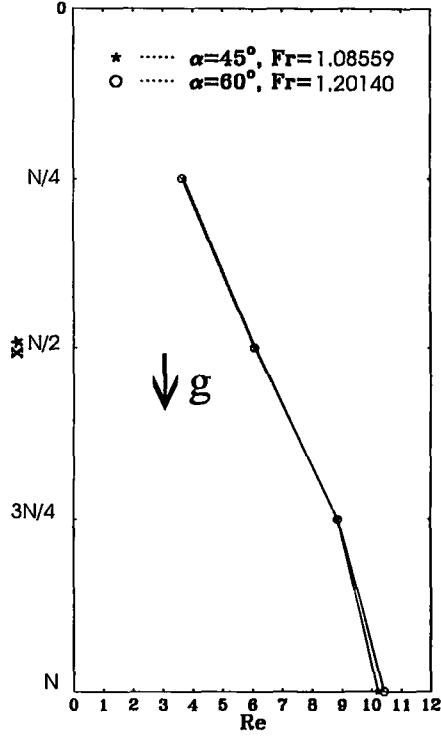
Şekil 5.2.6. $Re=15$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



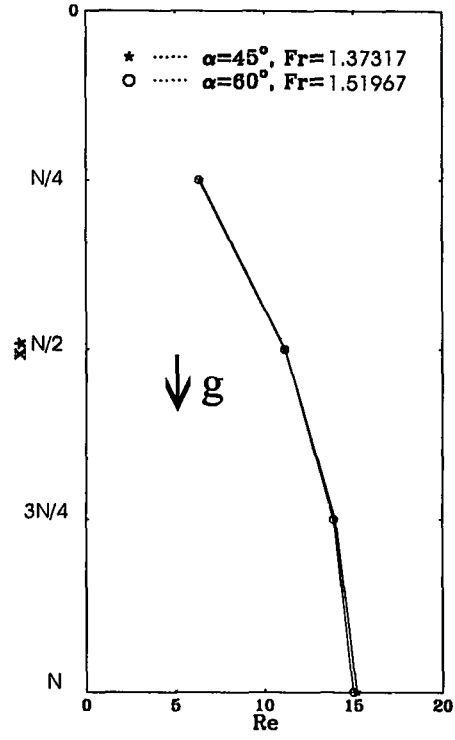
Şekil 5.2.7. $Re=20$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



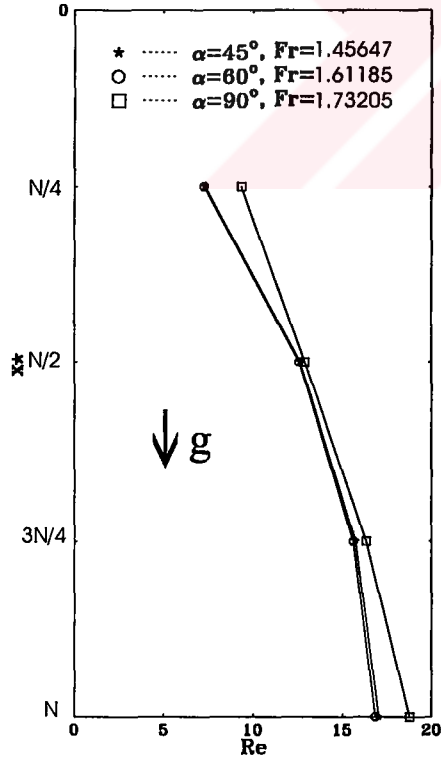
Şekil 5.2.8. $Re=25$ ve farklı açılar için eğimli düzlem üzerinde η^* film kalınlığı



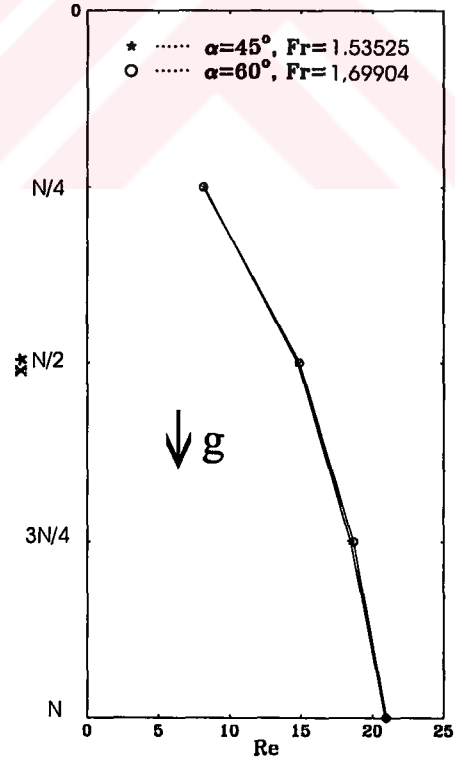
Şekil 5.2.9. Ortalama $Re=5$ 'e bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim



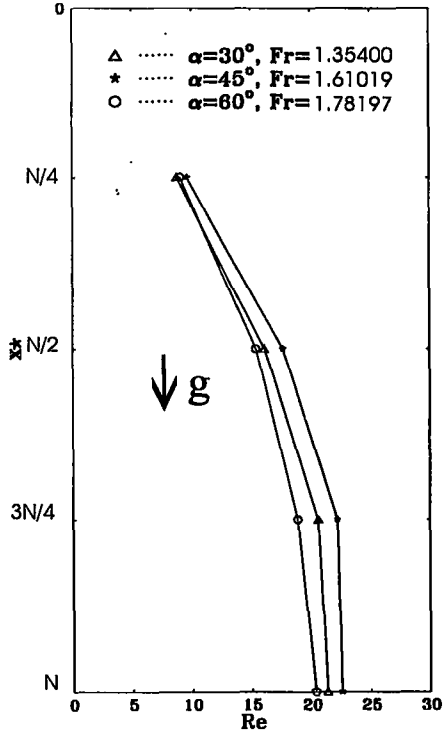
Şekil 5.2.10. Ortalama $Re=8$ 'e bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim



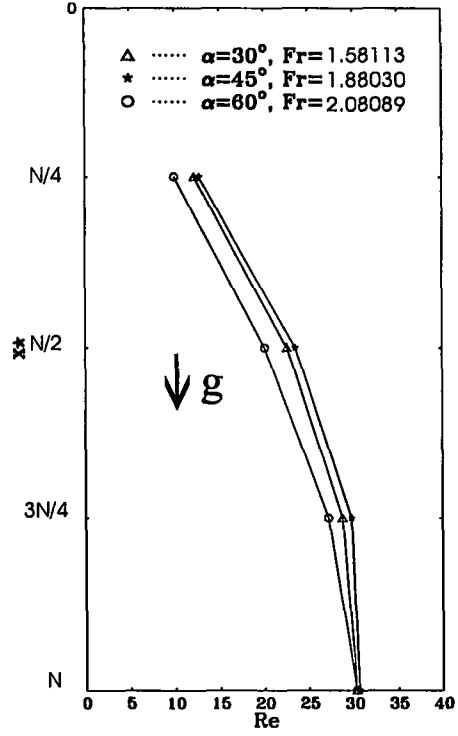
Şekil 5.2.11. Ortalama $Re=9$ 'a bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim



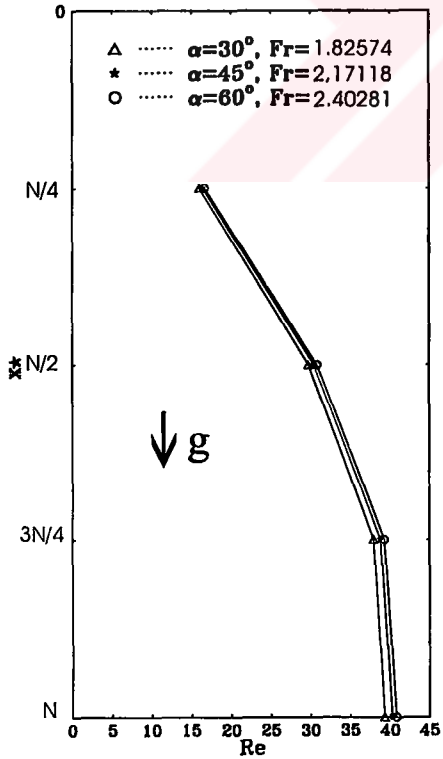
Şekil 5.2.12. Ortalama $Re=10$ 'a bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim



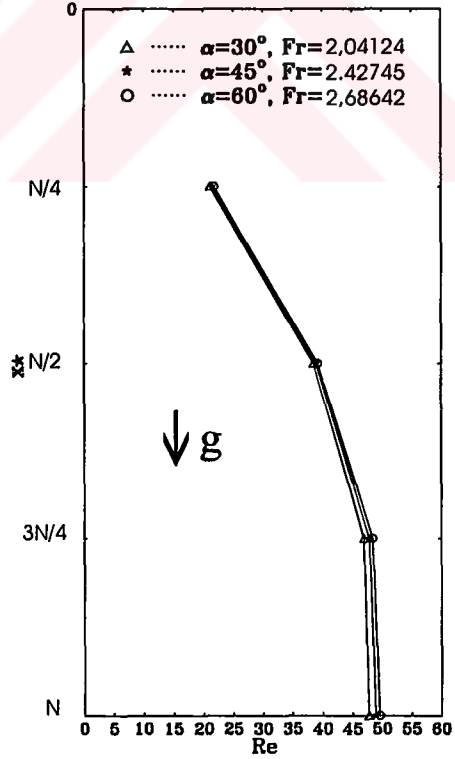
Şekil 5.2.13. Ortalama $Re=11$ 'e bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim.



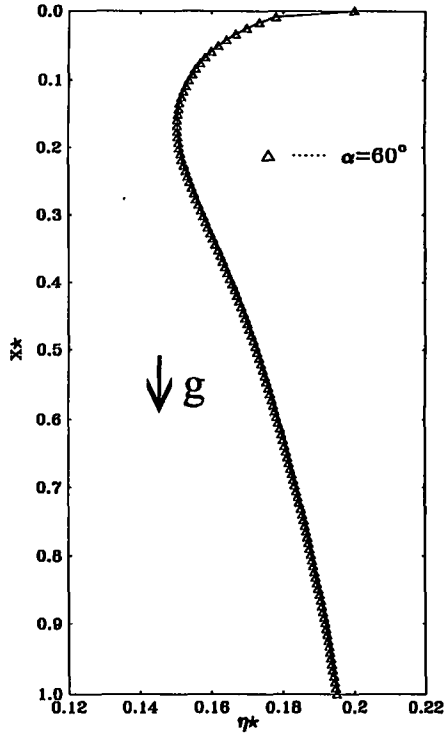
Şekil 5.2.14. Ortalama $Re=15$ 'e bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim.



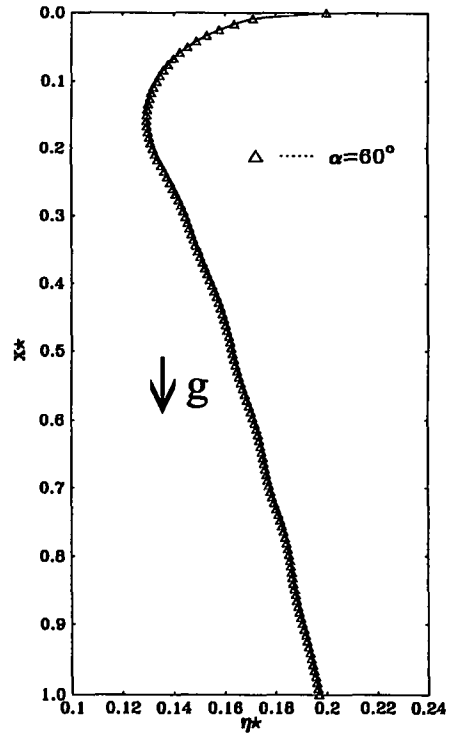
Şekil 5.2.15. Ortalama $Re=20$ 'e bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim.



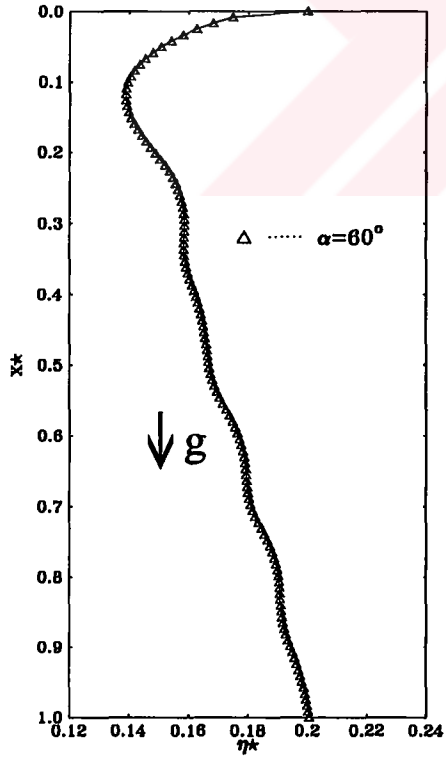
Şekil 5.2.16. Ortalama $Re=25$ 'e bağlı farklı açılar ve Fr sayıları için eğimli düzlem boyunca Re sayısındaki değişim.



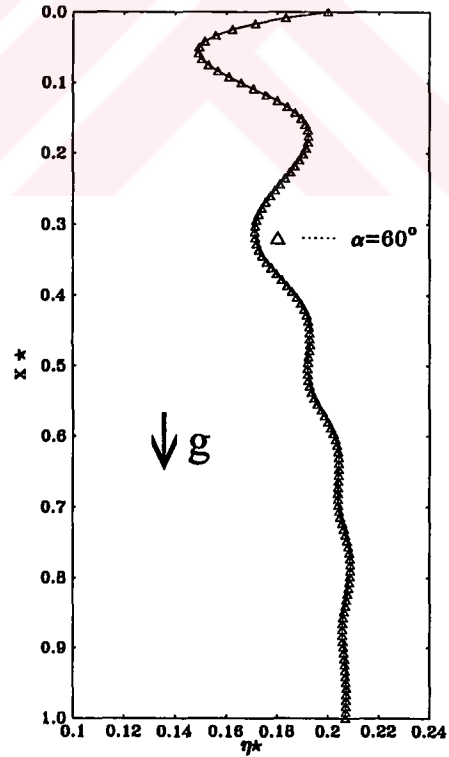
Şekil 5.3.2. $Re=5$ ve $Fr=1.20140$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



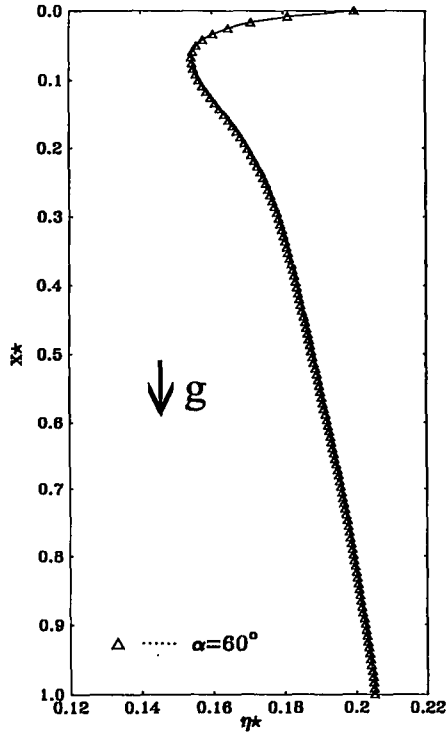
Şekil 5.3.3. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $K=2$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



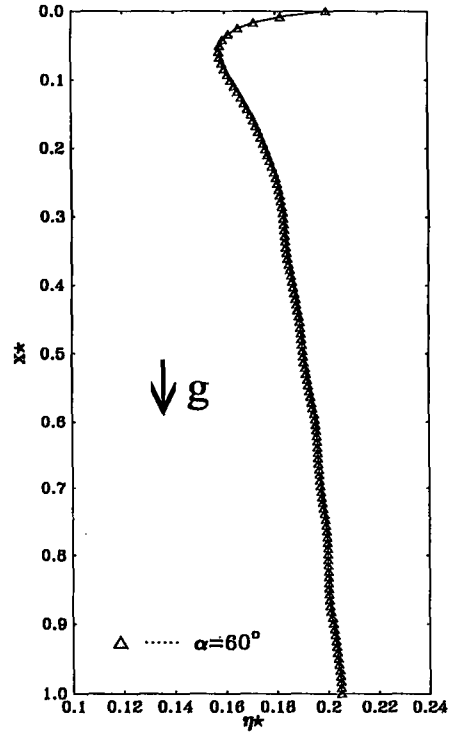
Şekil 5.3.4. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $K=3$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



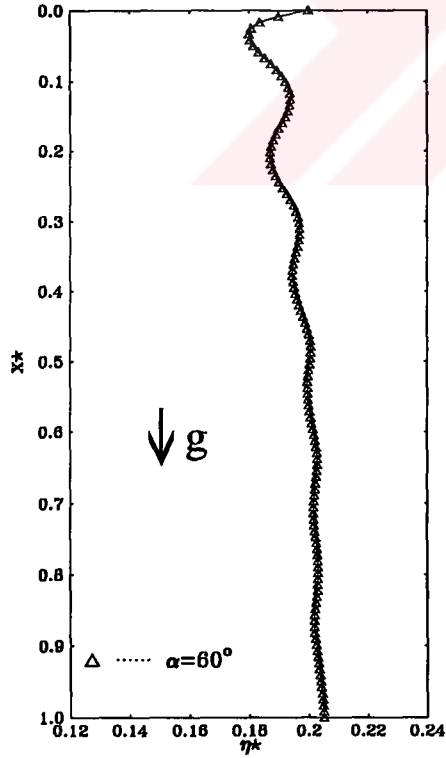
Şekil 5.3.5. $Re=5$, $Fr=1.20140$ ve $K=4$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



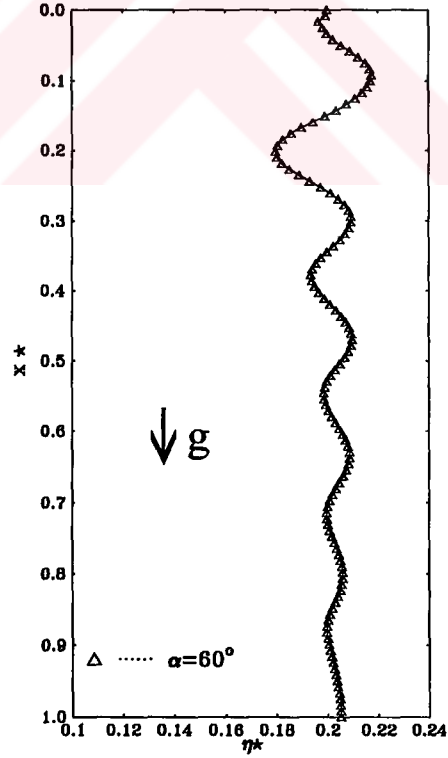
Şekil 5.3.6. $Re=10$ ve $Fr=1.69904$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



Şekil 5.3.7. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $K=2$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



Şekil 5.3.8. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $K=3$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı



Şekil 5.3.9. $Re=10$, $Fr=1.69904$ ve $K=4$ için eğimli düzlem boyunca η^* film kalınlığı

5.4. Çözümün Kararlılığı

Sayısal yöntem hesaplamalarında kararlılık, tolerans, grid sayıları ve sınır şartları büyük önem taşımaktadır. Söz konusu tüm problemler tranziyent olduğundan dolayı doğru sonuçlar elde etmek için tolerans konusunda doğru seçim yapılması gerekmektedir. Genelde sayısal yöntem hesaplarında bir relatif hata aşağıdaki gibi

$$\varepsilon = \left| \frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\phi_i^n} \right| \dots\dots\dots(5.1)$$

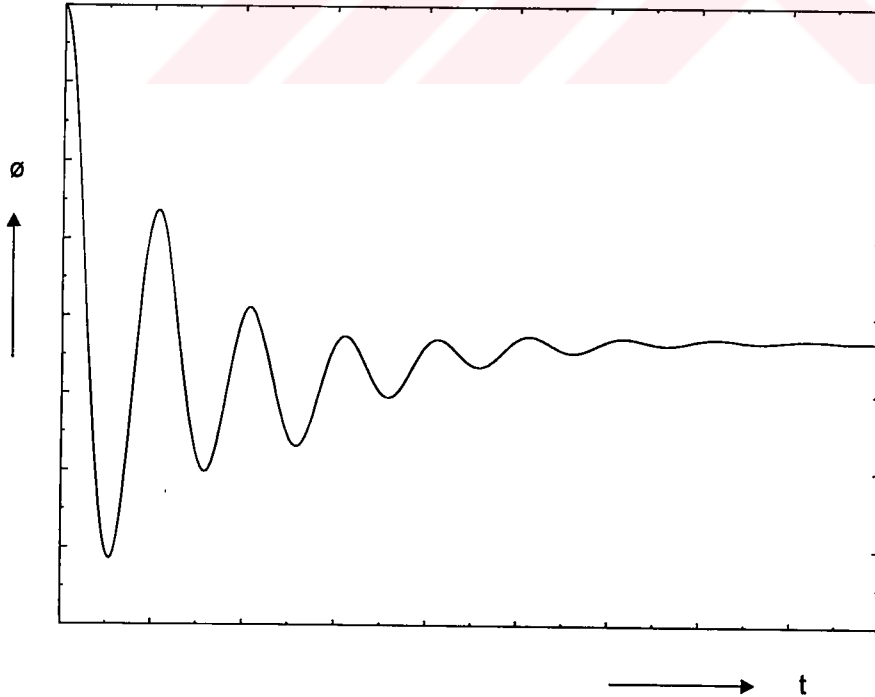
tanımlanmaktadır.

ϕ_i : herhangi bir değişken (film kalınlığı) olabilmektedir.

ϕ_i^n : ϕ_i 'nin n zaman iterasyonunda i noktasındaki değerini,

ϕ_i^{n-1} : ϕ_i 'nin (n-1) zaman iterasyonundaki, bir önceki iterasyondaki ϕ_i 'nin aynı noktadaki (i noktasında) değerini ifade etmektedir.

Yapılan çalışmada problemlerin çözümünden elde edilen sonuçların literatürde verilen sonuçlarla iyi uyum sağlaması için relatif hata $\varepsilon=10^{-6}$ olarak seçilmiştir. Bu kriter sağlandığı zaman problem yakınsak olmaktadır. Fakat zamana bağlı problemlerde bağımlı değişken (ϕ) zamana göre sürekli olarak değişmekte ve belli bir zamandan sonra sabit kalmaktadır. (Şekil 5.4.1.) bu değişimi göstermektedir.



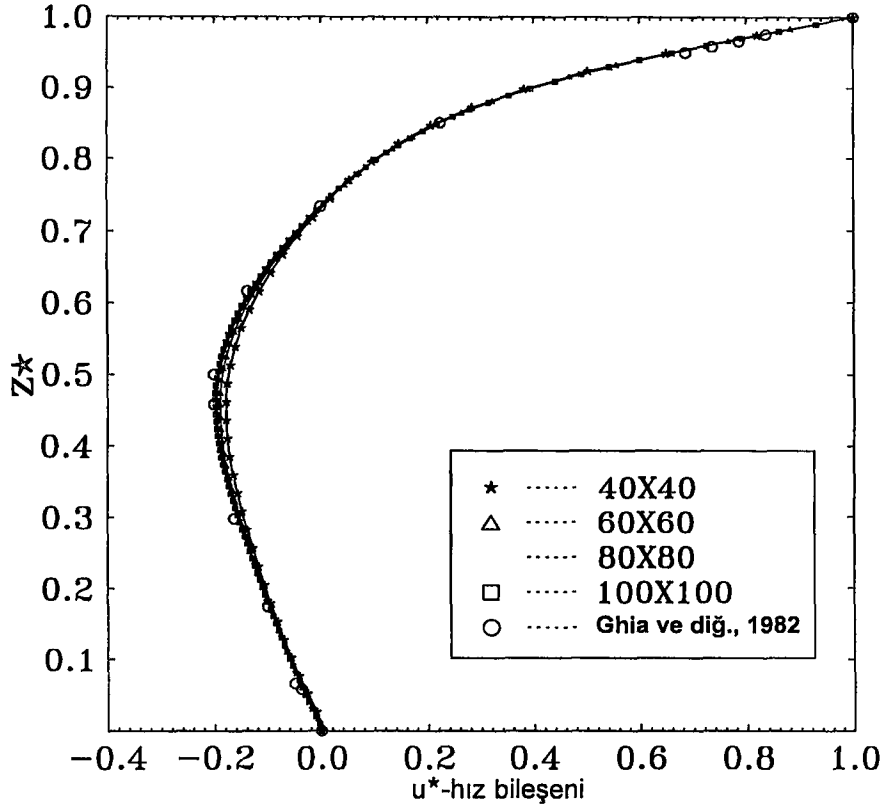
Şekil 5.4.1. ø'nin zamana (t) göre değişimi

Şekildeki grafiğin maksimum ve minimum noktalarında teğet sıfır olduğundan dolayı relatif hata değerine ilk maksimum noktasında ulaşmakta ve problem yakınsak olmadan program durabilmektedir. Bu yanılgıyı önlemek için ikinci bir yakınsak kriteri olarak son iterasyonlarda arka arkaya elde edilen relatif hata değerleri tanımlanan ε değerinden küçük veya eşitse problem yakınsak olmakta ve program durmaktadır. Bu ifade ise şekildeki grafikte ϕ 'nin zamana göre sabit kaldığı bölge, teğetin uzun süre sıfır olduğu bölgedir.

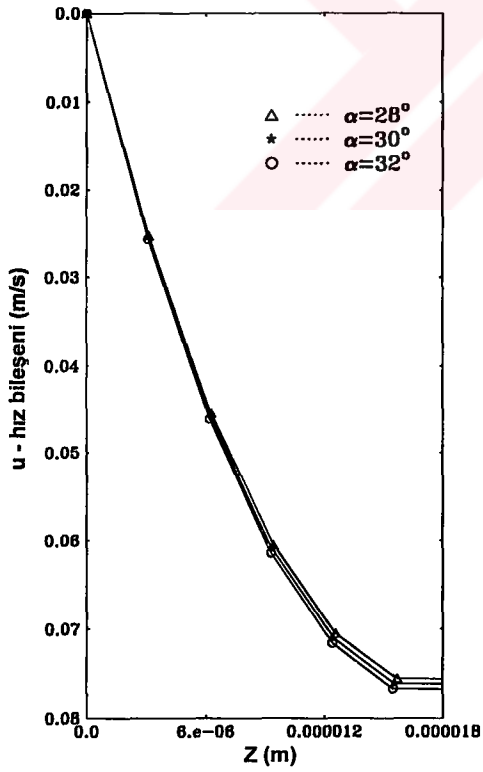
Kararlılığın ikinci şartı ise problemin akışına göre x- ve z-yönünde grid sayılarının doğru seçiminden ibarettir. Grid sayıları çözümü etkilemektedir. (Şekil 5.4.2.) bir önceki bölümde detaylı olarak incelenen kavite problemi çözümünde seçilen grid sayıları arasındaki farkı göstermektedir. Bu problem aynı Reynolds sayısı ($Re=100$) ve farklı grid sayıları 40X40, 60X60, 80X80 ve 100X100 için çözülmüş ve sonuçlar $x^*=N/2$ noktasında z-ekseni doğrultusundaki u-hız bileşeni profilleri olarak literatürdeki sonuçlarla birlikte grafiksel olarak verilmiştir. Literatürde verilen ve çözüme en yakın ve hatta aynı çözümü 100X100 grid sayıları vermekte ve kavite problemi hesaplarında bu grid sayıları seçilmiştir.

Serbest yüzeyli akım problemlerinde x-ekseni yönünde gerek film kalınlığı gerekse hız bileşenleri daha fazla değişim gösterdiğinden dolayı bu yöndeki grid sayıları z-ekseni yönüne mukayesen daha fazla olmaktadır. Serbest yüzeyli akım problemi için literatürde sonuçlar mevcut olmadığından dolayı kullanılan grid sayıları yapılan değişik grid sayıları varyasyonları neticesinde elde edilmiştir. Problem 120X40 grid sayılarında yakınsak olmuş ve bu çalışmada bu grid sayıları esas alınmıştır.

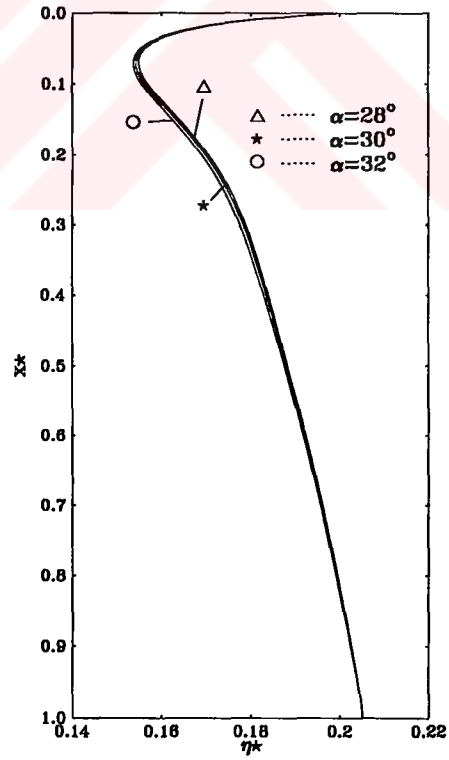
Kararlılığın diğer bir şartı ise problemin “well-posed” iyi vaz edilmiş olması gerekmektedir. (Şekil 5.4.3.) $x^*=N/2$ noktasındaki kesitte u-hız bileşeni profillerini $Re=5$ ve $\alpha=28^\circ$, 30° ve 32° için göstermektedir. Şekillerden de görüleceği gibi $\alpha=28^\circ$ için u-hız bileşeni profili $\alpha=30^\circ$ 'deki u-hız bileşeni profiline yanaşmaktadır. $\alpha=32^\circ$ için u-hız bileşeni profili ise $\alpha=30^\circ$ 'deki u-hız bileşeni profili üzerinde yer almaktadır. (Şekil 5.4.4.) aynı Reynolds sayısı ve farklı açılar ($\alpha=28^\circ$, 30° ve 32°) için film kalınlığını göstermektedir. Küçük açılar için film kalınlığı daha kalın olmaktadır. Bunlar problemin iyi vaz edilmiş olduğunu göstermektedir.



Şekil 5.4.2. Farklı grid sayıları için u^* -hız bileşeni profili (Re=100)



Şekil 5.4.3. Re=5 ve farklı açılar için u - hız bileşeni profili



Şekil 5.4.4. Re=5 ve farklı açılar için η^* film kalınlığı

5.5. Sonuçların Değerlendirilmesi

Bu çalışmada bir yöntem geliştirilmiştir. Yöntemin doğruluk derecesi ve geçerli olduğu parametre sınırları literatürde sonuçları verilen farklı Reynolds sayıları için kavite probleminde test edilip serbest yüzeyli akım için kullanılmıştır. Yöntemden elde edilen sonuçlar $Re=400$ 'e kadar literatürdeki sonuçlarla tamamen uyum sağlamakta, $Re=1000$ 'de pek az $Re=3200$ ve 5000 ise belirgin sapmalar göstermektedir.

Bu çalışmada geliştirilen yöntem kullanılarak serbest yüzey akımın hareketi incelenmiştir. Serbest yüzey akımında Reynolds, Froude sayıları ve x-ekseni ile levha arasındaki açı (α) dominant parametrelerdir.

(Şekil 4.1.2-4.1.5) farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400, 1000$ ve 3200) için u^* -hız bileşeni profillerini atalet kuvvetleri ihmal edildiği zaman göstermektedir. Atalet kuvvetleri (konvektif terimlerin) ihmali durumunda elde edilen sonuçlar farklı Reynolds sayıları için aynı karakteristiği taşımaktadır.

Kavite probleminde $x^*=N/2$ noktasında ve z-ekseni doğrultusundaki yöntemden elde edilen u^* -hız bileşeni profilleri (Şekil 4.1.6.-4.1.10.) sırası ile $Re=100, 400, 1000, 3200$ ve 5000 için literatürdeki (Ghia ve diğ., 1982) çözümler ile birlikte gösterilmiştir. $Re=100, 400$ ve 1000 için elde edilen sonuçlar literatürde (Ghia ve diğ., 1982) mevcut olan çözümlerle gayet iyi uyum sağlamakta, büyük Reynolds sayıları için ($Re=3200$ ve 5000) ise bazı sapmalar görülmektedir. Her Reynolds sayısı için elde edilen sonuçların karakteristiği literatürde verilen çözümlerle uyumludur. (Şekil 4.1.11.-4.1.13.) farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400$ ve 1000) için yöntemden (atalet kuvvetleri ihmal edildiği zaman ve komple Navier-Stokes denklemlerinden) elde edilen u^* -hız bileşeni profilleri ve literatürde verilen sonuçlar arasındaki farklılıkları göstermektedir. Atalet kuvvetlerin ihmali durumunda u^* -hız bileşeni profilleri farklı Reynolds sayıları için aynı karakteristiği taşıırken, diğer iki yöntem farklı Reynolds sayılarda değişen fakat birbiriyle uyumlu sonuçlar vermektedir.

(Şekil 4.1.14.) kavite probleminde $z^*=M/2$ noktasında ve x-ekseni doğrultusunda w^* -hız bileşeni profillerini farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400, 1000, 3200$ ve 5000) için göstermektedir. Tüm Reynolds sayıları için elde edilen sonuçlar benzeri bir karakteristiğe sahiptir.

(Şekil 4.1.15) ise $x^*=N/2$ noktasında ve z-ekseni doğrultusunda farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400, 1000, 3200$ ve 5000) için kavite içerisindeki basınç dağılımını göstermektedir.

Girdaplılık transport denklemin çözümü kavite probleminde aynı noktadaki ve doğrultudaki u^* -hız bileşeni profillerini ve kavite içerisindeki akım çizgilerini vermektedir. (Şekil 4.2.3.2.-4.2.3.5.) farklı Reynolds sayıları ($Re=100, 400, 1000$ ve 3200) için yöntemden ve girdap-transport denkleminden türetilen u^* -hız bileşeni profillerini literatürdeki sonuçlarla (Ghia ve diğ., 1982) birlikte göstermektedir. Girdap-transport yönteminden elde edilen sonuçlar $Re=100$ için uyum sağlamış $Re=400$ için kabul edilebilir bir uyum göstermekte ve $Re=1000$ ve 3200 için uyum sağlamamaktadır. Bunun esas nedeni ise girdap-transport denkleminde basınç gradyanlarının yer almamasından kaynaklanmaktadır.

(Şekil 4.2.3.6.– 4.2.3.9.) sırası ile $Re=100, 400, 1000$ ve 3200 sayıları için kavite içerisindeki akım çizgilerini göstermektedir. Reynolds sayısı büyüdükçe türbülanslı akım etkisini göstermekte ve kavite içerisinde oluşan girdaplar küçülme ve yukarıya doğru kaymaktadırlar.

(Şekil 5.1.1.–5.1.48.) $Re=5, 9, 10, 15, 20$ ve 25 sayıları için x-ekseni doğrultusunda dört farklı kesitte ($x^*=N/4, N/2, 3N/4$ ve N) akım yönüne dik u -hız bileşeni profillerini göstermektedir. Her Reynolds sayısı için x-ekseni ve düzlem arasındaki açı $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90° olarak değişmekte ve bunlara bağlı Froude sayıları belirlenip u -hız bileşeni profilleri boyutlu ve boyutsuz olarak hesaplanmaktadır. Sonuçlar grafiksel olarak şekillerde gösterilmiştir. Örneğin, $Re=5$ ve $\alpha=30^\circ$ ve buna bağlı Froude sayısı ($Fr=0.91287$) için u -hız bileşeni profili boyutsuz olarak Şekil 5.1.1. ve boyutlu olarak ise Şekil 5.1.2.'de gösterilmiştir. Benzeri bir şekilde diğer Reynolds sayıları ve açılar (α) için de u -hız bileşeni profilleri şekillerde gösterilmiştir. u -hız bileşeni profilleri Reynolds sayıları ($Re=6, 7$ ve 8) için de hesaplanmış fakat diğer Reynolds sayıları gibi aynı karakteristiği taşıdıklarından dolayı şekillerde gösterilmemişlerdir.

Tüm şekillerde aynı karakteristik gözlenmektedir. Her kesitte u -hız bileşeni levhadan dışarıya doğru, serbest yüzeye doğru, yarı parabolik bir şekilde değişmektedir. Levhanın sınırları boyunca hız sıfır iken serbest yüzeyde maksimuma erişmektedir. En büyük hız bileşeni profiline $x^*=N$ noktasında levhanın sonunda erişilmektedir. u -hız bileşeni profili x-ekseni doğrultusunda $x^*=3N/4$ noktasına kadar hızlı bir şekilde artmakta, daha sonra

ise bu artış levhanın sonuna doğru azalmaktadır. x-ekseni doğrultusundaki u-hız bileşenindeki artış Froude sayısının etkisini göstermektedir. Şekillerden de görüleceği gibi akışkanın hızı sınır tabakasına eriştikten sonra z-ekseni yönünde serbest yüzeye kadar sabit kalmaktadır. Ancak her kesitteki hız profilleri bir sonraki profile göre doğrusal artmakta ve hız bileşeni profilleri $x^*=N$ noktasına yaklaştıkça kesitler arasındaki hız artış gradyanı azalmaktadır. u-hız bileşenindeki x-ekseni doğrultusundaki değişimin esas nedeni eğim açıları ile Froude sayısından kaynaklanmaktadır.

(Şekil 5.2.1.-5.2.8) farklı Reynolds sayıları ($Re=5, 8, 9, 10, 11, 15, 20$ ve 25) ve farklı α açıları ($\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90°) için x-ekseni doğrultusunda hesaplanan film kalınlığını (serbest yüzeyin sınırını) göstermektedir. Film kalınlığı η^* her Reynolds sayısı için dört farklı açıda (α) ve bunlara bağlı Froude sayıları ile hesaplanmış ve karakteristik değişimler şekillerde gösterilmiştir. Şekillerden de görüleceği gibi $Re=5, 8, 9$ ve 10 için film kalınlığı başlangıçta giderek incelmış ve belli bir noktadan sonra artış göstererek tüm açılar için benzer bir karakteristik göstermiştir. Film kalınlığı Reynolds sayıları ($Re=6, 7$ ve 8) için de hesaplanmış fakat $Re=5, 8, 9$ ve 10 için verilen karakteristiğinin aynısını taşıdıklarından dolayı şekillerde verilmemişlerdir. Ancak $Re=11'$ den $20'$ ye kadar film kalınlığında farklı açılarda bir geçiş (Şekil 5.2.5.-5.2.7.) gözlenmektedir. (Şekil 5.2.5.-5.2.6.), $Re=11$ ve 15 ve levha açısı $\alpha=60^\circ$ ve 90° 'da film kalınlığının karakteristiği $Re=5-10$ arasındaki film kalınlığının karakteristiğine uymakta iken $\alpha=30^\circ$ ve 45° için tamamen zıt bir özellik taşıyarak önce film kalınlığı artmış belli bir noktadan sonra düşüş göstermiştir. (Şekil 5.2.7.)'de film kalınlığı $Re=20$ ve $\alpha=90^\circ$ için küçük Reynolds sayılarında verilen karakteristiği taşıırken film kalınlığı $\alpha=30^\circ, 45^\circ$ ve 60° için diğer şekillere mukayesen farklı bir karakteristik göstermektedir. (Şekil 5.2.8.)'de görüldüğü gibi $Re=25$ için geçiş dönemi bitmiş ve film kalınlığı tüm açılar için tamamen $Re=5-10'$ a bağlı film kalınlığının tersine başlangıçta giderek artmış daha sonra giderek düşüş göstermiştir.

(Şekil 5.2.9.-5.2.16.) ortalama Reynolds sayılarındaki ($Re=5, 8, 9, 10, 11, 15, 20$ ve 25) x-ekseni boyunca farklı açılar ($\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90°) ve bunlara bağlı Froude sayıları için serbest yüzey üzerinde değişimi göstermektedir. Reynolds sayısının x-ekseni boyunca serbest yüzey üzerinde dağılımı belirli kesitlerdeki hızlardan ve ilgili film kalınlığından hesaplanmıştır. Tüm Reynolds sayıları ve açılar için benzeri bir karakteristik gözlenmektedir. Genelde, düzlem boyunca akımın hızı arttığı için Reynolds sayıları da büyümektedir.

Şekil 5.2.9.-5.2.12. ortalama Reynolds sayıları için ($Re=5, 8, 9$ ve 10) x-ekseni ile düzlem arasındaki açılara (α) bağlı elde edilen eğrileri göstermektedir, başka bir ifade ile Reynolds sayısının farklı açılar için x-ekseni boyunca dağılımını göstermektedir. Yaklaşık olarak tüm açılar için aynı eğriler elde edilmektedir ve tüm eğriler aynı karakteristiğe sahip olduğu için eğriler bazı açılar için gösterilmiştir. Şekil 5.2.13-5.2.15. geçiş bölgesinde ortalama Reynolds sayılarındaki ($Re=11, 15$ ve 20) değişimi vermektedir. Bu bölgede Reynolds sayıları için film kalınlığı farklı bir karakteristiğe sahip olduğundan $\alpha=30^\circ, 45^\circ$ ve 60° 'a bağlı eğriler diğer Reynolds sayılarına ($Re=5, 8, 9$ ve 10) göre tamamen zıt bir karakteristik sergilemektedir. Şekillerde gösterilen eğrilerin ortalama değeri yaklaşık olarak ilk başta verilen Reynolds sayısını vermektedir. Şekil 5.2.16.'da ortalama Reynolds sayısındaki değişim x-ekseni boyunca tüm açılar için aynı karakteristiği göstermektedir. Tüm şekillerde Reynolds sayısı $x^*=3N/4$ noktasına kadar hızlı bir şekilde artmakta, başka bir ifade ile eğrilerdeki eğim artmaktadır. Bu noktadan itibaren ise eğrilerdeki eğim azaldığından Reynolds sayısındaki büyüme de azalmaktadır. Şekil 5.2.11. akımın serbest düşüşü ($\alpha=90^\circ$) için Reynolds sayısındaki x-ekseni boyunca değişimi de göstermektedir. Bu durumda Reynolds sayısı $x^*=N/4$ noktasından itibaren levha sonuna kadar hızlı bir şekilde artmaktadır. Şekilde verilen eğrinin eğimi levha boyunca yaklaşık olarak bu durum için sabit kalmaktadır. Diğer eğrilerde ise eğim azalarak değişmektedir. Serbest düşüş için diğer Reynolds sayılarında da aynı karakteristik elde edilmiştir. Her ne kadar sayısal hesaplamalarda Reynolds sayıları sabit kabul edilmişse de levha boyunca hıza ve film kalınlığına bağlı olarak değişmekte ve ortalama değerleri ilk başlangıçtaki sabit değerlere yavaşmaktadır.

(Şekil 5.3.2.-5.3.9.)'de eğimli levha üzerine sabit aralıklarla yerleştirilmiş dikdörtgen elemanların farklı Reynolds, Froude sayıları ve $\alpha=60^\circ$ için film kalınlığına olan etkileri gösterilmiştir. (Şekil 5.3.2.-5.3.5.) sırası ile $Re=5$ pürüzsüz levha ve $Re=5, K=2, 3$ ve 4 için x-ekseni boyunca film kalınlıklarını göstermektedir. Dikdörtgen elemanların kalınlığı arttıkça serbest yüzeyde dalgalanmalar görülmektedir. (Şekil 5.3.6-5.3.9.) ise sırası ile $Re=10$ pürüzsüz levha ve $Re=10, K=2, 3$ ve 4 için film kalınlığını x-ekseni doğrultusunda göstermektedir. $Re=10$ için bu özellikler $Re=5$ 'deki gibi benzer karakteristikler göstermekte ancak bu Reynolds sayısı ($Re=10$) için serbest yüzeyde dalgalanma daha belirgin olarak gözlenmektedir. Pürüzlülük etkisini serbest yüzeyde oluşan dalgalanmalarda açıkça göstermektedir.

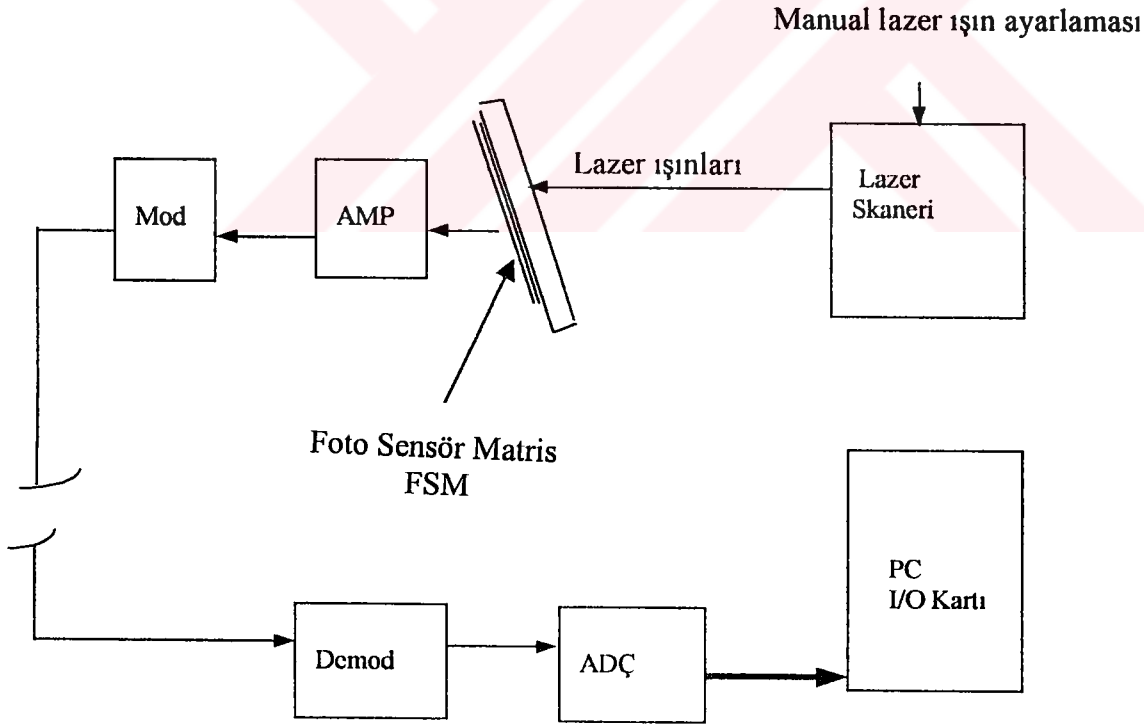
6. EĞİMLİ LEVHA ÜZERİNDE SIVI KAREKTERİNİN DENEYSEL OLARAK BELİRLENMESİ İÇİN DENEY ÖNERİSİ

Eğimli bir düzlem üzerinde akan bir akışkan hareketini ihtiva eden denklemlerin analitik ekzakt çözümleri mümkün değildir. Bundan dolayı bu denklemler sayısal yöntemler sayesinde bilgisayar yardımı ile çözümlenmektedir. Elde edilen bu teorik sonuçların her zaman doğruluk derecesi deneylerden elde edilen sonuçlarla tahkik edilebilmektedir.

Burada sözkonusu akışkan karakterlerinin eğimli bir düzlem üzerinde incelenmesi için bir deney seti önerisi yapılmakta ve çalışma prosedürü verilmektedir. Akışkan karakterinin (hızı, frekansı, dalga uzunluğu, amplitüdü ve film kalınlığı) eğimli düzlem üzerinde ölçme şekli kısaca aşağıda anlatılmıştır.

6.1. Deney Setinin Sistem Blok Şeması

(Şekil 6.1.1.) önerilen ölçü sisteminin basitleştirilmiş şeklini şematik olarak göstermektedir.



Şekil 6.1. 1. Basitleştirilmiş şematik ölçü sistemi

Bu ölçü sistemi aşağıdaki elemanlardan

- lazer tarayıcısı (skaneri)
- cam dikdörtgen levha
- foto sensör matrisi (FSM)
- güçlendirici
- modem
- analog dijital çevirici (ADÇ) ve
- bilgisayardan (PC)

oluşmaktadır.

Eğimli olarak monte edilen dikdörtgen cam levhanın ön yüzeyinden eğim ve yer çekimi kuvveti etkisi ile serbest yüzeyli akışkan akmaktadır. Cam levhanın eğim açısı arzu edilen şekilde ayarlanabilmektedir. Cam levhanın ön kısmına lazer tarayıcısı yerleştirilmekte ve manual olarak kontrol edilebilen bir anahtar ile ayarlanıp arzu edilen noktaya lazer ışınları gönderilebilmektedir. İki boyutlu foto sensör matrisi (FSM) ışığa hassas levha olup cam levhanın arka yüzeyine yerleştirilmektedir. Bu ölçü sistemi optik masada kurulur. Lazer ışını ayarlanan nokta üzerinde akışkan içerisinden karşıya geçerek ışığa hassas olan levha (FSM) üzerine düşmekte ve bunu etkilemektedir. Foto sensör matris üzerine düşen ışınlar levhanın elektiriksel karakterlerini değiştirmekte ve uygun analog sinyalleri üretmektedir.

Eğer film kalınlığı ince ise, o zaman daha kuvvetli bir ışık demeti karşıdan karşıya geçerek intikal etmekte ve foto sensör matris (FSM) üzerine düşmektedir. Eğer film kalınlığı daha fazla olursa, ışık demeti foto sensör matrise ulaşmadan önce incelmektedir. Sonuç olarak film kalınlığı ne kadar fazla ise foto sensör matrise intikal eden ışınlar o kadar az ve incedir. Film kalınlığı ne kadar az ise foto sensör matrise intikal eden ışınlar o kadar çok ve kalındır. Böylece foto sensör matrise intikal eden ışınlar film kalınlığı ile ters orantılıdır.

Buna ilaveten otomatik ışın saçı skan düzenlemesi de mevcuttur ve kullanım anahtarı açık olduğu zaman yalnız düşey yönde de hızlı bir şekilde skan yapmaktadır. Kullanıcı, mod anahtarını yeri geldiği zaman ayarlaması gerekmektedir.

Matematiksel olarak cam dikdörtgen levha arkasında yer alan foto sensör matrise düşen lazer ışığın gücü aşağıdaki formülle hesaplanmaktadır.

$$e = I_0 e^{-\alpha_0 \cdot y} \dots\dots\dots (6.1)$$

I_0 : Cam levha üzerindeki akışkana intikal eden lazer ışınların gücü.

α_0 : Film kalınlığına göre incelen (zayıflayan) lazer ışınların sabit katsayısı, ışın dalgaları akışkan ortamdan geçerken bu incelen sabit değeri kadar yayılmakta ve incelmektedir.

Foto sensör matriste üretilen ve toplanan analog sinyallerin amplitüdü güçlendirici tarafından artırılır, güçlendirilir ve modem tarafından bilgisayara gönderilir.

Modem analog sinyalleri atış sinyal formuna dönüştürür ve bu atışları iki ayrı tele ulaştırır. Bu atışlar teller tarafından alınır ve tekrardan analog sinyaller üretirler. Bu yöntemle modem çevreden gelen sedaya karşı bir hassasiyetlik yaratır ve dıştan gelen sesler sinyaller üzerinde çok az etkili olur.

Modemden gelen sinyaller analog dijital çevirici (ADÇ) tarafından dijital formuna dönüştürülmekte ve bilgisayara okunması ve işlemler için gönderilmektedir.

6.2. Film Kalınlığının Ölçülmesi

Laminer bölgede akışkan yüzeyinde dalgalanma olmadığı için film kalınlığı sabittir. İkinci bölgede, yani sinüsoidal bölgede oluşan sinüs formundaki dalgaların kalınlığı, bilgisayar tarafından sürekli olarak algılanan verilerden ve bu veriler bir bütün devir daim içindeki verilerin kendi aralarında mukayese edilmesinden en uç değer, maksimum değer belirlenmektedir.

Bunun haricinde en yüksek sinüs dalgasının uç noktasını ve frekansını hesaplamak için bazı algoritmalar mevcuttur. Bu algoritmalar elde edilen iki veya üç örnek verilerden ilgili parametreleri belirlemek için uygulanmaktadır.

6.3. Hızın Ölçülmesi

Dalga uzunluğu λ ışın modunun auto-skan moda ayarlanarak düşey yönde hızlı bir şekilde ışın demeti taramasından belirlenmektedir. Elde edilen veriler mukayese edilmekte ve maksimum gücü veren zaman aralığı not edilmektedir. Bu zaman aralığı dalga uzunluğuna bağlıdır. Serbest yüzeyli akımın faz hızı aşağıda verilen bağıntıdan hesaplanmaktadır:

$$u = f \cdot \lambda \dots\dots\dots (6.2.)$$

Böylelikle serbest yüzeyli akımın laminar ve sinüsoidal bölgedeki amplitüdü, frekansı, dalga uzunluğu ve hızı belirlenmektedir.



KAYNAKLAR

- Abbott, M.B., Basco, D.R., 1990, Computational Fluid Dynamics, An Introduction for Engineers, John Wiley & Sons.
- Abdullah, Z., and Salcudean, M., 1990, Free-surface flow during the filling of a cylinder, vol. 11, pp. 151-168.
- Acheson, D.J., 1995, Elementary Fluid Dynamics, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford.
- Amsden, A.A., and Harlow, F.H., 1970, The SMAC Method: A numerical technique for calculating incompressible fluid flows, Los alamos Scientific laboratory Rep. LA-4370.
- Anderson, J.D., 1995, Computational Fluid Dynamics, The Basics With Applications, McGraw-Hill.
- Armenio, V., 1997, An improved MAC method (SIMAC) for unsteady high-Reynolds free surface flows, Int. J for Num. Meth. in Fluids, vol. 24, pp. 185-214.
- Bird, R.B, Steward W.E, Lightfood, E.N., 1960, Transport Phenomena, John Wiley and Sons, New York.
- Batchelor, G.K., 1994, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press.
- Bechert, D.W., and Bartenwerfer, M., 1988, The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs, J. Fluid Mech., vol. 206. pp. 105-129.
- Bergeles, G., and Athanassiadis, N., 1983, The flow past a surface-mounted obstacle, Journal of Fluids Eng., vol. 105, pp. 461-463.
- Bontozoglou, V., Kalliadasis, S., and Karabelas, A.J., 1991, Inviscid free-surface flow over a periodic wall, J.Fluid Mech. vol.226, pp. 189-203.
- Chang, H.-C., 1986, Travelling waves in fluid interfaces: Normal form analysis of the Kuramoto-Sivashinsky equation, Phys. Fluids, vol. 29, pp. 3142-3147.
- Chen, C.J., 1980, Finite element method, Iowa Institute of Hydraulic Research Press, Iowa.
- Chen, L., Garimella, S.V., and Reizes, J.A., Eddi Leonardi, 1997, Motion of interacting gas bubbles in a viscous liquid including wall effects and evaporation, Numerical Heat Transfer, Part A, 31, pp. 629-654.

- Currie, I.G., 1982, *Fundamentals Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill.
- Çamur, H., Balasubramanian, K., Peremeci, Ö.E., 2000, Optical means of determining the surface flow characteristics of open channel flows: a proposed design, IMTC, vol.1, pp. 262-268.
- Daily, J.W., Harleman, D.R.F., 1966, *Fluid Dynamics*, Addison Wesley Publishing Company.
- Demekhin, Ye.A., Demekhin, I.A., and Shkadov, V. Ya., 1983, Solutions in flowing layer of a viscous fluid, *Jzv.Akad.Nauk.SSSR, Mekh.Zhid.i Gasa* 4, pp. 9-16.
- Demekhin, E.A., Tokarev, G. Yu., and Shkadov, V.Ya., 1991, Hierarch of bifurcations of space-periodic structures in a nonlinear model of active dissipative media, *Physica D*, vol. 52, pp. 338-361.
- Douglas, J.F., Gasiorek, J.M., Swaffield, J.A., 1995, *Fluid mechanics*, Third Edition, Longman.
- Engelman, M.S., Sani, R.I., Gresho, P.M., and Bercovier, M., 1982, Consistent vs. reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements, *Int.J.Numer. Meth. Fluids*, vol. 2, pp. 25-42.
- Evvett, J.B., Liu, C., 1987, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.
- Fox, R.W., McDonald, A.T., 1992, *Introduction to Fluid Mechanics*, Fourth Edition, John Wiley and Sons.
- Ghia, U., Ghia K. N., and Shin, C.T., 1982, High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.* vol. 48, pp 387-411
- Golafshani, M., 1988, A simple numerical technique for transient creep flows with free surfaces, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, vol. 8, pp. 897-912.
- Gresho, P. M. , and Sani, R. L. , 1987, On the pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 7, pp.1111-1145.
- Harlow, F.H., Welch, J.E., 1965, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of fluids*, vol.8, No:12, pp.2182-2189.
- Hirt, C.W., and Cook, J.L., 1972, Calculating of three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *J. Comput. Phys.*, vol. 10, pp. 324-340.

- Ho, L.-W., and Patera, A.T., 1990, A Legendre spectral element method for simulation of unsteady incompressible viscous free-surface flow, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol.180, pp. 355-366.
- Gerhart, P.M., Gross, R.J., Hochstein, J.I., 1992, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Second edition, Adison- Wesley Publishing Company.
- Hoffman, J.D., 1993, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill.
- Johnson, D.B., Raad, P.E., and Chen, S., 1994, Simulation of impacts of fluid free surfaces with solid boundaries, *Int. J for Num. Meth. in Fluids*, vol. 19, pp. 153-176.
- Kays, W.M., Crawford, M.E., 1996, *Convektive Heat and Mass Transfer*, Third Edition, McGraw-Hill,
- Kheshgi, H.S., and Scriven, L.E., 1985, Variable penalty method for finite element analysis of incompressible flow, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 5, pp. 785-803.
- Lemos, C.M., 1992, A simple numerical technique for turbulent flows with free surfaces, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, vol. 15, pp. 127-146.
- Liggett, J.A., 1994, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.
- Lin, S.P., 1983, In film waves on fluid interfaces (ed.R.E.Meyer), pp. 417-429.
- Mashayek, F., and Ashgriz, N., 1995, A hybrid finite-element-volume-of fluid method for simulating free surface flows and interfaces, *Int. Journ. of Num. Meth. in Fluid*, vol.20, pp.1363-1380.
- McKibben, J.F., and Aidun, C.K., 1995, Extension of the volume-of-fluid method for Analysis of free surface viscous flow in an Ideal gas, *Int. Journ. of Num. Meth. in Fluids*, vol. 21, pp. 1153-1170.
- Medina, D. E. , Liggett, J. A. , Birchwood, R. A. , and Torrance, K. E. , 1991, A consistent boundary element method for free surface hydrodynamic calculations, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, vol.12, pp. 835-857.
- Miles, J.W., 1986, Weakly nonlinear Kelvin-Helmholz waves, *J. Fluid Mech.*, vol.172, pp.513-529.
- Munson B.R., et. al., 1994, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Second Edition, John Wiley & Sons.
- Nakamura, S., 1977, *Computational methods in engineering and sciences with applications to fluid dynamics and nuclear systems*, John Wiley and Sons, New

York.

- Nakoryakov, V.E., Pokusaev, B.G., and Alekseenko, S.V., 1981, Desorption of weakly-solution gas from flowing liquid films, In calculation of Heat and Mass Transfer in Energy-Chemical Processes (ed. A.P. Burdukov) pp. 23-36. Institut of Thermophysics, Novosibirsk.
- Nakoryakov, V.E., Pokusaev, B.G., and Radev, K.B., 1985, Influence of waves on convective gas diffusion, in hydrodynamics and heat and mass transfer of free-surface flows, pp. 5-32. Institute of Heat Physics, Siberian Branch of the USSR Academy of Science, Novosibirsk, (in Russian).
- Nichols, B.D., Hirt, C.W., and Hotchkiss, R.S., 1980, SOLA-VOF a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries, Los Alamos scientific laboratory report LA-8355.
- Nusselt, W., 1916, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes, Teil I, II.Z.VDI.27, pp.541; vol. 28, pp. 569.
- Panton, R.L., 1984, Incompressible Flow, John Wiley and Sons.
- Patankar, S.V., 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- Patel, V.C., and Yoon, J.Y., Application of turbulence models to separated flow over rough surfaces, 1995, J. of Fluids Eng., vol. 117, pp.234-241.
- Pericleous, K.A., Chan, K.S., and Cross, M., 1995, Free surface flow and heat transfer in cavities: The SEA Algorithm, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 27, pp. 487-507.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., 1997, Mechanics of Fluids, Second Edition, Prentice Hall.
- Pugh, J.D., and Saffman, P.G., 1988, Two-dimensional superharmonic stability of finite-amplitude waves in plane poiseuille flow, J. Fluid Mech., vol. 194, pp. 295- 307.
- Raad, P.E., Chen, S., and Johnson, D.B., 1995, The introduction of micro cells to treat pressure in free surface fluid flow problems, Journal of Fluids Engineering, vol. 117, pp.683-690.
- Rahman, M.M., Miettinen, A. and T. Siikonen, 1996, Modified SIMPLE formulation on a collocated grid with an assessment of the simplified QUICK scheme,

- Numerical Heat Transfer, B, 30, pp.291-314.
- Raithby, G.D., Xu, W.X., Stubley, G.D., 1995, Prediction of incompressible free surface flows with an element-based finite volume method, Computational Fluid Mechanics Journal, vol. 4, No.3, pp.353-371.
- Sammarco, P., Mei, C.C., and Trulsen, K., 1994, Nonlinear resonance of free surface waves in a current over a sinusoidal bottom: a numerical study, J.Fluid Mech., vol.229, pp. 377-405.
- Sasmal, G.P., and Hochstein, J.I., 1994, Marangoni convection with a curved and deforming free surface in a cavity, Journal of Fluids Engineering, vol. 116, pp. 577-582.
- Schlichting, H., 1968, Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill.
- Shames, I.H., 1992, Mechanics of Fluids, Third Edition, McGraw-Hill.
- Sheridan, J., Lin, J.C., Rockwell, D., 1996, Flow past cylinder close to free surface, J. Fluid Mech., vol. 330, pp. 1-30.
- Sherman, F.S., 1990, Viscous Flow, McGraw-Hill.
- Shkadov, V.Ya., 1968, On the theory of wave flows of a thin layer of a viscous fluid, Izv.Akad.Nauk.SSSR, Mekh.Zhid.i Gasa 3, pp. 20-25.
- Shkadov, V.Ya., 1973, Some Methods and problems of the theory of hydrodynamic stability, Moscow: izd. MGU (in Russian).
- Shyy, W., et.al., 1996, Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries, Taylor and Francis.
- Stukel, J.J., Hopke, H.J., and Nourmohammadi, K., Turbulent air flow over rough surfaces: Mean Flow Parameters, Journal of Fluids Eng., Dec.1984, vol.106, pp. 405-409.
- Taylor, C., and Cedric, H.T.G., 1981, Finite element programming of the Navier-Stokes equations, Pineridge Press.
- Tong, A.Y., and Holt, B.R., 1997, Numerical Study on the solidification of liquid metal droplets impacting onto a substrate, Numerical Heat Transfer, Part A, 31, pp. 797-817.
- Tsay, Y.L., and Lin, T.F., 1990, Combined heat and mass transfer in laminar gas stream flowing over an evaporating liquid film, Waerme- und Stoffuebertragung, vol. 25, pp. 221-231.

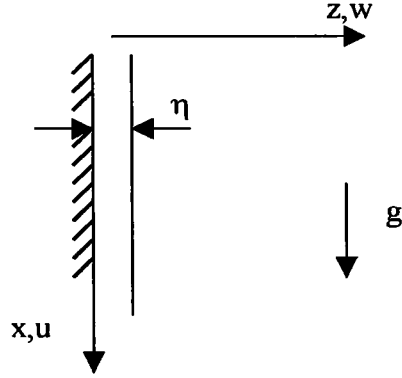
- Versteeg, H.K., Malalasekera, W., 1996, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Addison Wesley Longman.
- Viecelli, J.A., 1969, A method for including arbitrary external boundaries in the MAC incompressible fluid computing technique, J. Comput. Phys., vol. 4, pp. 543-551. .
- Wang, S.P. and Wang, K.K., 1994, A net inflow method for incompressible viscous flow with moving free surface, Int. J. for Num. Meth. in Fluids, vol. 18, pp. 669-694.
- Warsi, Z.U.A., 1992, Fluid Dynamics: Theoretical and Computational Approaches, CRC Press.
- Wendt, J.F., 1996, Computational Fluid Dynamics, Springer.
- White, F.M., 1991, Viscous Fluid Flow, Second Edition, McGraw-Hill.
- White, F.M., 1994, Fluid Mechanics, Third Edition, McGraw-Hill.



EKLER

Ek 1: Pürüzsüz, Düşey Bir Levha Üzerinde Serbest Yüzeyle Akımın Hız Profiline Analitik Olarak Hesaplanması.

Bu bölümde süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerini kullanarak düşey bir levha ($\alpha=90^\circ$) üzerinde serbest yüzeyle bir akışkanın hız profiline hesaplanması gösterilmiştir. (Şekil E1.1) düşey, pürüzsüz bir levhayı, koordinat sistemini ve akışkanı göstermektedir.



Şekil E1.1 Düşey , pürüzsüz levha üzerinde serbest yüzeyle akım

İki boyutlu zamana bağlı, laminar sıkışmaz serbest yüzeyle akımın hareketi süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri ile aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

Süreklilik:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(E1.1)$$

Hareket denklemleri:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g \cdot \sin \alpha \dots\dots\dots(E1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \cdot \cos \alpha \dots\dots\dots(E1.3)$$

Bu denklemlerin analitik olarak çözümlenmesi için aşağıda belirtilen varsayımların yapılması gerekmektedir:

- Akımın hareketini yalnız pozitif x-yönüne ve her noktada x-eksenine paralel olduğunu varsayılırsa, akımın z-yönündeki hız bileşeni (w) sıfır olarak kabul edilebilir.
- Diğer şart ise x-yönündeki basınç sabit olarak kabul edilirse, $\partial P / \partial x$ sıfır olmaktadır. Yapılan varsayımları kullanarak daimi ve sıkışamaz bir akım için süreklilik (E1.1) ve Navier-Stokes denklemleri (E1.2 ve E1.3) aşağıdaki gibi sadeleşebilirler:

Süreklilik:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (w = 0) \dots\dots\dots (E1.4)$$

Bu terimin ikinci mertebeden türevi Navier-Stokes denklemlerinde yer aldığı için bunu da elde etmek gerekmektedir. Bu ise aşağıda elde edilmiştir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (E1.5)$$

Yukarıdaki özelliklerden faydalanarak momentum denklemi yalnız x-yönünde (E1.2) ifade edilebilir, çünkü z-yönündeki bileşeni (E1.3) tamamen sıfır olmaktadır.

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -g \dots\dots\dots (E1.6)$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{g}{\nu} \dots\dots\dots (E1.7)$$

(E1.7) denklemini ikinci mertebeden lineer bir kısmi türev denklemdir. Bu denklemin iki kez z 'ye göre integralini alınırsa, hız bileşeni u bulunmaktadır.

$$u(z) = -\frac{g}{2\nu} z^2 + C_1 z + C_2 \dots\dots\dots (E1.8)$$

(E1.8) denkleminde yer alan integral sabit sayılarını bulabilmek için, iki sınır şartı ifade etmek gerekmektedir:

- $z=0$ 'da $u=0$
- $z=\eta$ 'da $\partial u/\partial z=0$

Birinci sınır şartı, levha üzerindeki sıvı taneciğinin hızı o noktadaki levhanın hızına eşit olması şartından kaynaklanmaktadır. Düşey levha sabit olduğu için, x eksenı boyunca sıvı taneciğinin hızları sıfır olmaktadır. İkinci sınır şartı ise serbest yüzey üzerindeki ($z=\eta$) herhangi bir noktada sıvı akımı ile havanın kayma gerilmesinin eşit olmasını gerektirmektedir. Başka bir değişle $\mu_{\text{sıvı}} \cdot (\partial u/\partial z)_{\text{sıvı}} = \mu_{\text{hava}} \cdot (\partial u/\partial z)_{\text{hava}}$ şartının sağlanması gerekmektedir. Havanın dinamik viskozitesi (μ_{hava}) çok küçük olduğundan dolayı eşitliğin sağ tarafı sıfır olarak kabul edilebilir. Böylelikle bu şart $\mu_{\text{sıvı}} \cdot (\partial u/\partial z)_{\text{sıvı}} = 0$ şeklini almaktadır.

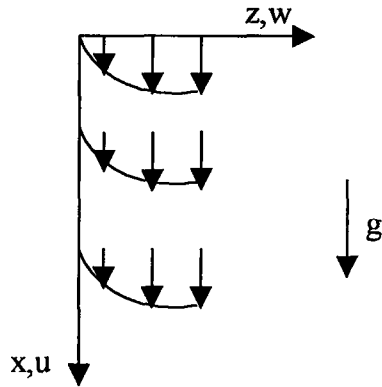
İncelenen sıvı akımının viskozitesi sıfır olamayacağından ve de sıfır olarak kabul edilemeyeceğinden dolayı, yukarıdaki terimin, $(\partial u/\partial z)_{\text{sıvı}} = 0$ olması gerekmektedir.

Bu iki sınır şartlarını (E1.8) denkleminde uygun bir şekilde yerlerine koyduktan sonra C_1 ve C_2 'nin değerleri bulunmaktadır. Böylelikle hız profilinin son şekli aşağıda ifade edildiğı gibidir.

$$u(z) = \frac{g\eta^2}{\nu} \left[\left(\frac{z}{\eta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\eta} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (E1.9)$$

(E1.9) denkleminde de görüldüğü gibi sıvının levha üzerinde sabit bir film kalınlığı (η) için hız profili yarı paraboliktir.

(Şekil E1.2), (E1.9) denkleminden çıkan sonuçları göstermektedir.



Şekil E1.2 Düşey, pürüzsüz levha üzerinde serbest yüzeyli akımın hız profili

Ek.2: Karma Farklar Yöntemi

	Bir boyutlu akım	İki boyutlu akım	Üç boyutlu akım
a_w	$\max[F_w, (D_w + F_w / 2), 0]$	$\max[F_w, (D_w + F_w / 2), 0]$	$\max[F_w, (D_w + F_w / 2), 0]$
a_e	$\max[-F_e, (D_e + F_e / 2), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - F_e / 2), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - F_e / 2), 0]$
a_s	-	$\max[F_s, (D_s + F_s / 2), 0]$	$\max[F_s, (D_s + F_s / 2), 0]$
a_n	-	$\max[-F_n, (D_n - F_n / 2), 0]$	$\max[-F_n, (D_n - F_n / 2), 0]$
a_b	-	-	$\max[F_b, (D_b + F_b / 2), 0]$
a_t	-	-	$\max[-F_t, (D_t - F_t / 2), 0]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Yüz	W	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$(\mu_w / \delta x_{WP}) \cdot A_w$	$(\mu_e / \delta x_{PE}) A_e$	$(\mu_s / \delta y_{SP}) \cdot A_s$	$(\mu_n / \delta y_{PN}) \cdot A_n$	$(\mu_b / \delta z_{BP}) \cdot A_b$	$(\mu_t / \delta z_{PT}) \cdot A_t$

	1B	2B	3B
ΔV	Δx	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x \Delta y \Delta z$
$A_w = A_e$	1	Δy	$\Delta y \Delta z$
$A_n = A_s$	-	Δx	$\Delta x \Delta z$
$A_b = A_t$	-	-	$\Delta x \Delta y$

Ek. 3: Üs-Kuralı Farklar Yöntemi

	Bir boyutlu akım	İki boyutlu akım	Üç boyutlu akım
a_w	$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$	$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$	$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$
a_e	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$
a_s	-	$D_s \max[0, (1 - 0.1 Pe_s)^5] + \max[-F_s, 0]$	$D_s \max[0, (1 - 0.1 Pe_s)^5] + \max[F_s, 0]$
a_n	-	$D_n \max[0, (1 - 0.1 Pe_n)^5] + \max[-F_n, 0]$	$D_n \max[0, (1 - 0.1 Pe_n)^5] + \max[-F_n, 0]$
a_b	-	-	$D_b \max[0, (1 - 0.1 Pe_b)^5] + \max[F_b, 0]$
a_t	-	-	$D_t \max[0, (1 - 0.1 Pe_t)^5] + \max[-F_t, 0]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Yüz	w	E	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$(\mu_w / \delta x_{wp}).$ A_w	$(\mu_e / \delta x_{pe}).$ A_e	$(\mu_s / \delta y_{sp}).$ A_s	$(\mu_n / \delta y_{pn}).$ A_n	$(\mu_b / \delta z_{bp}).$ A_b	$(\mu_t / \delta z_{pt}).$ A_t

	1B	2B	3B
ΔV	Δx	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x \Delta y \Delta z$
$A_w = A_e$	1	Δy	$\Delta y \Delta z$
$A_n = A_s$	-	Δx	$\Delta x \Delta z$
$A_b = A_t$	-	-	$\Delta x \Delta y$

Ek.4. Üç-Köşegenel Matriks yöntemi (Çoleski yöntemi)

Üç-köşegenel matris yöntemi ayrıklaştırılmış hız bileşenleri ve basınç düzeltimi denklemlerinden elde edilen lineer cebirsel denklemler sistemini çözmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu cebirsel denklemler bazı düzenlemeler sayesinde üç-köşegenel denklemler sistemi şeklinde ifade edilebilmektedirler. Üç-köşegenel matris sisteminde her denklem sıfırdan farklı katsayılarından oluşmakta ve genel olarak aşağıdaki formda verilmektedir:.....

$$d_1\phi_1 + \alpha_1\phi_2 = c_1 \dots\dots\dots (E4.1)$$

$$\beta_2\phi_1 + d_2\phi_2 + \alpha_2\phi_3 = c_2 \dots\dots\dots (E4.2)$$

$$\beta_3\phi_2 + d_3\phi_3 + \alpha_3\phi_4 = c_3 \dots\dots\dots (E4.3)$$

$$\dots\dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots$$

$$\beta_{M-1}\phi_{M-2} + d_{M-1}\phi_{M-1} + \alpha_{M-1}\phi_M = c_{M-1} \dots\dots\dots (E4.4)$$

$$\beta_M\phi_{M-1} + d_M\phi_M = c_M \dots\dots\dots (E4.5)$$

ϕ_i bilinmeyenleri, α_i üst diyagonal, β_i alt diyagonal, d_i ise ana diyagonaldeki katsayıları ve c_i eşitliğin sağ tarafındaki sabit sayıları ifade etmektedirler.

Üç-köşegenel lineer cebirsel denklemler sistemini çözmek için Gauss eliminasyon yöntemi kullanılmakta ve çözüm iki kısımdan oluşmaktadır:

- İleri eliminasyon ve
- Geri eliminasyon

Üç-köşegenel matris yöntemi büyük denklemler sistemini iterasyon yolu ile çözümünde yakınsak çözüme diğer direkt ve iteratif yöntemlerden daha hızlı sonuçlar verdiği ve bilgisayar hafızasında daha az yer tuttuğu için akışkanlar mekaniğinde bu yöntem de kullanılmaktadır.

İleri eliminasyonda, alt diyagonaldeki katsayılar (β_i) Gauss eliminasyon metodunun öngördüğü bazı matematiksel operasyonlar sayesinde elimine edilerek, denklemler sistemi üst iki diyagonal formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$d_1\phi_1 + \alpha_1\phi_2 = c_1 \dots \dots \dots (E4.6)$$

$$d'_2\phi_2 + \alpha_2\phi_3 = c'_2 \dots \dots \dots (E4.7)$$

$$d'_3\phi_3 + \alpha_3\phi_4 = c'_3 \dots \dots \dots (E4.8)$$

$$\dots \dots \dots d'_{M-1}\phi_{M-1} + \alpha_{M-1}\phi_M = c'_{M-1} \dots \dots \dots (E4.9)$$

$$d'_M\phi_M = c'_M \dots \dots \dots (E4.10)$$

Böylelikle ana diyagonal ve eşitliğin sağ tarafındaki sabit sayılar yapılan bu işlemler sonucunda değişerek aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$d'_i = d_i - \frac{b_i\alpha_{i-1}}{d'_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, M \quad \dots \dots \dots (E4.11)$$

Yukarıdaki denklemler sisteminde görüldüğü gibi (E4.10) son denklem yalnız bir bilinmeyen ϕ_M içermekte ve aşağıda tanımlanan denklemden hesaplanabilmektedir:

$$c'_i = c_i - \frac{c_{i-1}\beta_i}{d'_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, M \quad \dots \dots \dots (E4.12)$$

$$\phi_M = \frac{c'_M}{d'_M} \dots \dots \dots (E4.13)$$

Diğer bilinmeyenler ise geri eliminasyon yöntemiyle hesaplanmaktadır.

ϕ_M bir önceki denklemde yerine konursa ϕ_{M-1} aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$\phi_{M-1} = \frac{c'_{M-1} - \alpha_{M-1}\phi_M}{d'_{M-1}} \dots \dots \dots (E4.14)$$

ve benzeri bir şekilde geriye kalan tüm bilinmeyenler bu yöntemle hesaplanmaktadır.

Tüm bilinmeyenleri (ϕ_i) geri eliminasyon yöntemi ile hesaplamak için genel rekürsiyon formülü aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\phi_i = \frac{c'_i - \alpha_i\phi_{i+1}}{d'_i} \quad i = M-1, \dots, 1 \quad \dots \dots \dots (E4.15)$$

Ek.5: Elde edilen çözümlerin listesi

Re	α [°]	η_o [m]	u_o [m/s]	Fr
5	30	1.46116E-04	3.45615E-02	0.91287
	45	1.30174E-04	3.87939E-02	1.08559
	60	1.21668E-04	4.15062E-02	1.20140
	90	1.15972E-04	4.35447E-02	1.29099
6	30	1.55271E-04	3.90283E-02	0.99999
	45	1.38331E-04	4.38078E-02	1.18920
	60	1.29292E-04	4.68706E-02	1.31607
	90	1.23239E-04	4.91726E-02	1.41421
7	30	1.63458E-04	4.32525E-02	1.08012
	45	1.45625E-04	4.85493E-02	1.28449
	60	1.36109E-04	5.19435E-02	1.42152
	90	1.29737E-04	5.44947E-02	1.52752
8	30	1.70898E-04	4.72794E-02	1.15470
	45	1.52253E-04	5.30694E-02	1.37317
	60	5.67796E-04	1.42304E-02	1.51967
	90	1.35642E-04	5.95684E-02	1.63299
9	30	1.77741E-04	5.11416E-02	1.22474
	45	1.58349E-04	5.74045E-02	1.45647
	60	1.48002E-04	6.14178E-02	1.61185
	90	1.41073E-04	6.44344E-02	1.73205
10	30	1.84094E-04	5.48629E-02	1.29099
	45	1.64009E-04	6.15816E-02	1.53525
	60	1.53292E-04	6.58870E-02	1.69904
	90	1.46116E-04	6.91230E-02	1.82574
11	30	1.90037E-04	5.84621E-02	1.35400
	45	1.69304E-04	6.56215E-02	1.61019
	60	1.58241E-04	7.02093E-02	1.78197
	90	1.50832E-04	7.36576E-02	1.91485
15	30	2.10735E-04	7.18908E-02	1.58113
	45	1.87744E-04	8.06947E-02	1.88030
	60	1.75476E-04	8.63363E-02	2.08089
	90	1.67261E-04	9.05768E-02	2.23606

20	30	2.31944E-04	8.70895E-02	1.82574
	45	2.06639E-04	9.77547E-02	2.17118
	60	1.93136E-04	1.04458E-01	2.40281
	90	1.84094E-04	1.09726E-01	2.58198
25	30	2.49855E-04	1.01058E-01	2.04124
	45	2.22595E-04	1.1343E-01	2.42745
	60	2.08050E-04	1.21364E-01	2.68642
	90	1.98310E-04	1.27325E-01	2.88675



Ek-6: Programlar

```

C  PROGRAMLAR
C  KAVITE PROBLEMI PROGRAMI
C  TUM PROGRAMLARDA Y=Z VE V=W
  DIMENSION X(200),Y(200),US(600000)
  DIMENSION U(200,200),V(200,200)
  DIMENSION P(200,200),APV(200,200),APP(200,200)
  DIMENSION APU(200,200),PP(200,200),B(200,200)
  DIMENSION BP(200,200),C(200,200),D(200,200)
  DIMENSION CP(200,200),ALFA(200,200),BETA(200,200)
  DIMENSION AX(200,200),DE(200,200),DW(200,200)
  DIMENSION DS(200,200),APPE(200,200),APPW(200,200)
  DIMENSION APPN(200,200),APPS(200,200),DN(200,200)

  OPEN(1,FILE='UC2.DAT')
  OPEN(2,FILE='VC2.DAT')
  OPEN(3,FILE='PC2.DAT')
  N=100
  M=100
  RE=100.
  ITER=600000
  ALFU=0.5
  ALFV=0.5
  ALFP=0.5
  GA=1./RE
  DELT=0.001
  EPSI=1.E-07
  DELX = 2.0/(N-1)
  DELY = 1.0/(M-1)
  X(1)=0.0
  Y(1)=0.0

  DO I=2,N
    X(I)=X(I-1)+DELX
  END DO
  DO J=2,M
    Y(J)=Y(J-1)+DELY
  END DO
  RO=1.
51  CONTINUE
    DO 53 I = 1,N
      DO 53 J = 1,M
        P(I,J)=0.0
        B(I,J)=0.0
53  CONTINUE
    DO I=2,N-1
      DO J=2,M-1

```

```

U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO
DO 2000 IT=1,1
US(1)=0.0
DO 1000 LL=1,ITER
C   HIZ SINIR ŞARTLARI
DO J=2,M
U(2,J)=0.0
U(N,J)=0.0
V(1,J)=0.0
V(N,J)=0.0
END DO
DO I=2,N
U(I,1)=0.0
U(I,M)=1.0
V(I,2)=0.0
V(I,M)=0.0
END DO
C--- U-KONTROL HACMI
DO 25 I=3,N-1
DO 25 J=2,M-1
FW1=(RO*U(I,J)/2.0+RO*U(I-1,J)/2.0)*DELY
FE1=(RO*U(I+1,J)/2.0+RO*U(I,J)/2.0)*DELY
FS1=(RO*V(I,J)/2.0+RO*V(I-1,J)/2.0)*DELX
FN1=(RO*V(I,J+1)/2.0+RO*V(I-1,J+1)/2.0)*DELX
DW1=GA*DELY/(X(I)-X(I-1))
DE1=GA*DELY/(X(I+1)-X(I))
DS1=GA*DELX/(Y(J)-Y(J-1))
DN1=GA*DELX/(Y(J+1)-Y(J))
AW1=AMAX1(0.0, FW1,DW1+FW1/2.)
AE1=AMAX1(0.0, -FE1,DE1-FE1/2.)
AN1=AMAX1(0.0, -FN1,DN1-FN1/2.)
AS1=AMAX1(0.0, FS1,DS1+FS1/2.)
DELF=FE1-FW1 +FN1-FS1
APO=RO*DELX*DELY/DELT
APU(I,J)=AW1+AE1+AS1+AN1+APO+DELF
BETA(I,J)=-AS1
ALFA(I,J)=-AN1
D(I,J)=APU(I,J)/ALFU
C(I,J)=AW1*U(I-1,J)+AE1*U(I+1,J)+B(I,J)+
1   DELY*(P(I-1,J)-P(I,J))+APO*U(I,J)+
1   (1-ALFU)*APU(I,J)*U(I,J)/ALFU
AX(I,1)=1.
CALL TDMA_FORW (BETA,D,ALFA,C,AX,CP,I,J)
25  CONTINUE
CALL TDMA_BACK (U,AX,ALFA,CP,N,M,3,2)

```

C--- V-KONTROL HACMI

```

DO 45 I=2,N-1
DO 45 J=3,M-1
FW1=(RO*U(I,J)/2.0+RO*U(I,J-1)/2.0)*DELX
FE1=(RO*U(I+1,J)/2.0+RO*U(I+1,J-1)/2.0)*DELX
FS1=(RO*V(I,J-1)/2.0+RO*V(I,J)/2.0)*DELY
FN1=(RO*V(I,J)/2.0+RO*V(I,J+1)/2.0)*DELY
DW1=GA*DELY/(X(I)-X(I-1))
DE1=GA*DELY/(X(I+1)-X(I))
DS1=GA*DELX/(Y(J)-Y(J-1))
DN1=GA*DELX/(Y(J+1)-Y(J))
AW1=AMAX1(0.0, FW1,DW1+FW1/2.)
AE1=AMAX1(0.0, -FE1,DE1-FE1/2.)
AN1=AMAX1(0.0, -FN1,DN1-FN1/2.)
AS1=AMAX1(0.0, FS1,DS1+FS1/2.)
DELF=FE1-FW1 +FN1-FS1
APO=RO*DELX*DELY/DELT
APV(I,J)=AW1+AE1+AS1+AN1+APO+DELF
BETA(I,J)=-AS1
ALFA(I,J)=-AN1
D(I,J)=APV(I,J)/ALFV
C(I,J)=AW1*V(I-1,J)+AE1*V(I+1,J)+B(I,J)+
1 DELX*(P(I,J-1)-P(I,J))+APO*V(I,J)+
1 (1-ALFV)*APV(I,J)*V(I,J)/ALFV
AX(I,2)=1.
CALL TDMA_FORW (BETA,D,ALFA,C,AX,CP,I,J)
45 CONTINUE
CALL TDMA_BACK (V,AX,ALFA,CP,N,M,2,3)
DO I=2,N-1
DO J=2,M-1
PP(I,J)=0.0
END DO
END DO
C BASINÇ SINIR ŞARTLARI
DO I=3,N-1
DO J=2,M-1
IF(I.EQ.N-1)THEN
DE(I,J)=0.0
ELSE
DE(I,J)=DELY/APU(I+1,J)
END IF
IF (I.EQ.2)THEN
DW(I,J)=0.0
ELSE
DW(I,J)=DELY/APU(I,J)
END IF
END DO
END DO

```

```

DO I=2,N-1
DO J=3,M-1
IF(J.EQ.2)THEN
DS(I,J)=0.0
ELSE
DS(I,J)=DELX/APV(I,J)
END IF
IF (J.EQ.M-1)THEN
DN(I,J)=0.0
ELSE
DN(I,J)=DELX/APV(I,J+1)
END IF
END DO
END DO
DO KK=1,10
DO 201 I=2,N-1
DO 201 J=2,M-1
APPE(I,J)=RO*DE(I+1,J)*DELY
APPW(I,J)=RO*DW(I,J)*DELY
APPS(I,J)=RO*DS(I,J)*DELX
APPN(I,J)=RO*DN(I,J+1)*DELX
APP(I,J)=APPE(I,J)+APPW(I,J)+APPN(I,J)+APPS(I,J)
BETA(I,J)=-APPS(I,J)
ALFA(I,J)=-APPN(I,J)
D(I,J)=APP(I,J)
BP(I,J)=RO*U(I,J)*DELY-RO*U(I+1,J)*DELY+RO*V(I,J)*DELX-
2 RO*V(I,J+1)*DELX
C(I,J)=APPW(I,J)*PP(I-1,J)+APPE(I,J)*PP(I+1,J)+BP(I,J)
AX(I,1)=1.
ALFA(I,1)=1.0
CALL TDMA_FORW (BETA,D,ALFA,C,AX,CP,I,J)
201 CONTINUE
CALL TDMA_BACK (PP,AX,ALFA,CP,N,M,2,2)
END DO
DO 131 I=2,N-1
DO 131 J=2,M-1
P(I,J)=P(I,J)+ALFP*PP(I,J)
131 CONTINUE
DO 135 I=3,N-1
DO 135 J=2,M-1
U(I,J)=U(I,J)+(DELY/APU(I,J))*(PP(I-1,J)-PP(I,J))
135 CONTINUE
DO 136 I=2,N-1
DO 136 J=3,M-1
V(I,J)=V(I,J)+(DELX/APV(I,J))*(PP(I,J-1)-PP(I,J))
136 CONTINUE
WRITE(*,*) U(N/2,M/2),IT,LL
LLA=LL+1

```

```

US(LLA)=U(N/2,M/2)
IF(LL.LT.100) GO TO 1000
IF(ABS((US(LLA)-US(LLA-1))/US(LLA)).LE.EPSI) GO TO 1001
1000 CONTINUE
1001 DO J=1,M
WRITE(1,*) U(N/2,J), Y(J)
END DO
DO I=1,N
WRITE(2,*) X(I),V(I,M/2)
END DO
DO J=1,M
WRITE(3,*) P(N/2,J), Y(J)
END DO
2000 CONTINUE
STOP
END

```

```

SUBROUTINE TDMA_FORW (BETA,D,ALFA,C,AX,CP,I,J)
DIMENSION AX(200,200),ALFA(200,200),BETA(200,200)
1 ,C(200,200),CP(200,200),D(200,200)
AX(I,J)=D(I,J)-(BETA(I,J)*ALFA(I,J-1))/AX(I,J-1)
CP(I,J)=C(I,J)-(CP(I,J-1)*BETA(I,J))/AX(I,J-1)
RETURN
END

```

C--- BACK SUBSTITUTION

```

SUBROUTINE TDMA_BACK (XX,AX,ALFA,CP,N,M,II,JJ)
DIMENSION AX(200,200),XX(200,200),CP(200,200)
1 ,ALFA(200,200)
DO I=II,N-1
DO J=M-1,JJ,-1
XX(I,J)=(CP(I,J)-ALFA(I,J)*XX(I,J+1))/AX(I,J)
END DO
END DO
RETURN
END

```

C

C SERBEST YÜZEYLI AKIM PROBLEMI PROGRAMLARI

```

DIMENSION X(200),Y(200)
DIMENSION U(200,200),V(200,200)
DIMENSION P(200,200),APV(200,200),APP(200,200)
DIMENSION APU(200,200),PP(200,200),B(200,200)
DIMENSION BP(200,200)
DIMENSION DE(200,200),DW(200,200),DN(200,200)
DIMENSION DS(200,200),APPE(200,200),APPW(200,200),APPS(200,200)
DIMENSION APPN(200,200),ETAP(500000),RE1(200),DELTA(200)
DIMENSION UF1(200,200),UF2(200,200),UF3(200,200),UF4(200,200)
DIMENSION ETA(200),DETA(200)
CHARACTER CELL(200,200)

```

```

REAL FR,UO
INTEGER ETA1(200)
OPEN(1,FILE='D1.DAT')
OPEN(2,FILE='D2.DAT')
OPEN(3,FILE='D3.DAT')
OPEN(4,FILE='D4.DAT')
OPEN(5,FILE='D5.DAT')
RE=9.
ALFF=30.
XNU =1.01E-06
RHO=1000.
SIGMA=7.36E-02
G=9.81
PI=3.141592654
HO=((3.*RE*XNU*XNU)/(G*SIN(ALFF*PI/180.)))*(1./3.)
U1=(G*HO*HO*SIN(ALFF*PI/180.))/(3.*XNU)
FR=U1/SQRT(G*HO)
N=120
M=40
DELT=.0001
DELT1=0.0
UO=0.0
ITER=500000
ALFU=0.5
ALFV=0.5
ALFP=0.5
NT=2
GA=1./RE
DELX = 1.0/(N-1)
DELY = 1.0/(M-1)
X(1)=0.0
Y(1)=0.0

```

```

DO I=2,N
X(I)=X(I-1)+DELX
END DO

```

```

DO J=2,M
Y(J)=Y(J-1)+DELY
END DO

```

```

RO=1.
DO 53 I = 1,N
DO 53 J = 1,M
P(I,J)=0.0
B(I,J)=0.0

```

```

53  CONTINUE

```

```

DO I=2,N-1

```

```

DO J=2,M-1
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

C BAŞLANGIÇ FILM KALINLIĞI

```

DO I=1,N
ETA(I)=0.2
END DO

```

```

DO I=1,N
ETA1(I)=M
END DO

```

C HÜCRELERİN İŞARETLENMESİ

```

DO I=1,N
DO J=1,M
CELL(I,J)='F'
END DO
END DO
DO 2000 IT=1,1
II=0
JJ=0

```

```

DO 1000 LL=1,ITER

```

C HIZ SINIR ŞARTLARI

```

DO I=1,N
M=ETA1(I)
END DO
DO J=2,M
U(2,J)=UO
U(N,J)=U(N-1,J)
V(1,J)=0.0
V(N,J)=V(N-1,J)
END DO

```

```

DO I=2,N
U(I,M)=U(I,M-1)
U(I,1)=0.0
V(I,M)=V(I,M-1)
V(I,2)=0.0
END DO
DO I=N/12,2.*N/12
DO J=1, NT
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

```

DO I=3.*N/12,4.*N/12
DO J=1, NT
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

```

DO I=5.*N/12,6.*N/12
DO J=1, NT
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

```

DO I=7.*N/12,8.*N/12
DO J=1, NT
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

```

DO I=9.*N/12,10.*N/12
DO J=1, NT
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

```

DO I=11.*N/12,12.*N/12
DO J=1, NT
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
END DO
END DO

```

C--- U-KONTROL HACMI

```

DO 25 I=3,N-1
DO 25 J=2,M-1
FW1=(RO*U(I,J)/2.0+RO*U(I-1,J)/2.0)*DELY
FE1=(RO*U(I+1,J)/2.0+RO*U(I,J)/2.0)*DELY
FS1=(RO*V(I,J)/2.0+RO*V(I-1,J)/2.0)*DELX
FN1=(RO*V(I,J+1)/2.0+RO*V(I-1,J+1)/2.0)*DELX
DW1=GA*DELY/(X(I)-X(I-1))
DE1=GA*DELY/(X(I+1)-X(I))
DS1=GA*DELX/(Y(J)-Y(J-1))
DN1=GA*DELX/(Y(J+1)-Y(J))
AW1=AMAX1(0.0, FW1,DW1+FW1/2.)
AE1=AMAX1(0.0, -FE1,DE1-FE1/2.)
AN1=AMAX1(0.0, -FN1,DN1-FN1/2.)

```

```

AS1=AMAX1(0.0, FS1,DS1+FS1/2.)
DELF=FE1-FW1 +FN1-FS1
APO=RO*DELX*DELY/DELT
APU(I,J)=AW1+AE1+AS1+AN1+APO+DELF
25  CONTINUE
C--- V-KONTROL HACMI
DO 45 I=2,N-1
DO 45 J=3,M-1
FW1=(RO*U(I,J)/2.0+RO*U(I,J-1)/2.0)*DELX
FE1=(RO*U(I+1,J)/2.0+RO*U(I+1,J-1)/2.0)*DELX
FS1=(RO*V(I,J-1)/2.0+RO*V(I,J)/2.0)*DELY
FN1=(RO*V(I,J)/2.0+RO*V(I,J+1)/2.0)*DELY
DW1=GA*DELY/(X(I)-X(I-1))
DE1=GA*DELY/(X(I+1)-X(I))
DS1=GA*DELX/(Y(J)-Y(J-1))
DN1=GA*DELX/(Y(J+1)-Y(J))
C--- KAYNAK TERIMI (AĞIRLIK KUVVETİ)
B(I,J)=(1./(FR*FR))*SIN(PI*ALFF/180.)*DELX*DELY
U(I,J)=(ALFU/APU(I,J))*(AW1*U(I-1,J)+AE1*U(I+1,J)+B(I,J)+
1  AS1*U(I,J-1)+AN1*U(I,J+1)+
1  DELY*(P(I-1,J)-P(I,J))+APO*U(I,J)+
1  (1-ALFU)*APU(I,J)*U(I,J)/ALFU)

AW1=AMAX1(0.0, FW1,DW1+FW1/2.)
AE1=AMAX1(0.0, -FE1,DE1-FE1/2.)
AN1=AMAX1(0.0, -FN1,DN1-FN1/2.)
AS1=AMAX1(0.0, FS1,DS1+FS1/2.)
DELF=FE1-FW1 +FN1-FS1
APO=RO*DELX*DELY/DELT
APV(I,J)=AW1+AE1+AS1+AN1+APO+DELF
C--- KAYNAK TERIMI (AĞIRLIK KUVVETİ)
B(I,J)=-1./(FR*FR))*COS(PI*ALFF/180.)*DELX*DELY
V(I,J)=(ALFV/APV(I,J))*(AW1*V(I-1,J)+AE1*V(I+1,J)+B(I,J)+
1  AS1*V(I,J-1)+AN1*V(I,J+1)+
1  DELX*(P(I,J-1)-P(I,J))+APO*V(I,J)+
1  (1-ALFV)*APV(I,J)*V(I,J)/ALFV)
45  CONTINUE
DO I=2,N-1
DO J=2,M-1
PP(I,J)=0.0
END DO
END DO
C BASINÇ SINIR ŞARTLARI
DO I=3,N-1
DO J=2,M-1
IF(I.EQ.N-1)THEN
DE(I,J)=0.0
ELSE

```

```

DE(I,J)=DELY/APU(I+1,J)
END IF
ELSE
DS(I,J)=DELX/APV(I,J)
END IF
IF (J.EQ.M-1)THEN
DN(I,J)=0.0
ELSE
DN(I,J)=DELX/APV(I,J+1)
END IF
END DO
END DO
DO KK=1,10
DO 201 I=2,N-1
DO 201 J=2,M-1
APPE(I,J)=RO*DE(I+1,J)*DELY
APPW(I,J)=RO*DW(I,J)*DELY
APPS(I,J)=RO*DS(I,J)*DELX
APPN(I,J)=RO*DN(I,J+1)*DELX
IF (I.EQ.2)THEN
DW(I,J)=0.0
ELSE
DW(I,J)=DELY/APU(I,J)
END IF
END DO
END DO
DO I=2,N-1
DO J=3,M-1
IF(J.EQ.2)THEN
DS(I,J)=0.0

APP(I,J)=APPE(I,J)+APPW(I,J)+APPN(I,J)+APPS(I,J)
BP(I,J)=RO*U(I,J)*DELY-RO*U(I+1,J)*DELY+RO*V(I,J)*DELX-
2 RO*V(I,J+1)*DELX
PP(I,J)=APPW(I,J)*PP(I-1,J)+APPE(I,J)*PP(I+1,J)+BP(I,J)+
2 APPS(I,J)*PP(I,J-1)+APPN(I,J)*PP(I,J+1)
201 CONTINUE
END DO
C
DO 131 I=2,N-1
DO 131 J=2,M-1
P(I,J)=P(I,J)+ALFP*PP(I,J)
131 CONTINUE
DO 135 I=3,N-1
DO 135 J=2,M-1
U(I,J)=U(I,J)+(DELY/APU(I,J))*(PP(I-1,J)-PP(I,J))
135 CONTINUE
DO 136 I=2,N-1

```

```

DO 136 J=3,M-1
V(I,J)=V(I,J)+(DELX/APV(I,J))*(PP(I,J-1)-PP(I,J))
136 CONTINUE
JJ=JJ+1
ETAP(LL+1)=ETA(N/2)
XX=(ETAP(LL+1)-ETAP(LL))/ETAP(LL+1)
EPSI=1.0E-06
IF(ABS(XX).LT.EPSI) II=II+1
IF(JJ.LT.25000) II=0
IF(ABS(XX).GT.EPSI) II=0
IF(II.EQ.10000) GO TO 1001
C HÜCRELERİN SINIFLANDIRILMASI
DO I=1,N
DO J=1,M
ETA1(I)=INT(ETA(I)/DELY)
IF(J.LT.ETA1(I))THEN
CELL(I,J)='F'
ELSE
IF(J.GT.ETA1(I))THEN
CELL(I,J)='E'
ELSE
IF(J.EQ.ETA1(I))THEN
CELL(I,J)='S'
END IF
END IF
END IF
END DO
END DO
C FİLM KALINLIĞININ HESAPLANMASI
DO I=2,N
DETA(I)=(ETA(I)-ETA(I-1))/DELX
END DO
DO I=1,N
DO J=1,M
ETA(I)=ETA(I)+V(I,M)*DELT-DELT*U(I,M)*DETA(I)
END DO
END DO
C SON V-HIZ BİLEŞENLERİN HESAPLANMASI
DO I=2,N-1
DO J=2,M-1
C DURUM 1
IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'F').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'F').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'E').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
V(I,J)=(V(I-1,J)+V(I+1,J))/2.
END IF
C DURUM 2
IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'F').AND.(CELL(I+1,J).

```

```

1 EQ.'S').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'F').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
  V(I,J)=(DELY*V(I-1,J)+DELX*V(I,J-1))/(DELX+DELY)
END IF
C   DURUM 3
  IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'S').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'F').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'F').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
  V(I,J)=(DELY*V(I+1,J)+DELX*V(I,J-1))/(DELX+DELY)
END IF
C   DURUM 4
  IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'S').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'S').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'F').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
  V(I,J)=V(I,J-1)
END IF
C   DURUM 5
  IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'S').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'E').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'S').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
  V(I,J)=V(I-1,J)
END IF
C   DURUM 6
  IF((CELL(I,J).EQ.'E').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'E').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'S').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'S').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN

  V(I,J)=V(I+1,J)
END IF
END DO
END DO
END DO
C   SON U-HIZ BİLEŞENLERİNİN HESAPLANMASI
  DO I=2,N-1
    DO J=2,M-1
      C   DURUM 1
        IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'F').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'F').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'E').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
          U(I,J)=(U(I-1,J)+U(I+1,J))/2.
        END IF
      C   DURUM 2
        IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'F').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'S').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'F').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
          U(I,J)=(DELY*U(I-1,J)+DELX*U(I,J-1))/(DELX+DELY)
        END IF
      C   DURUM 3
        IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'S').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'F').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'F').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
          U(I,J)=(DELY*U(I+1,J)+DELX*U(I,J-1))/(DELX+DELY)
        END IF
      C   DURUM 4
        IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'S').AND.(CELL(I+1,J).
1 EQ.'S').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'F').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
          U(I,J)=U(I,J-1)

```

```

      END IF
C    DURUM 5
      IF((CELL(I,J).EQ.'S').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'S').AND.(CELL(I+1,J).
1    EQ.'E').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'S').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
      U(I,J)=U(I-1,J)
      END IF
C    DURUM 6
      IF((CELL(I,J).EQ.'E').AND.(CELL(I-1,J).EQ.'E').AND.(CELL(I+1,J).
1    EQ.'S').AND.(CELL(I,J+1).EQ.'S').AND.(CELL(I,J-1).EQ.'E'))THEN
      U(I,J)=U(I+1,J)
      END IF
      END DO
      END DO
      UB1=0.0
      DO J=1,M
      UB1=UB1-U(N/4,J)
      END DO
      UB1=UB1/M
      UB2=0.0
      DO J=1,M
      UB2=UB2-U(N/2,J)

      END DO
      UB2=UB2/M
      UB3=0.0
      DO J=1,M
      UB3=UB3-U(3.*N/4,J)
      END DO
      UB3=UB3/M
      UB4=0.0
      DO J=1,M
      UB4=UB4-U(N,J)
      END DO
      UB4=UB4/M
      UAV=(UB1+UB2+UB3+UB4)/4.
      DO J=1,M
      UF1(N/4,J)=U(N/4,J)/UAV
      END DO
      DO J=2,M
      IF(UF1(N/4,J).EQ.UF1(N/4,J-1)) DELTA(N/4)=Y(J-1)
      END DO
      DO J=1,M
      UF2(N/2,J)=U(N/2,J)/UAV
      END DO
      DO J=2,M
      IF(UF2(N/2,J).EQ.UF2(N/2,J-1)) DELTA(N/2)=Y(J-1)
      END DO
      DO J=1,M

```

```

UF3(3.*N/4,J)=U(3.*N/4,J)/UAV
END DO
DO J=2,M
IF(UF3(3.*N/4,J).EQ.UF3(3.*N/4,J-1)) DELTA(3.*N/4)=Y(J-1)
END DO
DO J=1,M
UF4(N,J)=U(N,J)/UAV
END DO
DO J=2,M
IF(UF4(N,J).EQ.UF4(N,J-1)) DELTA(N)=Y(J-1)
END DO
DELT1=DELT1+DELT
WRITE(1,11) Y(J),-U(N/4,J),-U(N/2,J),-U(3.*N/4,J),-U(N,J)
END DO
UB1=UB1/M
UB2=UB2/M
UB3=UB3/M
UB4=UB4/M
UAV=(UB1+UB2+UB3+UB4)/4.
DO J=1,M
UF1(N/4,J)=U(N/4,J)/UAV
UF2(N/2,J)=U(N/2,J)/UAV
UF3(3.*N/4,J)=U(3.*N/4,J)/UAV
UF4(N,J)=U(N,J)/UAV
WRITE(2,11) Y(J),UF1(N/4,J),UF2(N/2,J),UF3(3.*N/4,J),UF4(N,J)
11  FORMAT(1X, F6.2,2X, 4(E12.4,2X))

1000  CONTINUE
1001  EPSI=EPSI
      UB1=0.0
      UB2=0.0
      UB3=0.0
      UB4=0.0
      DO J=1,M
      UB1=UB1-U(N/4,J)
      UB2=UB2-U(N/2,J)
      UB3=UB3-U(3.*N/4,J)
      UB4=UB4-U(N,J)
      END DO

      DO J=1,M
      UF1(N/4,J)=U(N/4,J)/UAV
      UF2(N/2,J)=U(N/2,J)/UAV
      UF3(3.*N/4,J)=U(3.*N/4,J)/UAV
      UF4(N,J)=U(N,J)/UAV
      WRITE(3,12) HO*Y(J),U1*UF1(N/4,J),U1*UF2(N/2,J),
1  U1*UF3(3.*N/4,J),U1*UF4(N,J)

```

```

12  FORMAT(1X, E12.4,2X, 4(E12.4,2X))
    END DO
    RE1(N/4)=UF1(N/4,M)*U1*ETA(N/4)*HO*5./XNU
    RE1(N/2)=UF2(N/2,M)*U1*ETA(N/2)*HO*5./XNU
    RE1(3.*N/4)=UF3(3.*N/4,M)*U1*ETA(3.*N/4)*HO*5./XNU
    RE1(N)=UF4(N,M)*U1*ETA(N)*HO*5./XNU
    DO I=N/4,N,N/4
    WRITE(4,*) -RE1(I),-I
    END DO
    DO I=1,N
    WRITE(5,*) ETA(I),-X(I)
    END DO
2000 CONTINUE
    STOP
    END
C
C  GIRDAP-TRANSPORT PROGRAMI
C
    DIMENSION DX(100),DY(100),PSI(100,100)
    DIMENSION U(100,100),V(100,100),VOR(100,100)
    DIMENSION APU(100,100),US(120)
    OPEN(1,FILE='PSI1.DAT')
    OPEN(2,FILE='UU1.DAT')
    OPEN(3,FILE='VV1.DAT')
    N=100
    M=100
    RE=100.
    ITER=600000
    RO=1.
    DELT=0.0001
    EPSI=1.E-07
    DO 53 I = 1,N
    DO 53 J = 1,M
    PSI(I,J)=0.0
    VOR(I,J)=0.0
    U(I,J)=0.0
    V(I,J)=0.0
53  CONTINUE
C  GEOMETRININ TANIMLANMASI
    DXX=1./(N-1)
    DYY=1./(M-1)
    DX(1)=0.
    DO I=2,N
    DX(I)=DX(I-1)+DXX
    END DO
    DY(1)=0.
    DO J=2,M
    DY(J)=DY(J-1)+DYY

```

```

END DO
DO 2000 IT=1,1
US(1)=0.0
DO 1000 LL=1,ITER
C SINIR ŞARTLARI
DO I=1,N
U(I,M)=1.
U(I,1)=0.0
V(I,M)=0.
V(I,1)=0.0
PSI(I,1)=0.0
PSI(I,M)=0.0
END DO
DO J=1,M
U(N,J)=0.
U(1,J)=0.0
V(N,J)=0.
V(1,J)=0.0
PSI(1,J)=0.0
PSI(N,J)=0.0
END DO
DO J=1,M-1
VOR(1,J)=-2.*(PSI(2,J)-PSI(1,J))/DXX**2
VOR(N,J)=-2.*(PSI(N-1,J)-PSI(N,J))/DXX**2
END DO
DO I=1,N-1
VOR(I,1)=-2.*(PSI(I,2)-PSI(I,1))/DYY**2
VOR(I,M)=-2.*(PSI(I,M-1)+U(I,M)*DYY)/DYY**2
END DO
C--- AKIM FONKSIYONU PSI
DO MM=1,5
DO 25 I=2,N-1
DO 25 J=2,M-1
DW1=1./DXX**2
DE1=1./DXX**2
DS1=1./DYY**2
DN1=1./DYY**2
APU(I,J)=DW1+DE1+DS1+DN1
PSI(I,J)=(DW1*PSI(I-1,J)+DE1*PSI(I+1,J)+DN1*PSI(I,J+1)+
1 DS1*PSI(I,J-1)+VOR(I,J))/APU(I,J)
25 CONTINUE
END DO
C--- HIZLARIN HESAPLANMASI
DO 45 J=2,M-1
DO 45 I=2,N-1
U(I,J)=(PSI(I,J+1)-PSI(I,J-1))/(2.*DYY)
V(I,J)=-((PSI(I+1,J)-PSI(I-1,J))/(2.*DXX)
45 CONTINUE

```

C-----GIRDAPLARIN HESAPLANMASI

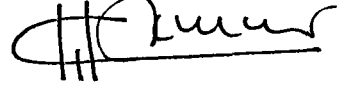
```

DO KK=1,5
DO 46 J=2,M-1
DO 46 I=2,N-1
IF(U(I,J).GE.0.0) THEN
VOR1=U(I,J)*(VOR(I,J)-VOR(I-1,J))/DXX
ELSE
VOR1=U(I,J)*(VOR(I+1,J)-VOR(I,J))/DXX
END IF
IF (V(I,J).GE.0.0) THEN
VOR2=V(I,J)*(VOR(I,J)-VOR(I,J-1))/DYY
ELSE
VOR2=V(I,J)*(VOR(I,J+1)-VOR(I,J))/DYY
END IF
VOR3=(VOR(I+1,J)-2.*VOR(I,J)+VOR(I-1,J))/(RE*DXX**2)
VOR4=(VOR(I,J+1)-2.*VOR(I,J)+VOR(I,J-1))/(RE*DYY**2)
VOR(I,J)=VOR(I,J)+DELT*(-VOR1-VOR2+VOR3+VOR4)
46  CONTINUE
END DO
LLA=LL+1
US(LLA)=U(N/2,M/2)
IF(LL.LT.100) GO TO 1000
IF(ABS((US(LLA)-US(LLA-1))/US(LLA)).LE.EPSI) GO TO 1001
1000 CONTINUE
1001 DO J=1,M
WRITE(1,*)(PSI(I,J),I=1,N)
END DO
DO J=1,M
WRITE(2,*) U(N/2,J), DY(J)
END DO
DO I=1,N
WRITE(3,*) DX(I),V(I,M/2)
END DO
2000 CONTINUE
STOP
END

```

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Çamur 1962 yılı Dali/Kıbrıs doğumludur. 1974 yılında Akıncılar İlkokulunu, 1977 yılında Güzelyurt Kurtuluş Lisesini (Ortaokul) ve 1980 yılında Lefkoşa Türk Lisesi'nden mezun olmuştur. Lisans ve yüksek lisans öğrenimini Makine Mühendisliği Bölümünde tamamlayıp 1988 yılında Braunschweig Teknik Üniversitesi'nden (Almanya) mezun olmuştur. Yabancı dilleri İngilizce ve Almancadır. Halen Lefke Avrupa Üniversitesi Mimarlık ve Mühendislik Fakültesinde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.



Hüseyin Çamur

